

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MAICON FELIPE MALACARNE

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA UTILIZANDO MÉTODOS MULTIGRID  
ESPAÇO-TEMPO

CURITIBA

2023

MAICON FELIPE MALACARNE

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA UTILIZANDO MÉTODOS MULTIGRID  
ESPAÇO-TEMPO

Tese apresentada ao curso de doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE), Setor de Ciências Exatas e de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto  
Coorientador: Prof. Dr. Sebastião Romero Franco

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Malacarne, Maicon Felipe.

Resolução da equação da onda utilizando métodos *Multigrid* espaço-tempo. / Maicon Felipe Malacarne. – Curitiba, 2023.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto.

Coorientador: Prof. Dr. Sebastião Romero Franco.

1. Métodos numéricos. 2. Computadores. 3. Equação de onda. 4. Espaço-tempo. I. Pinto, Marcio Augusto Villela. II. Franco, Sebastião Romero. III. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. IV. Título.

Bibliotecário: Nilson Carlos Vieira Júnior CRB-9/1797

ATA Nº164

## ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA

No dia dez de março de dois mil e vinte e três às 09:30 horas, na sala via Microsoft Teams, Ambiente remoto, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de tese do doutorando **MAICON FELIPE MALACARNE**, intitulada: **RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA UTILIZANDO MÉTODOS MULTIGRID ESPAÇO-TEMPO**, sob orientação do Prof. Dr. MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), GUILHERME BERTOLDO (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ), LEANDRO FRANCO DE SOUZA (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO), COSMO DAMIÃO SANTIAGO (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela APROVAÇÃO. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de doutor está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 10 de Março de 2023.

Assinatura Eletrônica

14/03/2023 15:19:12.0

MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

20/03/2023 17:09:56.0

GUILHERME BERTOLDO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

14/03/2023 16:06:49.0

LEANDRO FRANCO DE SOUZA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica

15/03/2023 11:23:16.0

COSMO DAMIÃO SANTIAGO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **MAICON FELIPE MALACARNE** intitulada: **RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA UTILIZANDO MÉTODOS MULTIGRID ESPAÇO-TEMPO**, sob orientação do Prof. Dr. MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 10 de Março de 2023.

Assinatura Eletrônica  
14/03/2023 15:19:12.0  
MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO  
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica  
20/03/2023 17:09:56.0  
GUILHERME BERTOLDO  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica  
14/03/2023 16:06:49.0  
LEANDRO FRANCO DE SOUZA  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica  
15/03/2023 11:23:16.0  
COSMO DAMIÃO SANTIAGO  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por tornar este trabalho possível.

Agradeço especialmente ao meu orientador, Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto, por todos os ensinamentos, pela paciência e confiança durante o decorrer deste trabalho. Também agradeço muito ao meu coorientador, Prof. Dr. Sebastião Romero Franco, pela imensa ajuda.

Agradeço aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Leandro Franco de Souza, Prof. Dr. Guilherme Bertoldo e Prof. Dr. Cosmo Damião Santiago, pelo tempo dispensado à leitura e à revisão deste trabalho.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela oportunidade de cursar o doutorado.

Agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), ao Instituto Federal do Paraná (IFPR) e à Faculdade Biopark pelas horas destinadas à pesquisa durante minha permanência em cada uma delas.

Agradeço aos colegas do PPGMNE pela amizade e disposição em ajudar.

Agradeço aos meus amigos e familiares que sempre me apoiaram e me incentivaram nesta caminhada.

Agradeço especialmente a minha mãe Maria Salete Malacarne, por ter me ensinado a ser uma boa pessoa e por ter se dedicado tanto para que eu pudesse chegar até aqui.

Agradeço a minha digníssima esposa Laura Caroline Galvan, pelo seu companheirismo e incentivo ao longo deste trabalho.

*Se puderes contar o número de vezes em que fizestes o bem a alguém,  
então é porque não o fez o suficiente.*

***Terezinha Capelletti***

## RESUMO

Neste trabalho apresenta-se a avaliação de diferentes formas de solução para problemas modelados pela equação da onda, para os casos 1D e 2D. Utiliza-se para discretização espacial, o Método das Diferenças Finitas ponderado por um parâmetro  $\eta$  em diferentes estágios de tempo, para obter-se um esquema de solução implícito. Com isso, propõe-se a utilização de diferentes varreduras no tempo, a fim de gerar métodos robustos e eficientes, desde a clássica *Time-Stepping*, até outra varredura que envolve simultaneamente o espaço e o tempo, como *Waveform Relaxation*. Neste trabalho, combina-se o método dos Subdomínios com a estratégia *Waveform Relaxation* para reduzir as fortes oscilações que ocorrem o início do processo iterativo. Obtém-se excelentes resultados ao aplicar o método *Multigrid* para esta classe de problemas, já que, melhora-se muito os fatores de convergência calculados a partir das soluções aproximadas do sistema de equações resultante das discretizações. Na verificação das metodologias propostas e suas características, apresentam-se simulações de propagação de ondas envolvendo problemas uni e bidimensionais, onde analisa-se os erros de discretização, ordens efetiva e aparente, fator de convergência, ordens de complexidade e tempo computacional.

Palavras-chave: *Multigrid*. Verificação. Simulação de ondas. Subdomínios. *Time-Stepping*. *Waveform Relaxation*.



## ABSTRACT

In this thesis presents the evaluation of different forms of solution for problems modeled by the wave equation, for the 1D and 2D cases. The Finite Difference Method is used for the spatial discretization, weighted by a parameter  $\eta$  at different time steps, in order to obtain an implicit solution. With this, it is proposed the use of different sweeps in time, in order to generate robust and efficient methods, from the classical Time-Stepping, to other less usual sweep as Waveform Relaxation. In this work, the Subdomains method is combined with the Waveform Relaxation strategy to reduce the strong oscillations that occur early in the iterative process. Excellent results are obtained when applying the Multigrid method for this class of problems, since the convergence factors calculated from the approximate solutions of the system of equations resulting from the discretizations are greatly improved. In the verification of the proposed methodologies and their respective advantages, simulations of wave propagation involving one- and two-dimensional problems are presented, where the discretization errors, effective and apparent orders, convergence factor, complexity orders and computational time are analyzed.

Keywords: Multigrid. Verification. Wave simulation. Subdomains. Time-Stepping. Waveform Relaxation.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – VIBRAÇÃO DE UMA CORDA FIXA NAS EXTREMIDADES. . .	31
FIGURA 2 – MEMBRANA QUADRANGULAR FIXA NAS EXTREMIDADES.	34
FIGURA 3 – MALHA UNIDIMENSIONAL UNIFORME COM ESPAÇAMENTO UNIFORME DE TAMANHO $h$ . . . . .	38
FIGURA 4 – MÉTODO <i>LEAPFROG</i> . . . . .	39
FIGURA 5 – ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO PARA A MALHA 1D. . . . .	41
FIGURA 6 – ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO PARA A MALHA 2D. . . . .	45
FIGURA 7 – COMPORTAMENTO DAS COMPONENTES DE ERRO NO PROCESSO ITERATIVO. . . . .	47
FIGURA 8 – CICLO V DO <i>MULTIGRID</i> , ONDE $\bullet$ E $\circ$ REPRESENTAM, RESPECTIVAMENTE, SUAVIZAÇÃO E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES. . . . .	49
FIGURA 9 – CICLO F DO <i>MULTIGRID</i> , ONDE $\bullet$ E $\circ$ REPRESENTAM, RESPECTIVAMENTE, SUAVIZAÇÃO E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES. . . . .	50
FIGURA 10 – CICLO W DO <i>MULTIGRID</i> , ONDE $\bullet$ E $\circ$ REPRESENTAM, RESPECTIVAMENTE, SUAVIZAÇÃO E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES. . . . .	50
FIGURA 11 – MALHAS UNIFORMES COM RAZÃO DE ENGROSSAMENTO $R_e = 2$ . . . . .	51
FIGURA 12 – INTERPOLAÇÃO LINEAR E BILINEAR. . . . .	52
FIGURA 13 – INTERPOLAÇÃO DIRETA PARA $\odot$ . . . . .	52
FIGURA 14 – INTERPOLAÇÃO LINEAR EM $y$ PARA $\diamond$ . . . . .	52
FIGURA 15 – INTERPOLAÇÃO LINEAR EM $x$ PARA $\triangleleft$ . . . . .	53
FIGURA 16 – INTERPOLAÇÃO BILINEAR PARA $\bullet$ . . . . .	53
FIGURA 17 – PROCESSO DE ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS PELO MÉTODO <i>TIME-STEPPING</i> . . . . .	54
FIGURA 18 – PROCESSO DE ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM O MÉTODO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> - 1D. . . . .	57
FIGURA 19 – PROCESSO DE ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM O MÉTODO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> - 2D. . . . .	59
FIGURA 20 – DIVISÃO DO DOMÍNIO $\Omega$ EM $K = 3$ SUBDOMÍNIOS ESPACIAIS 1D. . . . .	60
FIGURA 21 – DIVISÃO DO DOMÍNIO $\Omega$ EM $K = 4$ SUBDOMÍNIOS ESPACIAIS 2D. . . . .	60

FIGURA 22 – ERRO PARA EQUAÇÃO DO CALOR 1D COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> USANDO O MÉTODO DOS SUBDOMÍNIOS ESPACIAIS. . . . .	61
FIGURA 23 – MÉTODO DOS SUBDOMÍNIOS NO ESPAÇO E NO TEMPO COM $K = 3$ e $J = 2$ . . . . .	62
FIGURA 24 – DIAGRAMA COM O ALGORITMO 6 PARA O MÉTODO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM $K$ SUBDOMÍNIOS NO ESPAÇO E $J$ SUBDOMÍNIOS NO TEMPO. . . . .	63
FIGURA 25 – MÉTODO DOS SUBDOMÍNIOS NO TEMPO COM $K = 1$ e $J = 3$ . . . . .	64
FIGURA 26 – VIBRAÇÃO DE UMA CORDA FIXA NAS EXTREMIDADES. . . . .	66
FIGURA 27 – VIBRAÇÃO DE UMA MEMBRANA FIXA NAS EXTREMIDADES. . . . .	67
FIGURA 28 – ORDENS APARENTE E EFETIVA - 1D. . . . .	68
FIGURA 29 – ORDENS APARENTE E EFETIVA - 2D. . . . .	69
FIGURA 30 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 1 ITERAÇÃO DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>TIME-STEPPING</i> - 1D. . . . .	70
FIGURA 31 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 5 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>TIME-STEPPING</i> - 1D. . . . .	71
FIGURA 32 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 25 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>TIME-STEPPING</i> - 1D. . . . .	71
FIGURA 33 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 1 ITERAÇÃO DO <i>MULTIGRID</i> COM <i>TIME-STEPPING</i> - 1D. . . . .	72
FIGURA 34 – ERRO <i>VERSUS</i> ITERAÇÕES COM <i>SINGLEGRID</i> E <i>MULTIGRID</i> - <i>TIME-STEPPING</i> - 1D. . . . .	72
FIGURA 35 – RESÍDUO <i>VERSUS</i> ITERAÇÕES COM <i>SINGLEGRID</i> E <i>MULTIGRID</i> - <i>TIME-STEPPING</i> . . . . .	73
FIGURA 36 – FATOR DE CONVERGÊNCIA PARA DIVERSAS MALHAS E VALORES DE $\lambda$ COM <i>TIME-STEPPING</i> - 1D. . . . .	74
FIGURA 37 – FATOR DE CONVERGÊNCIA PARA DIVERSAS MALHAS E VALORES DE $\lambda$ COM <i>TIME-STEPPING</i> - 2D. . . . .	75
FIGURA 38 – <i>SPEED-UP VERSUS N</i> COM <i>TIME-STEPPING</i> - 1D. . . . .	77
FIGURA 39 – <i>SPEED-UP VERSUS N</i> COM <i>TIME-STEPPING</i> - 2D. . . . .	78
FIGURA 40 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 2 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO - 1D. . . . .	78
FIGURA 41 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 50 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO - 1D. . . . .	79
FIGURA 42 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 500 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO - 1D. . . . .	79

FIGURA 43 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 1000 ITERAÇÕES DO <i>SINGLE-GRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO - 1D. . . . .	80
FIGURA 44 – RESÍDUO <i>VERSUS</i> ITERAÇÕES USANDO <i>SINGLEGRID</i> E <i>MULTIGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO. . . . .	80
FIGURA 45 – RESÍDUO <i>VERSUS</i> ITERAÇÕES VARIANDO $N$ , COM $t_f = 1,0s$ FIXO, COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO. . . . .	81
FIGURA 46 – RESÍDUO <i>VERSUS</i> ITERAÇÕES VARIANDO $t_f$ COM $N = 2^7 + 1$ FIXO, COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO. . . . .	81
FIGURA 47 – $\rho_m$ <i>VERSUS</i> $\lambda$ PARA O MÉTODO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO COM <i>SINGLEGRID</i> E <i>MULTIGRID</i> . . . . .	82
FIGURA 48 – RESÍDUO <i>VERSUS</i> ITERAÇÕES PARA $t_f = 1,0s$ , $N = 2^8 + 1$ , $K = 1$ E $J = 1$ USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO. . . . .	85
FIGURA 49 – RESÍDUO <i>VERSUS</i> ITERAÇÕES PARA $t_f = 1,0s$ , $N = 2^8 + 1$ , USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM $K = 1$ E $J = 4$ SUBDOMÍNIOS. . . . .	85
FIGURA 50 – RESÍDUO <i>VERSUS</i> $J$ PARA O $t_f = 1,0s$ E $K = 1$ , PARA DIVERSOS VALORES DE $N$ , USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS. . . . .	86
FIGURA 51 – $\rho_m$ PARA OS MÉTODOS <i>MULTIGRID</i> E <i>SINGLEGRID</i> , USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS PARA $J = 8$ E $K = 1$ . . . . .	87
FIGURA 52 – $\rho_m$ PARA O <i>MULTIGRID</i> E <i>SINGLEGRID</i> VARIANDO O NÚMERO DE SUBDOMÍNIOS NO TEMPO $J$ E $N$ , PARA $\lambda = 10^5$ , $K = 1$ . . . . .	88
FIGURA 53 – SPEED-UP <i>VERSUS</i> $N$ PARA DIFERENTES VALORES DE $\lambda$ , $K = 1$ e $J = 8$ , USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS. . . . .	89
FIGURA 54 – PROPAGAÇÃO DE UM PULSO EM UMA CORDA PARA OS INSTANTES $t_0 = 0,000s$ , $t = 0,109s$ , $t = 0,218s$ E $t = 0,406s$ , USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS ( $K = 1$ E $J = 4$ ) E <i>MULTIGRID</i> . . . . .	91
FIGURA 55 – PROPAGAÇÃO DE UM PULSO EM UMA CORDA PARA OS INSTANTES $t = 0,500s$ , $t = 0,640s$ , $t = 0,734s$ E $t = 0,828s$ , USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS ( $K = 1$ E $J = 4$ ) E <i>MULTIGRID</i> . . . . .	92
FIGURA 56 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL $y = 0,5$ COM 5 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO - 2D. . . . .	94

FIGURA 57 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL $y = 0,5$ COM 50 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO - 2D. . . . .	94
FIGURA 58 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL $y = 0,5$ COM 200 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO - 2D. . . . .	95
FIGURA 59 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL $y = 0,5$ COM 1500 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO - 2D. . . . .	95
FIGURA 60 – RESÍDUO <i>VERSUS</i> ITERAÇÕES PARA O <i>SINGLEGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO - 2D. . . . .	96
FIGURA 61 – $\rho_m$ <i>VERSUS</i> $\lambda$ USANDO <i>SINGLEGRID</i> E <i>MULTIGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO - 2D. . . . .	97
FIGURA 62 – RESÍDUO <i>VERSUS</i> $J$ , PARA $t_f = 1,0s$ e $K = 1$ , PARA DIVERSOS VALORES DE $N$ , COM <i>SINGLEGRID</i> E <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS. . . . .	98
FIGURA 63 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL $y = 0,5$ COM 5 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS ( $K = 1$ E $J = 8$ ) - 2D. . . . .	99
FIGURA 64 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL $y = 0,5$ COM 50 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS ( $K = 1$ E $J = 8$ ) - 2D. . . . .	100
FIGURA 65 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL $y = 0,5$ COM 200 ITERAÇÕES DO <i>SINGLEGRID</i> COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS ( $K = 1$ E $J = 8$ ) - 2D. . . . .	101
FIGURA 66 – RESÍDUO <i>VERSUS</i> ITERAÇÕES COM <i>SINGLEGRID</i> USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS NO TEMPO (PARA $J = 8$ ). . . . .	101
FIGURA 67 – $\rho_m$ <i>VERSUS</i> $\lambda$ USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS - 2D. . . . .	102
FIGURA 68 – <i>SPEED-UP</i> <i>VERSUS</i> $N$ USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS - 2D. . . . .	102
FIGURA 69 – <i>SPEED-UP</i> <i>VERSUS</i> $J$ USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS - 2D. . . . .	104
FIGURA 70 – $\rho_m$ <i>VERSUS</i> $J$ USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS - 2D. . . . .	105

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – ERRO DE DISCRETIZAÇÃO PARA DIFERENTES NÚMEROS DE PONTOS . . . . .	66
TABELA 2 – PARÂMETROS DO AJUSTE GEOMÉTRICO COM <i>TIME-STEPPING</i> - 1D . . . . .	75
TABELA 3 – PARÂMETROS DO AJUSTE GEOMÉTRICO COM <i>TIME-STEPPING</i> - 2D . . . . .	76
TABELA 4 – NÚMERO DE SUBDOMÍNIOS $J$ PARA OS VALORES DE $N^2$ E $\lambda$	83
TABELA 5 – PARÂMETROS DO AJUSTE GEOMÉTRICO USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS - 2D. . . . .	87
TABELA 6 – PARÂMETROS OBTIDOS DA SOLUÇÃO COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> PADRÃO ( $K = 1$ E $J = 1$ ) E COM <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS NO TEMPO ( $K = 1$ E $J = 4$ ), PARA O PROBLEMA DE PROPAGAÇÃO DE UM PULSO.	93
TABELA 7 – NÚMEROS DE SUBDOMÍNIOS NO TEMPO $J$ ADOTADOS EM RELAÇÃO AOS VALORES DE $N^3$ E $\lambda$ - 2D . . . . .	97
TABELA 8 – PARÂMETROS DO <i>MULTIGRID</i> E <i>SINGLEGRID</i> PARA $\lambda = 10^1$ , $N = 2^7 + 1$ , $K = 1$ , USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS - 2D. . . . .	103
TABELA 9 – PARÂMETROS DO <i>MULTIGRID</i> E <i>SINGLEGRID</i> PARA $\lambda = 10^5$ , $N = 2^7 + 1$ , $K = 1$ , USANDO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM SUBDOMÍNIOS - 2D. . . . .	103

## LISTA DE ALGORITMOS

1	CICLO V . . . . .	49
2	MÉTODO <i>TIME-STEPPING</i> COM <i>SINGLEGRID</i> . . . . .	55
3	MÉTODO <i>TIME-STEPPING</i> COM <i>MULTIGRID</i> . . . . .	55
4	MÉTODO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM <i>SINGLEGRID</i> . . . . .	57
5	MÉTODO <i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM <i>MULTIGRID</i> . . . . .	58
6	<i>WAVEFORM RELAXATION</i> COM <i>MULTIGRID</i> (WRMG): $v_h^k(t) \rightarrow v_h^{k+1}(t)$	58

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MDF	Método das Diferenças Finitas
CPU	<i>Central Processing Unit</i>
CS	<i>Correction Scheme</i>
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
FAS	<i>Full Approximation Scheme</i>
GSRB	Método de Gauss-Seidel <i>red-black</i>
LFA	<i>Local Fourier Analysis</i>
MGRIT	<i>Multigrid</i> com redução no tempo
TS	<i>Time Stepping</i>
WR	<i>Waveform Relaxation</i>
ST	<i>Space-Time</i>



## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	– Descrição	Unidade
$a_{ij}$	– Coeficientes da Matriz A	
$a$	– Aceleração	$[m/s^2]$
$ap, aw, ae, an$ e $as$	– Coeficientes	
$A$	– Matriz de coeficientes	
$c$	– Constante	
$e$	– Erro	
$E$	– Erro da solução aproximada para uma determinada malha	
$f(x)$	– Função para a configuração inicial	$[m]$
$\vec{F}$	– Força	$[N]$
$G_i$	– $i$ -ésimo operador diferencial	
$g(x)$	– Função para a velocidade inicial	$[m/s]$
$it$	– Iterações	
$I_h^{2h}$	– Operador de restrição	
$I_{2h}^h$	– Operador de prolongação	
$L_x, L_y$	– Comprimento do domínio na direção das abscissas e ordenadas	$[m]$
$L_0$	– Operador linear	
$m$	– Massa	$[kg]$
$\mathbf{N}$	– Número total de incógnitas	
$N$	– Número de pontos nas direções	
$N_x, N_y$	– Números de pontos espaciais nas direções das abscissas e ordenadas	
$N_t$	– Número de pontos na direção temporal	
$p$	– Ordem de complexidade	
$p_i$	– $i$ -ésimo vetor contendo informações nodais	

$P_U$	– Ordem aparente	
$P_E$	– Ordem efetiva	
$q$	– Razão de engrossamento	
$r$	– Resíduo	
$  r  _\infty$	– Resíduo máximo	
$t$	– Tempo	[s]
$t_{CPU}$	– Tempo de CPU	[s]
$t_f$	– Tempo final	[s]
$tol$	– Tolerância	[s]
$\vec{T}$	– Tensão	[N]
$u$	– Deslocamento transversal 1D e 2D	[m]
$v_0$	– Velocidade inicial	[m/s]
$v_h$	– Solução aproximada	[m]
$V$	– Parâmetro físico que relaciona a densidade e a tensão	[m]
$x, y$	– Coordenadas espaciais dos eixos das abscissas e ordenadas	[m]

### Símbolos gregos

$\alpha$	– Parâmetro físico da equação da onda	
$\beta$	– Número real	
$\gamma$	– Número complexo	
$\Delta$	– Incremento ou variação	
$\varepsilon$	– Erro de truncamento	
$\eta$	– Parâmetro para ponderação na discretização pelo MDF	
$\iota$	– Raiz de -1	
$\lambda$	– Parâmetro contendo informações numéricas e físicas	
$\mu$	– Densidade linear	[kg/m]
$\nabla$	– Operador Laplaciano	

$\theta$	– Ângulo formado entre a corda e a horizontal	[graus]
$\Omega$	– Domínio espacial do problema	
$\phi_h$	– Solução aproximada em uma determinada malha $h$	
$\Phi$	– Uma função analítica	
$\rho$	– Fator de convergência	
$\rho_m$	– Fator de convergência médio	
$\tau$	– Incremento temporal	

### Subscritos

$h, 2h$	– Malha fina e grossa, respectivamente
---------	--

### Sobrescritos

$h, H$	– Malha fina e grossa, respectivamente
$i, j$	– Índices espaciais nas direções das abscissas e ordenadas
$k$	– Índice temporal

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>1.1</b>	<b>Generalidades . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>1.2</b>	<b>Revisão bibliográfica . . . . .</b>	<b>21</b>
1.2.1	Problemas hiperbólicos e a equação da onda . . . . .	21
1.2.2	Método <i>Multigrid</i> . . . . .	23
1.2.3	Métodos de varredura no tempo . . . . .	25
<b>1.3</b>	<b>Justificativa . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>1.4</b>	<b>Objetivos . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>1.5</b>	<b>Organização do texto . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>2</b>	<b>MODELOS MATEMÁTICO E NUMÉRICO . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.1</b>	<b>Formulação do problema contínuo . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1.1	Solução geral para a equação da onda 1D . . . . .	35
2.1.2	Solução geral para a equação da onda 2D . . . . .	36
<b>2.2</b>	<b>Métodos das Diferenças Finitas . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>2.3</b>	<b>Método de discretização temporal . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>2.4</b>	<b>Discretização do problema 1D . . . . .</b>	<b>40</b>
2.4.1	Estabilidade . . . . .	42
<b>2.5</b>	<b>Discretização do problema 2D . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODO <i>MULTIGRID</i> . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>VARREDURAS NO TEMPO . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>4.1</b>	<b><i>Time-Stepping</i> . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>4.2</b>	<b><i>Waveform Relaxation</i> . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>4.3</b>	<b><i>Waveform Relaxation</i> e subdomínios . . . . .</b>	<b>60</b>
<b>5</b>	<b>VERIFICAÇÃO DOS CÓDIGOS COMPUTACIONAIS . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>5.1</b>	<b>Problemas abordados . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>5.2</b>	<b>Erro de discretização . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>5.3</b>	<b>Ordens efetiva e aparente . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>6.1</b>	<b>Método <i>Time-Stepping</i> (TS) - 1D e 2D . . . . .</b>	<b>70</b>
6.1.1	Solução aproximada . . . . .	70
6.1.2	Fator de convergência . . . . .	73
6.1.3	Ordem de complexidade . . . . .	74
6.1.4	<i>Speed-up</i> . . . . .	76

<b>6.2</b>	<b>Método <i>Waveform Relaxation</i> padrão (WR) - 1D . . . . .</b>	<b>76</b>
6.2.1	Solução aproximada . . . . .	77
6.2.2	Fator de convergência médio . . . . .	80
<b>6.3</b>	<b>Método <i>Waveform Relaxation</i> com Subdomínios - 1D . . . . .</b>	<b>83</b>
6.3.1	Fator de convergência médio . . . . .	85
6.3.2	Ordem de complexidade . . . . .	87
6.3.3	<i>Speed-up</i> . . . . .	88
<b>6.4</b>	<b>Aplicação: propagação de pulso de uma onda unidimensional com reflexão e inversão de fase . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>6.5</b>	<b>Método <i>Waveform Relaxation</i> padrão - 2D . . . . .</b>	<b>93</b>
6.5.1	Fator de convergência médio . . . . .	94
<b>6.6</b>	<b>Método <i>Waveform Relaxation</i> com Subdomínios - 2D . . . . .</b>	<b>96</b>
6.6.1	Fator de convergência médio . . . . .	99
6.6.2	<i>Speed-up</i> . . . . .	100
6.6.3	Outras comparações . . . . .	101
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>7.1</b>	<b>Conclusões gerais . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>7.2</b>	<b>Principais contribuições . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>7.3</b>	<b>Propostas para trabalhos futuros . . . . .</b>	<b>107</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>109</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, objetiva-se em desenvolver métodos eficientes para a solução de sistemas de equações esparsos e de grande porte, decorrentes da discretização da equação da onda, que é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) transiente e hiperbólica, que modela matematicamente muitos problemas encontrados em diversas áreas da Engenharia.

Neste, abordam-se os conceitos gerais sobre os problemas tratados pela equação da onda. Também, apresentam-se uma revisão bibliográfica sobre os problemas hiperbólicos, o acelerador de convergência *Multigrid* e os métodos de varredura no tempo. Ao final deste capítulo, exibem-se as justificativas e os principais objetivos deste trabalho.

## 1.1 Generalidades

As EDPs possuem uma forte base matemática para a modelagem de vários problemas e aplicações práticas. Nestas equações, devem-se respeitar certas condições de contorno e/ou iniciais, nas quais obter-se uma solução analítica é geralmente uma tarefa árdua e nem sempre possível. Neste contexto, surgem os métodos aproximados, que oferecem uma alternativa ao representar domínios contínuos por meio de domínios discretos. Com o avanço computacional e o desenvolvimento de novas tecnologias, tem-se a possibilidade de resolver diversos problemas de forma mais realista. Dentre estes problemas, estão aqueles que são modelados pela equação da onda, como por exemplo, vibração de cordas e membranas, ondas sonoras em gases ou líquidos, ondas eletromagnéticas, ondas transversais em meios sólidos, ondas oceânicas de superfície, entre outros.

Esquemas explícitos para se obter uma solução da equação da onda são comuns na literatura, como em Gander, Halpern e Nataf (2003) e Bamberger, Glowinski e Tran (1997). Em geral, tais técnicas são condicionalmente estáveis e isso pode representar uma desvantagem ao realizar refinamentos no tempo e espaço, pois deve-se admitir alguns critérios para garantir estabilidade e convergência (BURDEN; FAIRES, 2016). Outra possibilidade é trabalhar com um método implícito, que comumente são métodos incondicionalmente estáveis (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013).

Nesse contexto, apresenta-se a discretização da equação da onda com o Método das Diferenças Finitas (MDF), onde a discretização temporal é ponderada com um parâmetro  $\eta$  em diferentes estágios de tempo. Esta combinação permite obter um método robusto e estável. Essa técnica pode ser encontrada em Cuminato e Meneguet (2013) e gera um método implícito, que resulta em um sistema linear que pode ser resolvido usando um suavizador como o Gauss-Seidel, com ordenação lexicográfica ou *red-black*, por exemplo. Aqui denomina-se por suavizador, ou *solver*, os métodos de solução para os sistemas lineares resultantes do processo de discretização.

Outro problema comumente encontrado ao se resolver a equação da onda está

relacionado à anisotropia, onde existem parâmetros ligados aos fatores físicos e numéricos desse tipo de problema. De acordo com Umetani, MacLachlan e Oosterlee (2009), pode ser um desafio resolver a equação da onda com um valor grande para  $\alpha$ , um dos parâmetros que compõe a expressão da anisotropia. Aqui  $\alpha$  está associado a velocidade de propagação da onda (número de onda).

Em geral, quando se modela matematicamente um problema físico, obtém-se um sistema linear de grande porte para ser resolvido (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000). Para esse tipo de sistema os métodos convencionais não conseguem atuar de forma eficiente devido à presença de modos de Fourier de alta e baixa frequência nos erros. Neste caso, tais métodos tornam-se menos efetivos (mais lentos). Uma maneira de acelerar o processo de obtenção da solução de tal sistema é aplicar o método *Multigrid*, que é amplamente difundido na literatura, uma vez que, melhora significativamente os fatores de convergência no processo de solução de sistemas de equações (TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2000; WIENANDS; OOSTERLEE, 2001; UMETANI; MACLACHLAN; OOSTERLEE, 2009).

De acordo com Vandewalle e Horton (1995) e Gander (2015) ao resolver problemas físicos modelados por EDPs transientes, pode-se empregar diferentes métodos de varredura no tempo, como por exemplo o *Time-Stepping* (TS), que é um método sequencial; ou *Waveform Relaxation* (WR) e *Space-Time* (ST), que são métodos paralelizáveis, entre outros.

## 1.2 Revisão bibliográfica

Nesta seção apresenta-se uma breve revisão bibliográfica sobre problemas hiperbólicos e a equação da onda; seguida pelo método *Multigrid* e as diferentes formas de varredura no tempo.

### 1.2.1 Problemas hiperbólicos e a equação da onda

Segundo Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2000) a classificação das EDPs de segunda ordem pode ser feita considerando a equação  $L_0 u = f$  em  $\Omega$ , onde  $f$  depende exclusivamente de  $x$  e  $t$ , com  $u(x, t)$  e  $L_0$  é um operador linear dado por

$$L_0 u = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_4 \frac{\partial u}{\partial x} + a_5 \frac{\partial u}{\partial t} + a_6 u. \quad (1.1)$$

Sendo assim, tem-se uma EPD elíptica se  $4a_1 a_3 > a_2^2$ , uma EDP hiperbólica se  $4a_1 a_3 < a_2^2$  e uma EDP parabólica se  $4a_1 a_3 = a_2^2$ . De acordo com Cuminato e Meneguette (2013), as equações hiperbólicas se diferem das equações parabólicas e elípticas, já que comumente sua solução apresenta uma forma mais oscilatória, podendo ser menos suave do que os dados do problema. Assim, as descontinuidades são transportadas sem suavização,

o que pode provocar a formação de singularidades, até mesmo com dados iniciais bem comportados.

De acordo com Pierce (1990), a EDP hiperbólica que descreve a propagação da onda também pode ser escrita por

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u, \quad (1.2)$$

onde  $u$  é o deslocamento na posição com o decorrer do tempo  $t > 0$ , para uma dada constante  $c$  associada à densidade e ao campo de tensão, e  $\nabla^2$  representa o operador laplaciano. A obtenção de soluções aproximadas confiáveis e precisas para o problema da equação da onda é de suma importância, sendo fundamental para a compreensão dos problemas de acústica, elasticidade e fenômenos eletromagnéticos (GANDER *et al.*, 2019). Segundo Köcher e Bause (2014), a simulação numérica da propagação de ondas ultrassônicas em polímeros reforçados com fibra de carbono é uma técnica relativamente nova que serve para a detecção de danos e avaliação da saúde estrutural.

Problemas modelados por EDPs que não dependem da variável temporal dão origem ao regime denominado de permanente ou estacionário, enquanto que os problemas modelados por EDPs que dependem da variável temporal dão origem ao regime transiente. O problema de propagação de ondas pode ser estudado das duas maneiras: com a equação de Helmholtz de forma estacionária (UMETANI; MACLACHLAN; OOSTERLEE, 2009; ERNST; GANDER, 2013; BRANDT; LIVSHITS, 1997) ou resolvendo diretamente a equação da onda de forma transiente (DEHGHAN; MOHEBBI, 2008; MALACARNE; PINTO; FRANCO, 2020; GANDER *et al.*, 2019; GANDER; KWOK; MANDAL, 2020). Neste trabalho, emprega-se a forma transiente.

Obter soluções numéricas para EDPs é um problema importante para várias áreas. Neste trabalho apresenta-se um modelo de solução para a equação da onda, que é um tema de pesquisa atual e possui um grande número de aplicações. Algumas dessas aplicações são empregadas na acústica estrutural (AVALOS; LASIECKA, 1996), na propagação de cargas elétricas (METAXAS; MEREDITH, 1983), nas ondas sonoras (BAILLY; JUVE, 2000), na onda com discretização usando coordenadas polares (GOPAL; MOHANTY; JHA, 2013), na forma da onda estacionária (BRANDT; LIVSHITS, 1997), na equação telegráfica (DEVI *et al.*, 2020), simulações de ondas sísmicas (RIZZUTI; MULDER, 2016), para problemas lineares (DEHGHAN; MOHEBBI, 2008), nos casos não lineares (RINCON; QUINTINO, 2016; BASKONUS; BULUT; SULAIMAN, 2019) e para sistemas de equações para a advecção (STERCK *et al.*, 2020).



### 1.2.2 Método *Multigrid*

Os primeiros estudos relacionados ao método *Multigrid* foram os trabalhos de Fedorenko (1964), em que o objetivo era obter a solução de sistemas de equações resultantes de discretizações de modelos físicos, nos quais foram observados que as taxas de convergências eram melhores ao se utilizar mais de uma malha para resolver o problema (detalhes sobre o método *Multigrid* serão dados na seção 3).

Posteriormente em Brandt (1977) e Brandt (1984) foram abordados os tipos de informações que devem ser transportadas entre as malhas, onde foram propostos dois métodos, o *Correction Scheme* (CS) e o *Full Approximation Scheme* (FAS), mais indicados para problemas lineares e não lineares, respectivamente. Em Stüben e Trottenberg (1982), Hackbusch (1985), Thole e Trottenberg (1986) e Lubich e Ostermann (1987), o método *Multigrid* se mostrou eficiente na solução de problemas elípticos e também foram realizadas contribuições no estudo dos problemas parabólicos.

A partir da década de 90 o método *Multigrid* popularizou-se como um dos métodos mais efetivos na resolução de sistemas de equações. Ele foi empregado em inúmeros trabalhos, como em Kelkar (1990), que aborda o problema de troca de calor entre materiais com condutividades térmicas diferentes e onde a correção do método *Multigrid* é realizada por blocos. Uma estratégia similar de correção realizada por blocos também foi apresentada por Sathiyamurthy e Patankar (1994).

Em Wesseling (1992) foram apresentadas fundamentações sobre alguns detalhes do método *Multigrid*, como os tipos de operadores de prolongação e restrição, diferentes tipos de engrossamento e algumas aplicações na dinâmica dos fluidos, como nas equações de Euler para gases e problemas envolvendo equações de Navier-Stokes compressíveis e incompressíveis. Mais detalhes sobre a técnica *Multigrid* e seus fundamentos também são encontradas em Craig (1966) e Gander (2015).

Na sequência, foram feitas importantes contribuições ao estender as aplicações do método *Multigrid* com as técnicas de paralelização usando a varredura temporal *Waveform Relaxation* em Vandewalle e Horton (1993), Ta-asan e Zhang (1995) e Vandewalle (2013). Já em Vandewalle e Velde (1994), Horton e Vandewalle (1995a) a varredura temporal empregada foi o *Space-Time*. Wesseling (1992) realizou uma análise de Fourier Local (*Local Fourier Analysis*, LFA), aumentando assim a fundamentação matemática existente e dando mais confiabilidade nas aplicações que empregam o método *Multigrid* e métodos paralelizáveis.

De acordo com Brandt e Livshits (1997) aparecem dificuldades ao tentar resolver problemas relacionados à equação da onda, inclusive em sua forma estacionária (Equação de Helmholtz), que consiste em um problema diferente do original, no qual ocorre uma perda de eficiência no *solver* utilizado no *Multigrid* padrão. Então os autores propuseram

isolar essas dificuldades, analisá-las em separado e realizaram algumas modificações nos experimentos numéricos. Tais modificações apresentaram bons resultados, com taxas de convergência melhores.

No trabalho de Gupta, Kouatchou e Zhang (1997) foi realizada uma combinação entre diferenças compactas de alta ordem e o algoritmo *Multigrid* com ciclo V, para resolver a equação de Poisson bidimensional com condições de contorno de Dirichlet (ver Zhang (1998) para o caso tridimensional). Em Llorente e Melson (1998) são comparados alguns dos suavizadores do método *Multigrid* para a solução de um problema elíptico anisotrópico, como o Jacobi ponderado com amortecimento, Jacobi ponderado no plano e com amortecimento parcial, Gauss-Seidel no plano, Gauss-Seidel zebra no plano, Gauss-Seidel linha e Gauss-Seidel *red-black*.

Uma modificação que pode acelerar ainda mais a convergência do método *Multigrid* é a realização de um pré-processamento que é iniciado na malha mais grossa e que vai atingindo as malhas imediatamente mais finas até que se alcance a malha fina desejada. Isto é o que caracteriza o método denominado *Full Multigrid* (ver Llorente e Tirado (1997), Wesseling (1992), Briggs, Henson e McCormick (2000) e Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2000)).

Outras aplicações também são encontradas no trabalho de Oosterlee (1997) com uma discretização das equações de Navier-Stokes para o escoamento tridimensional e incompressível, onde buscou-se um método de solução para resolver problemas com malhas alongadas (anisotropia geométrica). Já em Oosterlee *et al.* (1998), analisou-se o comportamento de suavizadores linhas aplicáveis à classe de problemas tratados em Oosterlee (1997) e também para problemas como convecção-difusão e equações de Euler incompressíveis.

Trabalhos relevantes presentes na literatura e que mostraram várias aplicações e variações do método *Multigrid*, são encontradas em Lent e Vandewalle (2002) e Lent (2006), onde realizou-se um estudo sobre os métodos iterativos para problemas dependentes do tempo. Nestes estudos, eles usaram como base a equação do calor, problemas isotrópicos e anisotrópicos, com métodos implícitos para a aproximação temporal, abordando inclusive os métodos *Time-Stepping* e *Waveform Relaxation* e aproximações temporais de altas ordem.

Em Pinto e Marchi (2006) foram verificados os efeitos de diversos parâmetros de *Multigrid* sobre o tempo computacional, ao aplicar o *Multigrid* na equação de Laplace bidimensional com condições de contorno de Dirichlet. Tais parâmetros são: número de nós, número de iterações internas, número de níveis de malhas, *solvers* e esquemas de correção CS e FAS.

O método *Multigrid* está amplamente difundido na literatura, tendo aplicações

a uma variedade de problemas, tais como a poroelasticidade (RODRIGUES *et al.*, 2022; FRANCO *et al.*, 2018b), problemas difusivos (OLIVEIRA; FRANCO; PINTO, 2018) e equações hiperbólicas (MALACARNE; PINTO; FRANCO, 2020). Resultados promissores para o método *Multigrid* também foram apresentados em Franco *et al.* (2018a) para a equação de calor com *Space-Time*. Nesse trabalho, os autores inovaram ao propor uma forma padrão de engrossamento que se baseia no grau de anisotropia do operador discretizado. Este parâmetro é calculado utilizando a LFA, resultando em um algoritmo com uma estratégia de suavização adaptativa robusta e eficiente.

Existem também trabalhos mais recentes na literatura, que mostram evoluções e variações nas aplicações do método *Multigrid*, como em Choptuik (2008), Oosterlee e Gaspar (2008), Ernst e Gander (2013), Hackbusch (2013), Falgout *et al.* (2014), Gaspar e Rodrigo (2015), Vargas, Pinto e Marchi (2015), Santiago, Marchi e Souza (2015), Gander e Neumuller (2016), Rizzuti e Mulder (2016), Oliveira *et al.* (2018), Clevenger *et al.* (2019).

Obter soluções utilizando métodos compactos de alta ordem para a equação da onda foram analisadas em Britt, Turkel e Tsynkov (2018), onde analisou-se a estabilidade de métodos explícitos e implícitos, bem como a eficácia dos métodos *Multigrid* e Gradientes Conjugados. Este estudo verificou a eficácia da *Multigrid* na resolução de problemas com muitos graus de liberdade.

Soluções eficientes para a equação da onda unidimensional já se encontram na literatura, como em Baccouch e Temimi (2021) para os métodos de alta ordem e em Erbay, Erbay e Erkip (2021) para os casos não lineares. No entanto, ainda há desafios a serem resolvidos quando se emprega o método *Multigrid*, especialmente quando se combinam com esquemas que permitem a paralelização (GANDER; KWOK; MANDAL, 2020).

### 1.2.3 Métodos de varredura no tempo

Com o desenvolvimento de novas tecnologias e computação de alto desempenho, tornou-se de suma importância desenvolver algoritmos que possam utilizar um grande número de núcleos para o processamento de dados, uma vez que isto aumenta muito a eficiência na resolução de alguns problemas envolvendo EDPs (GANDER; NEUMULLER, 2016).

Neste trabalho, pretende-se desenvolver métodos eficientes e paralelizáveis para resolver sistemas de equações esparsos e de grande porte, que resultam da discretização da equação da onda, a qual modela muitos problemas encontrados em várias áreas de aplicação. Estes problemas podem ser resolvidos usando diferentes formas de varreduras no tempo, dentre elas os métodos *Time-Stepping*, *Waveform Relaxation* e *Space-Time*. A seguir apresenta-se um pouco sobre cada um destes métodos.

O método padrão *Time-Stepping* é um método sequencial, que em cada novo

passo de tempo a solução no tempo anterior é utilizada como estimativa inicial, assim soluciona-se um problema transiente com um sistema de equações de forma estacionária (LENT, 2006; JI *et al.*, 2020; LIAO; TANG; ZHOU, 2020; CHEN *et al.*, 2020). O método *Time-Stepping* foi proposto inicialmente para a solução de problemas elípticos, como em Bakhvalov (1966) com a equação de advecção-difusão, mas pode ser aplicado em problemas parabólicos, como em Tannehill, Anderson e Pletcher (1997) com a equação do calor e hiperbólicos, como em Dehghan e Mohebbi (2008) com equação da onda usando métodos multipasso, ou seja, métodos onde a solução aproximada no tempo atual é obtida usando as soluções de dois passos de tempo anteriores.

Em Nievergelt (1964) tem-se um dos primeiros trabalhos que tratam sobre paralelização, ao propor que os algoritmos sequenciais usados para a obtenção de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), fossem substituídos por algoritmos que realizassem várias subtarefas e que poderiam ser executados sem o conhecimento dos resultados de outras subtarefas.

Neste contexto, surge o método *Waveform Relaxation* que é um método iterativo proposto para resolver grandes sistemas de EDOs, mas que pode ser aplicado nas EDPs dependentes do tempo, onde decompõe-se o domínio espacial por um conjunto de pontos e para cada um deles é resolvido por um sistema de EDOs para todos os tempos (LELARASMEE; RUEHLI; VINCENTELLI, 1982; LUBICH; OSTERMANN, 1987; VANDEWALLE; HORTON, 1993; GANDER, 1996). Outros trabalhos que aplicam métodos paralelizáveis são apresentados em Bellen e Zennaro (1989) e Chartier e Philippe (1993) para problemas de valor inicial e em Keller (1992) para problemas de valor de contorno.

Para problemas em regime transiente, os algoritmos *Waveform Relaxation* diferem do método padrão de varredura do tempo (*Time-Stepping*) pelo fato de suas iterações estarem em função do tempo (GANDER, 2015; VANDEWALLE; HORTON, 1993). As EDPs são transformadas num grande conjunto de EDOs e um algoritmo iterativo pode ser utilizado para resolver este sistema. Neste caso, a solução numérica necessita de um elevado esforço computacional, devido à necessidade de resolver sistemas de grande porte. As iterações *Waveform Relaxation* são realizadas de modo a desacoplar o grande sistema original em subsistemas menores. Desta forma, o processo iterativo pode ser implementado num ambiente computacional em paralelo, uma vez que cada subsistema pode ser tratado por processadores diferentes (CONTE; D'AMBROSIO; PATERNOSTER, 2016).

Além da paralelização nas variáveis espaciais do método *Waveform Relaxation*, também é possível realizar a paralelização na direção temporal, dando origem ao método *Space-Time*. Em Horton e Vandewalle (1995a) é apresentado o primeiro trabalho a utilizar o método *Multigrid* com semi-engrossamento no tempo ou no espaço para problemas parabólicos, usando suavizadores ponto a ponto. Nesse trabalho também foi feita a Análise

de Fourier Local. Franco *et al.* (2018a) propôs o uso de suavizadores linha ou plano de relaxação associado ao método *Space-Time* e *Multigrid* com engrossamento padrão para resolver a equação do calor.

Em Ruprecht (2018), analisou-se a relação de dispersão ocorrida na solução aproximada ao empregar um método de paralelização no tempo (intitulado *Parareal Parallel-in-Time*) para resolver equações hiperbólicas, onde investigou-se as características de propagação e estabilidade, até mesmo em casos mais simples como a equação de difusão. Ruprecht (2018) observou que a instabilidade na convergência é causada principalmente ao adotar números de onda médios ou altos.

Resolver a equação da onda com grandes tempos finais, pode ser um desafio (ZLOTNIK; CIEGIS, 2021) e que é amplificado ao tentar aplicar algoritmos paralelizáveis (HAUT *et al.*, 2016; DAI; MADAY, 2013). Um novo método, com características ligeiramente mais estáveis, foi proposto por Nguyen e Tsai (2020), mostrando um bom desempenho para velocidades de onda suaves e constantes. Contudo, este método revelou-se menos eficiente para problemas com descontinuidades.

De acordo com Gander *et al.* (2019), embora os esquemas de paralelização sejam aplicados com sucesso aos problemas de difusão, a maioria deles falha ao ser aplicado à equação da onda, e este é um tópico que necessita de investigação e deve ser abordado com mais detalhes. Estes autores propuseram um esquema de diagonalização com o método de Newmark, que provou ser eficaz para esta classe de problemas. Eles também realizaram a aplicação deste procedimento para calcular a resposta de um composto laminado feito de Carbono/Epoxi quando sujeito a uma carga de impacto.

As instabilidades encontradas quando se tenta aplicar a paralelização à problemas hiperbólicos foram investigadas em Ruprecht (2018), onde a base matemática foi explorada. Nesse trabalho, o autor notou que para o aumento do tempo final ou do número de ondas, há uma superestimação das amplitudes que não são amortecidas no início do processo.

Uma importante revisão bibliográfica sobre a resolução de EDPs utilizando métodos paralelizáveis foram realizados por Ong e Schroder (2020) e Gander (2015), em que os autores salientam a importância de desenvolver códigos que utilizem métodos como *Multigrid*, *Waveform Relaxation*, Subdomínios e *Space-Time*, uma vez que a combinação destes métodos pode ser utilizada para aumentar o grau de paralelização, tanto espacial como temporal.

O método *Space-Time* foi também abordado em Giladi e Keller (2002) para o problema de difusão e advecção com a decomposição de domínios utilizando o *solver* Gauss-Seidel com ordenação *red-black*, no qual foram obtidas altas taxas de convergência. Uma variação do método *Space-Time* para problemas com descontinuidade foi proposta em Klaij, Vegt e Ven (2006), para resolver a equação Navier-Stokes utilizando o Método dos

Elementos Finitos. Normalmente este método apresenta dificuldades quando se trabalha com grandes deformações na malha, mas esta estratégia se provou eficiente até mesmo nestes casos.

Em Gander e Neumuller (2016) foram realizadas análises da aplicação do método *Multigrid* com *Space-Time* para a equação do calor utilizando o Método dos Elementos Finitos no espaço, onde foram apresentados detalhes sobre a convergência e a escolha dos parâmetros ótimos para o engrossamento total no tempo.

O método *Multigrid* com redução do tempo (MGRIT) proposto em Falgout *et al.* (2014) visa aumentar o grau de paralelização dos algoritmos existentes até então, uma vez que permite a paralelização espacial e temporal simultânea. Embora a arquitetura de dados esteja evoluindo, a capacidade de processamento é de certa forma limitada, se apenas um núcleo for utilizado. Este método produz bons resultados, especificamente se forem utilizados um grande número de núcleos.

O método MGRIT, bem como outros métodos de paralelização, tratam o domínio do tempo como uma extensão do domínio espacial. De forma simplificada, pode-se dizer que este método se baseia na obtenção de soluções aproximadas sobre malhas grosseiras no tempo, depois estas soluções podem ser adaptadas como estimativas iniciais sobre malhas mais refinadas e assim o domínio do tempo pode ser dividido em subconjuntos, que são resolvidos separadamente (este processo chama-se relaxamento F). Isto permite a realização de paralelização no tempo, como em Dobrev *et al.* (2017), onde é realizada uma análise da convergência do método MGRIT para dois níveis de malhas para problemas lineares onde a matriz de discretização espacial pode ser diagonalizada.

Uma importante comparação entre *Multigrid* com *Space-Time*, *Multigrid* com *Waveform Relaxation* e os métodos MGRIT foi realizada em Falgout *et al.* (2017) para o problema da difusão. Os resultados mostraram que os três métodos são eficazes na resolução deste tipo de problema, mas o *Multigrid* com *Space-Time* tem algumas vantagens sobre os demais, especialmente quando um número relativamente grande de processadores não está disponível.

Os Métodos de Decomposição de Domínio consistem em técnicas para resolver EDPs onde o domínio do problema pode ser decomposto num conjunto de subdomínios espaciais e temporais, e cada um desses subdomínios é resolvido de forma independente. Tais estratégias podem ser utilizadas em vários métodos, entre eles o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos (FOLTYN; LUKÁŠ; PETEREK, 2020).

Em Ong e Mandal (2018) foi utilizado o método de Decomposição de Domínios combinado com os métodos paralelos Neumann-Neumann e Dirichlet-Neumann *Waveform Relaxation*. Os resultados mostraram uma dependência na solução numérica relacionada ao número de ciclos *Waveform Relaxation*, que neste caso é informada inicialmente. As

principais desvantagens desta metodologia estão ligadas ao esforço computacional quando o número de ciclos é maior do que o necessário, e também a falta de precisão da solução obtida quando o número de ciclos é insuficiente.

Em Benedusi, Minion e Krause (2021) foram tratadas duas abordagens paralelas no tempo aplicadas a um problema de reação-difusão. Partindo do problema contínuo dependente do tempo, foram comparados os métodos PFASST (*Parallel Full Approximation Scheme in Space and Time*) e as estratégias *Space-Time* com *Multigrid* com engrossamento padrão encontrado em Franco *et al.* (2018a), onde os dois mostraram características e resultados muito semelhantes. Para mais detalhes sobre a formulação matemática do método PFASST, consultar o trabalho de Bolten, Moser e Speck (2017) e para o *Space-Time* consultar Horton e Vandewalle (1995b) e Franco *et al.* (2018a).

### 1.3 Justificativa

É de grande importância desenvolver modelos matemáticos para problemas transientes, como a equação da onda. Mas, têm-se dificuldades em se resolver numericamente esse tipo de problema, devido às instabilidades que os problemas hiperbólicos apresentam. Sabe-se ainda, que certas ferramentas numéricas, como o método *Multigrid* podem melhorar significativamente o processo de obtenção de soluções de problemas de Engenharia (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000; TROTTERBERG; CLEES, 2009; GANDER; NEUMULLER, 2016). Para buscar métodos que ajudem a suprir tal necessidade, propõe-se a utilização de diferentes metodologias de solução: o método *Time-Stepping* (TANNEHILL; ANDERSON; PLETCHER, 1997; LENT, 2006), o método *Waveform Relaxation* (HORTON; VANDEWALLE; WORLEY, 1995) e o método Subdomínios no Tempo com *Waveform Relaxation*, todos com e sem *Multigrid*.

Assim, busca-se a obtenção de soluções para a equação da onda com métodos que permitam paralelização, que por se tratar de um tema recorrente na literatura e de primordial importância, apresenta desafios ainda a serem superados.

### 1.4 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é melhorar os métodos de solução de problemas hiperbólicos modelados pela equação da onda nos casos 1D e 2D, utilizando o método *Multigrid*. Os principais métodos estudados neste trabalho e usados para resolver tais problemas são: *Time-Stepping* e *Waveform Relaxation*. A partir desse estudo pretende-se cumprir os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver métodos com baixo erro de discretização, alta velocidade de resolução e que sejam paralelizáveis;

- Desenvolver códigos computacionais para resolver a equação da onda usando o método *Multigrid*, com os métodos de varredura temporal *Time-Stepping* e *Waveform Relaxation*;
- Verificar as vantagens e desvantagens de cada um dos respectivos métodos estudados;
- Otimizar os parâmetros do método *Multigrid* para cada caso estudado.

## 1.5 Organização do texto

Este trabalho é organizado da seguinte forma: no capítulo 2 descrevem-se os modelos matemáticos uni e bidimensional da equação da onda e também apresentam-se os modelos numéricos, juntamente com a descrição dos métodos para a discretização espacial e temporal. A teoria do método *Multigrid* é tratada no capítulo 3. No capítulo 4 apresentam-se as diversas varreduras no tempo; no capítulo 5 expõe-se uma breve verificação dos códigos computacionais desenvolvidos. Exibem-se os resultados obtidos com a aplicação dos métodos *Time-Stepping* e *Waveform Relaxation* no capítulo 6; e finalmente, no capítulo 7 abordam-se as considerações finais sobre os resultados obtidos, as principais contribuições e as sugestões para trabalhos futuros.



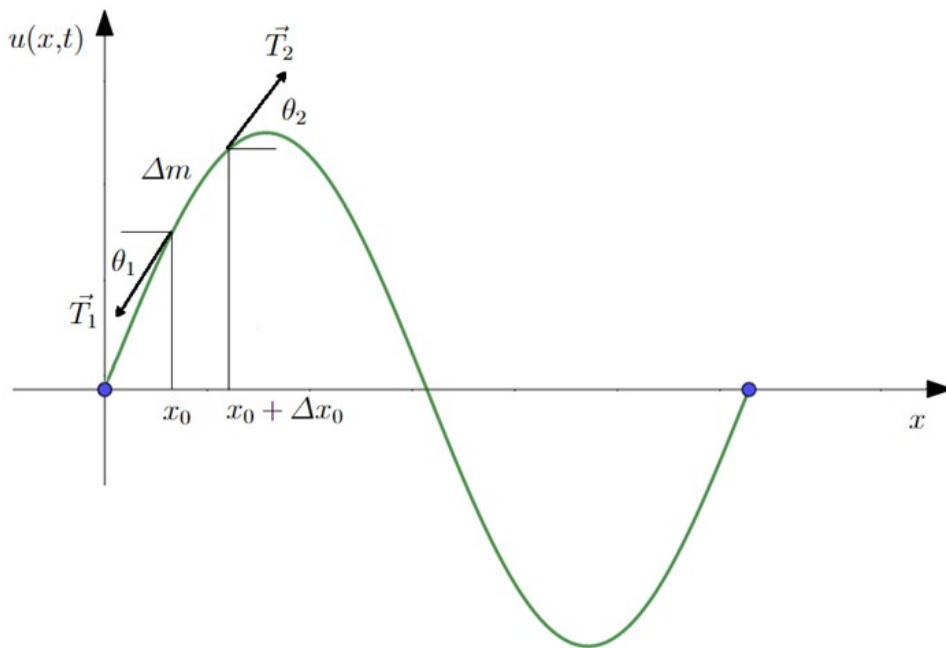
## 2 MODELOS MATEMÁTICO E NUMÉRICO

Neste capítulo abordam-se as formulações matemáticas e numéricas da equação da onda uni e bidimensional, as condições iniciais, condições de contorno, soluções gerais e esquemas de discretização.

### 2.1 Formulação do problema contínuo

O problema unidimensional de vibração de uma corda fixa nas extremidades é descrito por Silva (2019) e resume-se em encontrar o deslocamento  $u(x,t)$ , que depende da posição  $x$  e do tempo  $t$ , e que pode ser ilustrado pela FIGURA 1.

FIGURA 1 – VIBRAÇÃO DE UMA CORDA FIXA NAS EXTREMIDADES.



FONTE: Autor (2022).

Adotando-se dois pontos pertencentes ao domínio  $\Omega$  da corda, de coordenadas  $(x_0, u(x_0, t))$  e  $(x_0 + \Delta x_0, u(x_0 + \Delta x_0, t))$  para um tempo  $t > 0$ , estes pontos são submetidos às tensões  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$ , com respectivas inclinações horizontais  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Admitindo-se valores muito pequenos para  $\Delta x_0$ , ou seja, com  $\Delta x_0 \rightarrow 0$ , tem-se valores pequenos para a variação de massa da corda  $\Delta m$ . Assumem-se que as afirmações abaixo são válidas.

- Todas as forças de atrito, tanto internas quanto externas, não serão consideradas;
- A força gravitacional é pequena quando comparada com as tensões na corda;

- As amplitudes  $u(x,t)$  das oscilações e suas derivadas são pequenas em relação ao comprimento da corda, de modo que seus quadrados e produtos serão desprezados;
- A corda é perfeitamente elástica e homogênea, isto é, ela não oferece resistência a dobras.
- A tensão atua tangencialmente à corda e seu módulo é o mesmo em todos os pontos.

De acordo com a segunda lei de Newton, a força resultante pode ser escrita como  $\vec{F} = m\vec{a}$ , onde  $\vec{a}$  representa-se a aceleração na corda. Logo, a força resultante é dada pela soma das tensões, por

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \Delta m \vec{a}, \quad (2.1)$$

que também pode ser reescrita utilizando conceitos de derivada, com

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \Delta m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (2.2)$$

onde a soma vetorial de  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$  dá origem ao vetor resultante  $\vec{T}$ , com  $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$ . Tem-se ainda as componentes nas direções  $x$  e  $y$  em relação a  $\vec{T}_2$  e  $\theta_2$ , dadas por

$$T_{2x} = T \cos(\theta_2), \quad (2.3)$$

$$T_{2y} = T \sin(\theta_2). \quad (2.4)$$

Admitindo valores de  $\theta_2$  próximos de zero, pode-se escrever  $\cos(\theta_2) \approx 1$  e  $\sin(\theta_2) \approx \theta_2$ , ou ainda,  $\sin(\theta_2) \approx \tan(\theta_2)$ . Com isso, tem-se as componentes do vetor tensão  $\vec{T}_2$ , como

$$T_{2x} \approx T, \quad (2.5)$$

$$T_{2y} \approx T \tan(\theta_2). \quad (2.6)$$

Analogamente para  $\vec{T}_1$  e  $\theta_1$ , tem-se

$$T_{1x} \approx -T, \quad (2.7)$$

$$T_{1y} \approx -T \tan(\theta_1). \quad (2.8)$$

Como a componente  $T_{2x}$  é o oposto da componente  $T_{1x}$ , pode-se desconsiderar a aceleração na direção  $x$ , o que reduz a soma vetorial dada na Eq. (2.2) para uma soma escalar, considerando aceleração apenas na direção  $y$  e admitindo que  $|\vec{u}| = u$ . Com isso, a Eq. (2.2), pode ser dada na sua forma escalar

$$T(tg(\theta_2) - tg(\theta_1)) = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.9)$$

Segue que a interpretação geométrica da  $tg(\theta)$  pode ser escrita em função da derivada aplicada em um ponto, então a Eq. (2.9), pode ser reescrita como

$$T \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0 + \Delta x_0} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} \right) = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

Aqui  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0 + \Delta x_0}$  representa a derivada parcial de  $u$  com relação a  $x$  no ponto  $(x_0 + \Delta x_0, t)$ , mas que aqui está sendo simplificada pelo fato de não haver variação em  $t$ .

Considerando a série de Taylor para uma função analítica  $f$  que atende todas as hipóteses necessárias (KREYSZIG, 2009), tem-se que

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots \quad (2.11)$$

Da mesma forma, pode-se fazer uma aproximação para  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0 + \Delta x_0}$  truncando a série de Taylor no segundo termo da Eq. (2.11), de tal forma que obtém-se

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0 + \Delta x_0} \approx \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0} \Delta x. \quad (2.12)$$

Substituindo a Eq. (2.12) na Eq. (2.10), tem-se

$$T \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0} \Delta x - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} \right) = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.13)$$

ou ainda,

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.14)$$

Admitindo  $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta x}$  é a densidade linear da corda, logo

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Dividindo em ambos os lados pela tensão  $T$  e admitindo que a velocidade do pulso na corda, ou velocidade de propagação da onda na corda, é dada por

$$v_0 = \sqrt{T/\mu}, \quad (2.16)$$

e  $\alpha$  um escalar positivo, tal que  $\alpha^2 = \frac{1}{v_0^2}$ , chega-se à equação da onda 1D,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.17)$$

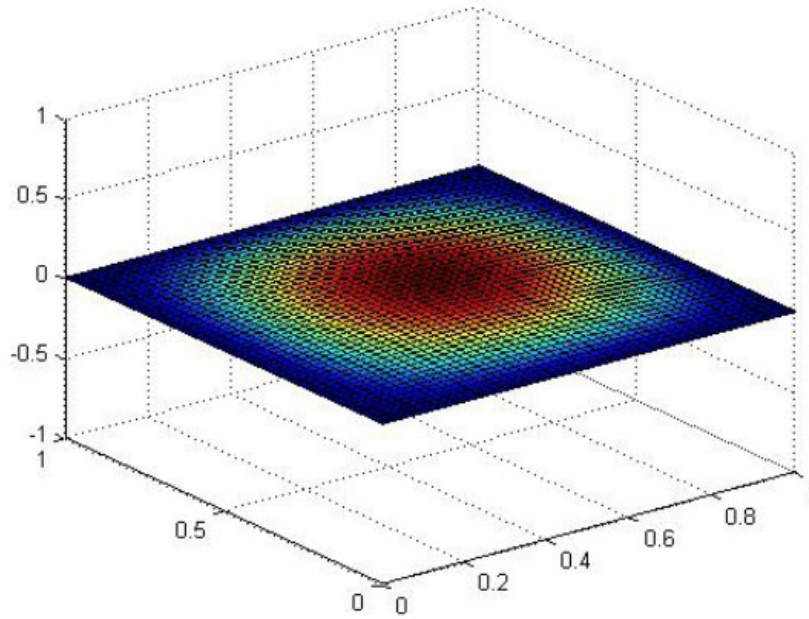
Em Zill e Cullen (2009) é apresentada a equação da onda considerando a ação de mais forças que atuam sobre a corda. Assim, tem-se um modelo mais realístico, dado por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + c_2 u + F(x,t), \quad (2.18)$$

onde são consideradas as influências de forças externas  $F(x,t)$ , da força amortecedora  $c_1 \frac{\partial u}{\partial t}$  e da força restauradora  $c_2 u$ , com  $c_1$  e  $c_2$  constantes.

O problema bidimensional de vibração de uma membrana quadrangular fixa nas extremidades, onde busca-se encontrar o deslocamento  $u(x,y,t)$ , que depende das posições  $x$  e  $y$  e do tempo  $t$ , pode ser ilustrado na FIGURA 2.

FIGURA 2 – MEMBRANA QUADRANGULAR FIXA NAS EXTREMIDADES.



FONTE: Autor (2022).

Adotando uma formulação semelhante ao caso 1D e com algumas generalizações e adaptações (OLVER, 2014), pode-se escrever a equação da onda que modela o problema para o caso 2D como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (2.19)$$

### 2.1.1 Solução geral para a equação da onda 1D

A equação da onda 1D pode ser usada para modelar, por exemplo, o problema de vibração de uma corda fixa nas extremidades, onde o objetivo é encontrar o deslocamento  $u(x,t)$  com as variáveis independentes  $0 \leq x \leq L$  e  $t > 0$ , representando respectivamente, a posição e o tempo. Admitindo um escalar positivo  $\alpha_1$ , tal que  $\alpha_1^2 = \frac{1}{V_1^2}$ , onde  $V_1$  está relacionada a densidade linear e a tensão na corda (velocidade de propagação da onda), apresenta-se a equação da onda unidimensional (OLVER, 2014), como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.20)$$

$$u(x,0) = f_1(x), 0 \leq x \leq L, \quad (2.21)$$

$$u_t(x,0) = g_1(x), 0 \leq x \leq L, \quad (2.22)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0, \quad (2.23)$$

onde  $f_1(x)$  é a configuração inicial,  $g_1(x)$  é a velocidade transversal inicial,  $u(0,t)$  e  $u(L,t)$  são as condições de contorno. A solução geral é construída com as frequências fundamentais de vibração, que são dadas variando-se  $n = 1, 2, 3, \dots$ , assim

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n w_n^0(x,t) + d_n z_n^0(x,t)), \quad (2.24)$$

onde

$$w_n^0(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi\alpha_1 t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.25)$$

$$z_n^0(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\alpha_1 t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.26)$$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad (2.27)$$

$$d_n = \frac{2}{n\pi\alpha_1} \int_0^l g_1(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (2.28)$$

Em que as constantes  $c_n$  e  $d_n$  são determinadas usando as condições iniciais e de contorno.

### 2.1.2 Solução geral para a equação da onda 2D

A equação da onda 2D pode ser usada para modelar, por exemplo, o problema de vibração de uma membrana retangular fixa nas extremidades, onde pretende-se encontrar o deslocamento  $u(x,y,t)$ , com as variáveis independentes,  $0 < x < L_x$  e  $0 < y < L_y$  representando as coordenadas espaciais no plano, para o tempo  $t > 0$ . Assumindo um escalar positivo  $\alpha_2^2 = \frac{1}{V_2^2}$ , onde  $V_2$  está relacionada a densidade superficial e a tensão local, definimos a equação da onda 2D (OLVER, 2014), como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha_2^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.29)$$

$$u(x,y,0) = f_2(x,y), \quad (2.30)$$

$$u_t(x,y,0) = g_2(x,y), \quad (2.31)$$

$$u(x,0,t) = u(x,L_y,t) = u(0,y,t) = u(L_x,y,t) = 0, t > 0, \quad (2.32)$$

onde  $f_2(x,y)$  é a configuração inicial,  $g_2(x,y)$  sua velocidade transversal inicial;  $u(x,0,t)$ ,  $u(x,L_y,t)$ ,  $u(0,y,t)$  e  $u(L_x,y,t)$  representam as condições de contorno. Neste caso a solução geral é construída com as frequências fundamentais de vibração, que são dadas variando-se  $m = 1, 2, 3, \dots$  e  $n = 1, 2, 3, \dots$ , assim

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{m,n} w_{m,n}^1(x,y,t) + b_{m,n} z_{m,n}^1(x,y,t)), \quad (2.33)$$

onde

$$w_{m,n}^1(x,y,t) = \cos\left(\pi\alpha_2\sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right), \quad (2.34)$$

$$z_{m,n}^1(x,y,t) = \operatorname{sen}\left(\pi\alpha_2\sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right), \quad (2.35)$$

$$a_{m,n} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} f_2(x,y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \quad (2.36)$$

e

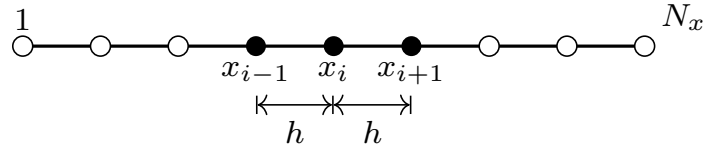
$$b_{m,n} = \frac{4}{\pi\alpha_2\sqrt{m^2 L_y^2 + n^2 L_x^2}} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} g_2(x,y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy. \quad (2.37)$$

Em que as constantes  $a_{m,n}$  e  $b_{m,n}$  são determinadas usando as condições iniciais e de contorno.

## 2.2 Métodos das Diferenças Finitas

O problema da propagação da onda pode ser abordado basicamente de duas maneiras: com a equação de Helmholtz na forma estacionária (UMETANI; MACLACHLAN; OOSTERLEE, 2009; ERNST; GANDER, 2013; BRANDT; LIVSHITS, 1997) ou resolvendo diretamente a equação da onda na forma transiente (DEHGHAN; MOHEBBI, 2008; MALACARNE; PINTO; FRANCO, 2021; GANDER *et al.*, 2019; GANDER; KWOK; MANDAL, 2020). No intuito de se resolver numericamente tal problema, discretiza-se a equação da onda transiente com o Método das Diferenças Finitas (MDF) ponderado por um parâmetro  $\eta$  em diferentes passos de tempo (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013; MALACARNE; PINTO; FRANCO, 2022), gerando assim um método implícito, que resulta em um sistema de equações para cada passo de tempo, que pode ser resolvido utilizando um *solver* como Gauss-Seidel, com ordem lexicográfica ou *red-black*, por exemplo.

O MDF (FORSYTHE; WASOW, 1960) consiste em uma forma de se resolver numericamente EDPs, assim como Método dos Volumes Finitos (EYMARD; GALLOUËT; HERBIN, 2000), o Método dos Elementos Finitos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000), Método dos Elementos Finitos Generalizados (MELENK; BABUŠKA, 1996) e Método dos Elementos de Contorno (BANERJEE; BUTTERFIELD, 1981). De acordo Ferziger e Peric (2002), o processo de aproximação do MDF se inicia com a representação do domínio contínuo  $\Omega$  por um domínio discreto, que consiste em um conjunto ordenado de pontos que formam a malha. Por exemplo, para o caso unidimensional, veja FIGURA 3.

FIGURA 3 – MALHA UNIDIMENSIONAL UNIFORME COM ESPAÇAMENTO UNIFORME DE TAMANHO  $h$ .

FONTE: Autor (2022).

Desta forma, Kreyszig (2009) destaca que é possível usar uma expansão em série de Taylor para representar uma função analítica  $\Phi(x)$  na vizinhança de  $x_i$  como

$$\Phi(x) = \Phi(x_i) + (x - x_i) \frac{d\Phi(x_i)}{dx} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \frac{d^2\Phi(x_i)}{dx^2} + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \frac{d^3\Phi(x_i)}{dx^3} + \dots \quad (2.38)$$

Aplicando a Eq. (2.38) para os pontos  $x = x_{i+1}$ , com  $(x_{i+1} - x_i) = h$  e  $x = x_{i-1}$  com  $(x_{i-1} - x_i) = -h$ , tem-se, respectivamente

$$\Phi(x_{i+1}) = \Phi(x_i) + h \frac{d\Phi(x_i)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2\Phi(x_i)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3\Phi(x_i)}{dx^3} + \dots \quad (2.39)$$

e

$$\Phi(x_{i-1}) = \Phi(x_i) - h \frac{d\Phi(x_i)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2\Phi(x_i)}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3\Phi(x_i)}{dx^3} + \dots \quad (2.40)$$

Pode-se escrever a segunda derivada de  $\Phi(x_i)$  pelo esquema de diferenças centrais (BURDEN; FAIRES, 2016) somando as expressões dadas pelas Eqs. (2.39) e (2.40), e obtém-se

$$\frac{d^2\Phi(x_i)}{dx^2} = \frac{\Phi(x_{i+1}) - 2\Phi(x_i) + \Phi(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{d^4\Phi(x_i)}{dx^4} - \frac{h^4}{360} \frac{d^6\Phi(x_i)}{dx^6} \dots \quad (2.41)$$

Desta maneira, pode-se admitir uma aproximação para a segunda derivada de  $\Phi(x_i)$  dada por

$$\frac{d^2\Phi(x_i)}{dx^2} \approx \frac{\Phi(x_{i+1}) - 2\Phi(x_i) + \Phi(x_{i-1}))}{h^2}, \quad (2.42)$$

com um erro de truncamento

$$\mathcal{E} \left( \frac{d^2\Phi(x_i)}{dx^2} \right) = -\frac{h^2}{12} \frac{d^4\Phi(x_i)}{dx^4} - \frac{h^4}{360} \frac{d^6\Phi(x_i)}{dx^6} - \frac{h^6}{20160} \frac{d^8\Phi(x_i)}{dx^8} - \dots \quad (2.43)$$

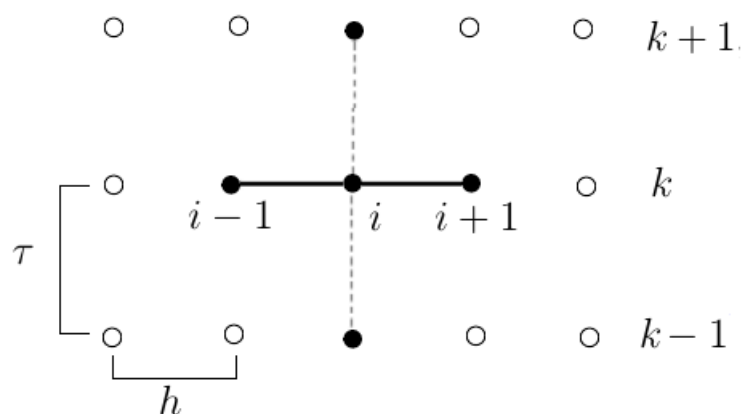


Observa-se que quando se utilizam malhas com mais pontos, maior será a complexidade da aproximação numérica e menor será o erro de truncamento, que tende a zero quando o tamanho dos elementos da malha também tendem a zero.

### 2.3 Método de discretização temporal

Usar esquemas explícitos para obter uma solução para a equação da onda é algo bem comum na literatura, devido a simplicidade na implementação de tal técnica, como em Weber, Kreiss e Nazarov (2022), Gander, Halpern e Nataf (2003) e Bamberger, Glowinski e Tran (1997). Em geral, tais técnicas são condicionalmente estáveis, o que pode ser uma desvantagem na realização de refinamentos no tempo ou no espaço, já que alguns critérios devem ser admitidos para a convergência. Outra possibilidade é a utilização de métodos implícitos, que normalmente são incondicionalmente estáveis, assegurando assim uma maior estabilidade e convergência das soluções aproximadas obtidas (BURDEN; FAIRES, 2016).

Uma possibilidade de discretização espacial e temporal da equação da onda é a utilização do método *Leapfrog* (ISERLES, 1986; DURRAN, 1991), que aproxima a segunda derivada espacial e temporal pelo MDF. Ao considerar a Eq. (2.17) e uma aproximação  $v$  para a solução  $u$ , com intervalo de tempo  $\tau$ , em três estágios  $k - 1$ ,  $k$  e  $k + 1$ , e o intervalo espacial  $h$  em três pontos  $i - 1$ ,  $i$  e  $i + 1$ , tem-se o modelo ilustrado pela FIGURA 4.

FIGURA 4 – MÉTODO *LEAPFROG*.

FONTE: Autor (2022).

Então a equação da onda pode ser discretizada pela expressão

$$\frac{v_i^{k-1} - 2v_i^k + v_i^{k+1}}{\tau^2} = \alpha^2 \frac{v_{i-1}^k - 2v_i^k + v_{i+1}^k}{h^2}. \quad (2.44)$$

Nota-se que na Eq. (2.44), o subíndice e superíndice se referem às discretizações espacial e temporal, respectivamente.

Porém esta técnica resulta em um método explícito (LIAO; SUN, 2011) que possui condições de estabilidade, as quais podem interferir negativamente no processo de aproximação, dependendo dos valores adotados para os intervalos de tempo ou espaço.

Apesar das matrizes geradas na resolução da equação da onda utilizando estes tipos de métodos serem tridiagonais, e que podem ser resolvidas de forma direta, optou-se por utilizar métodos implícitos com o uso de métodos iterativos do tipo Gauss-Seidel, no intuito de analisar suas propriedades de suavização no contexto do método *Multigrid*.

Para este trabalho utiliza-se o método implícito, como o apresentado por Cuminato e Meneguette (2013), onde é realizada uma ponderação na derivada espacial em três estágios de tempo distintos e que são abordados na seção a seguir.

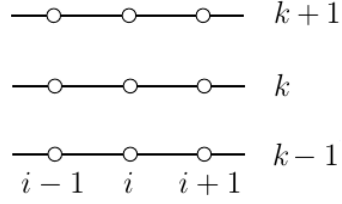
## 2.4 Discretização do problema 1D

Assumindo o problema definido pelas Eqs. (2.20) a (2.23) e adotando o tamanho de cada elemento espacial por  $h_1 = \frac{L}{N_x}$  e um incremento no tempo  $\tau_1 = \frac{t_f}{N_t}$ , sendo  $N_x > 0$  e  $N_t > 0$ , os números de intervalos espaciais e temporais, respectivamente, com tempo final  $t_f > 0$  e o comprimento da corda  $L$ . Admitindo uma aproximação  $v_i^k$  para solução  $u$ , no ponto de coordenada  $x_i$ , tempo  $k$  e usando diferenças centrais, o problema 1D discretizado pode ser dado por

$$\begin{aligned} & \frac{v_i^{k-1} - 2v_i^k + v_i^{k+1}}{\tau_1^2} - \frac{\tau_1^2}{12} \frac{\partial^4 v_i}{\partial t^4} - \frac{\tau_1^4}{360} \frac{\partial^6 v_i}{\partial t^6} - \frac{\tau_1^6}{20160} \frac{\partial^8 v_i}{\partial t^8} - \dots = \\ & \alpha_1^2 \eta_1 \left( \frac{v_{i-1}^{k+1} - 2v_i^{k+1} + v_{i+1}^{k+1}}{h_1^2} - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 v_i^{k+1}}{\partial x^4} - \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 v_i^{k+1}}{\partial x^6} - \frac{h_1^6}{20160} \frac{\partial^8 v_i^{k+1}}{\partial x^8} - \dots \right) \\ & + \alpha_1^2 (1 - 2\eta_1) \left( \frac{v_{i-1}^k - 2v_i^k + v_{i+1}^k}{h_1^2} - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 v_i^k}{\partial x^4} - \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 v_i^k}{\partial x^6} - \frac{h_1^6}{20160} \frac{\partial^8 v_i^k}{\partial x^8} - \dots \right) \\ & + \alpha_1^2 \eta_1 \left( \frac{v_{i-1}^{k-1} - 2v_i^{k-1} + v_{i+1}^{k-1}}{h_1^2} - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 v_i^{k-1}}{\partial x^4} - \frac{h_1^4}{360} \frac{\partial^6 v_i^{k-1}}{\partial x^6} - \frac{h_1^6}{20160} \frac{\partial^8 v_i^{k-1}}{\partial x^8} - \dots \right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde  $\eta_1$  é um parâmetro de ponderação. Ao adotar  $\eta_1 > 0,25$  tem-se uma abordagem incondicionavelmente estável (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013). A FIGURA 5 ilustra os pontos utilizados para calcular  $v$ , em um certo tempo  $k$ , com coordenada espacial  $i$ .

FIGURA 5 – ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO PARA A MALHA 1D.



FONTE: Autor (2022).

Reordenando os termos da Eq. (2.45), obtém-se

$$v_i^{k-1} - 2v_i^k + v_i^{k+1} = \frac{\alpha_1^2 \tau_1^2}{h_1^2} [\eta_1 (v_{i-1}^{k+1} - 2v_i^{k+1} + v_{i+1}^{k+1}) + (1 - 2\eta_1)(v_{i-1}^k - 2v_i^k + v_{i+1}^k) + \eta_1 (v_{i-1}^{k-1} - 2v_i^{k-1} + v_{i+1}^{k-1})], \quad (2.46)$$

com erro de truncamento de ordem  $O(h_1^2 \tau_1^2, \tau_1^4)$ , dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1D} = & + \frac{\tau_1^4}{12} \frac{\partial^4 v_i}{\partial t^4} + \dots - \frac{\alpha_1^2 \tau_1^2 h_1^2 \eta_1}{12} \frac{\partial^4 v_i^{k+1}}{\partial x^4} - \dots - \frac{\alpha_1^2 \tau_1^2 h_1^2}{12} (1 - 2\eta_1) \frac{\partial^4 v_i^k}{\partial x^4} - \dots \\ & - \frac{\alpha_1^2 \tau_1^2 h_1^2 \eta_1}{12} \frac{\partial^4 v_i^{k-1}}{\partial x^4} - \dots \end{aligned} \quad (2.47)$$

Assumindo que  $\lambda_1 = \frac{\alpha_1^2 \tau_1^2}{h_1^2}$ , tem-se o seguinte sistema de equações

$$a_{p1} v_i^{k+1} = a_{w1} v_{i-1}^{k+1} + a_{e1} v_{i+1}^{k+1} + b_{p1}, \quad (2.48)$$

onde

$$a_{p1} = 1 + 2\eta_1 \lambda_1, \quad (2.49)$$

$$a_{w1} = a_{e1} = \eta_1 \lambda_1, \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} b_{p1} = & (-1 - 2\eta_1 \lambda_1) v_i^{k-1} + (2 + (-2 + 4\eta_1) \lambda_1) v_i^k + (1 - 2\eta_1) \lambda_1 (v_{i-1}^k + v_{i+1}^k) \\ & + \eta_1 \lambda_1 (v_{i-1}^{k-1} + v_{i+1}^{k-1}). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Para realizar a primeira iteração é necessário conhecer antes a solução em dois passos de tempo anteriores  $v_i^0$  e  $v_i^1$ . Para iniciar o processo,  $v_i^0$  é dado pela configuração inicial e  $v_i^1$  é dado em Burden e Faires (2016), por

$$v_i^1 = (1 - \lambda_1)f_1(x_i) + \frac{\lambda_1}{2}f_1(x_{i+1}) + \frac{\lambda_1}{2}f_1(x_{i-1}) + \tau_1 g_1(x_i) + O(h_1^2 \tau_1^2). \quad (2.52)$$

#### 2.4.1 Estabilidade

Em seguida, o critério de Von Neumann (THOMAS, 2013) é utilizado para determinar a estabilidade do método de discretização descrito anteriormente. Para isso, supõe-se que o erro global é dado por uma série de erros locais de Fourier, também chamados harmônicos. Assim, o erro no primeiro passo pode ser expresso como:

$$E_i = \sum_{n=0}^{N_x} a_n e^{\left(\iota \frac{n\pi}{l} ih\right)}, \quad (2.53)$$

com  $\iota = \sqrt{-1}$ . Tem-se um sistema com  $N_x + 1$  equações e  $N_x + 1$  incógnitas, em que a matriz de coeficientes é não-singular (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013). Agora, adota-se um harmônico genérico que pode ser escrito na forma

$$U_i^k = e^{\gamma k} e^{\iota \beta i}, \quad (2.54)$$

onde  $\beta \in \mathbb{R}$  e  $\gamma \in \mathbb{C}$ , sendo ambos arbitrários. Consequentemente, para analisar a estabilidade do método de discretização, é suficiente verificar a propagação deste harmônico à medida que  $k$  aumenta.

Substituindo a Eq. (2.54) na Eq. (2.46) para a variável  $v$ , com  $\eta = 1/2$  (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013; MALACARNE; PINTO; FRANCO, 2022), tem-se

$$e^{\gamma(k+1)} e^{\iota \beta i} - 2e^{\gamma k} e^{\iota \beta i} + e^{\gamma(k-1)} e^{\iota \beta i} = \frac{\lambda}{2} [e^{\gamma(k+1)} e^{\iota \beta(i+1)} - 2e^{\gamma(k+1)} e^{\iota \beta i} + e^{\gamma(k+1)} e^{\iota \beta(i-1)} + e^{\gamma(k-1)} e^{\iota \beta(i+1)} - 2e^{\gamma(k-1)} e^{\iota \beta i} + e^{\gamma(k-1)} e^{\iota \beta(i-1)}], \quad (2.55)$$

ou ainda,

$$e^{\gamma} e^{\gamma k} e^{\iota \beta i} - 2e^{\gamma k} e^{\iota \beta i} + e^{-\gamma} e^{\gamma k} e^{\iota \beta i} = \frac{\lambda}{2} [e^{\gamma} e^{\gamma k} e^{\iota \beta i} e^{\iota \beta} - 2e^{\gamma} e^{\gamma k} e^{\iota \beta i} + e^{\gamma} e^{\gamma k} e^{\iota \beta i} e^{-I\beta} + e^{-\gamma} e^{\gamma k} e^{\iota \beta i} e^{\iota \beta} - 2e^{-\gamma} e^{\gamma k} e^{\iota \beta i} + e^{-\gamma} e^{\gamma k} e^{\iota \beta i} e^{-\iota \beta}]. \quad (2.56)$$

Dividindo ambos os lados do Eq. (2.56) por  $e^{\gamma k} e^{\iota \beta i}$  e rearranjando os termos, tem-se

$$e^{\gamma} - 2 + e^{-\gamma} = \frac{\lambda}{2} [e^{\gamma} e^{\iota \beta} - 2e^{\gamma} + e^{\gamma} e^{-\iota \beta} + e^{-\gamma} e^{\iota \beta} - 2e^{-\gamma} + e^{-\gamma} e^{-\iota \beta}], \quad (2.57)$$

ou ainda,

$$e^{\gamma} - 2 + e^{-\gamma} = \frac{\lambda}{2} [e^{\gamma} (e^{\iota \beta} - 2 + e^{-\iota \beta}) + e^{-\gamma} (e^{\iota \beta} - 2 + e^{-\iota \beta})]. \quad (2.58)$$

Usando a fórmula de Euler,  $e^{\iota \beta} = \cos(\beta) + \iota \sin(\beta)$ , tem-se  $e^{\iota \beta} + e^{-\iota \beta} = 2\cos(\beta)$ . Assim, pode-se reescrever a Eq. (2.58) como

$$e^{\gamma} - 2 + e^{-\gamma} = \frac{\lambda}{2} [(e^{\gamma} + e^{-\gamma})(2\cos(\beta) - 2)], \quad (2.59)$$

ou ainda,

$$(e^{\gamma} + e^{-\gamma})(1 + \lambda(1 - \cos(\beta))) = 2. \quad (2.60)$$

Usando as identidades  $1 - \cos(\beta) = 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$  e  $\cosh(\gamma) = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2}$ , pode-se reescrever a Eq. (2.60) como

$$\cosh(\gamma) = \frac{1}{1 + 2\lambda \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}, \quad (2.61)$$

ou ainda,

$$\gamma = \operatorname{arccosh} \left( \frac{1}{1 + 2\lambda \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} \right). \quad (2.62)$$

A partir da Eq. (2.54) tem-se que  $U_i^{k+1} = e^{\gamma} U_i^k$ , ou seja,  $e^{\gamma}$  é o fator de amplificação. A seguir, analisa-se o comportamento do harmônico genérico  $U_i^{k+1}$  com o aumento de  $k$ . A partir da Eq. (2.62) e como  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \geq 0$  e  $0 \leq \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \leq 1$ , tem-se os seguintes casos:

1)  $\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \rightarrow 1^-$ , implica em  $\gamma \rightarrow \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{1 + 2\lambda}\right)$ . Nestes casos, o fator de anisotropia  $\lambda$  deve ser analisados nas seguintes situações:

1.1)  $\lambda \rightarrow +\infty$ , implica em  $\gamma \rightarrow \frac{\pi \iota}{2}$ . Note-se que para o aumento de  $k$ , o harmônico tende a permanecer o mesmo, ou seja, ele não será amplificado.

1.2)  $\lambda \rightarrow 0^+$ , implica em  $\gamma \rightarrow 0^+$ . Nota-se que nestes casos  $e^\gamma$  tem-se uma amplitude decrescente.

2)  $\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \rightarrow 0^+$ , independentemente do valor de  $\lambda$ , tem-se  $\gamma \rightarrow 0^+$ , que também produz uma amplitude decrescente para  $e^\gamma$ .

Portanto, os harmônicos não serão amplificados, uma vez que  $0 < e^\gamma < 1$ , ou seja, o método de discretização utilizado em Eq. (2.45) com  $\eta = 1/2$  é incondicionalmente estável.

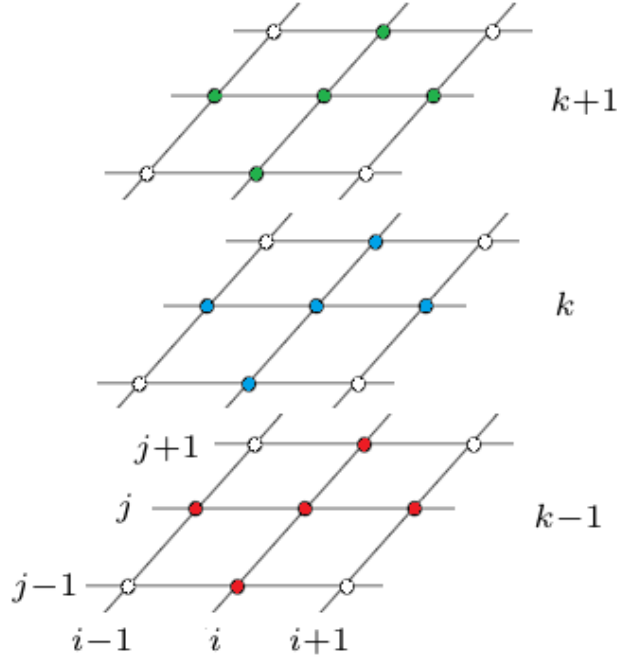
## 2.5 Discretização do problema 2D

Considere o problema definido pelas Eqs. (2.29) a (2.32) e uma membrana quadrangular de lado  $L$ , ou seja,  $L_x = L_y = L$ . Define-se o tamanho de cada elemento espacial com  $h_x = \frac{L}{N_x}$ ,  $h_y = \frac{L}{N_y}$  e um incremento no tempo  $\tau_2 = \frac{t_f}{N_t}$ , sendo  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_t$ , os números de intervalos espaciais e temporal, respectivamente, com tempo final  $t_f > 0$ . Admitindo uma aproximação  $v_{i,j}^k$  para solução  $u$ , para um ponto de coordenadas  $(x_i, y_j)$ , tempo  $k$  e diferenças centrais, o problema 2D pode ser discretizado com MDF ampliando a metodologia empregada no caso 1D. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 & \frac{v_{i,j}^{k-1} - 2v_{i,j}^k + v_{i,j}^{k+1}}{\tau_2^2} - \frac{\tau_2^2}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}}{\partial t^4} - \frac{\tau_2^4}{360} \frac{\partial^6 v_{i,j}}{\partial t^6} - \frac{\tau_2^6}{20160} \frac{\partial^8 v_{i,j}}{\partial t^8} - \dots = \quad (2.63) \\
 & \alpha_2^2 \eta_2 \left( \frac{(v_{i-1,j}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i+1,j}^{k+1})}{h_x^2} - \frac{h_x^2}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}^{k+1}}{\partial x^4} - \frac{h_x^4}{360} \frac{\partial^6 v_{i,j}^{k+1}}{\partial x^6} - \frac{h_x^6}{20160} \frac{\partial^8 v_{i,j}^{k+1}}{\partial x^8} - \dots \right) \\
 & + \alpha_2^2 (1 - 2\eta_2) \left( \frac{(v_{i-1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i+1,j}^k)}{h_x^2} - \frac{h_x^2}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}^k}{\partial x^4} - \frac{h_x^4}{360} \frac{\partial^6 v_{i,j}^k}{\partial x^6} - \frac{h_x^6}{20160} \frac{\partial^8 v_{i,j}^k}{\partial x^8} - \dots \right) \\
 & \alpha_2^2 \eta_2 \left( \frac{(v_{i,j-1}^{k-1} - 2v_{i,j}^{k-1} + v_{i,j+1}^{k-1})}{h_y^2} - \frac{h_y^2}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}^{k-1}}{\partial y^4} - \frac{h_y^4}{360} \frac{\partial^6 v_{i,j}^{k-1}}{\partial y^6} - \frac{h_y^6}{20160} \frac{\partial^8 v_{i,j}^{k-1}}{\partial y^8} - \dots \right) \\
 & \alpha_2^2 \eta_2 \left( \frac{(v_{i,j-1}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i,j+1}^{k+1})}{h_y^2} - \frac{h_y^2}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}^{k+1}}{\partial y^4} - \frac{h_y^4}{360} \frac{\partial^6 v_{i,j}^{k+1}}{\partial y^6} - \frac{h_y^6}{20160} \frac{\partial^8 v_{i,j}^{k+1}}{\partial y^8} - \dots \right) \\
 & + \alpha_2^2 (1 - 2\eta_2) \left( \frac{(v_{i,j-1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j+1}^k)}{h_y^2} - \frac{h_y^2}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}^k}{\partial y^4} - \frac{h_y^4}{360} \frac{\partial^6 v_{i,j}^k}{\partial y^6} - \frac{h_y^6}{20160} \frac{\partial^8 v_{i,j}^k}{\partial y^8} - \dots \right) \\
 & + \alpha_2^2 \eta_2 \left( \frac{(v_{i,j-1}^{k-1} - 2v_{i,j}^{k-1} + v_{i,j+1}^{k-1})}{h_y^2} - \frac{h_y^2}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}^{k-1}}{\partial y^4} - \frac{h_y^4}{360} \frac{\partial^6 v_{i,j}^{k-1}}{\partial y^6} - \frac{h_y^6}{20160} \frac{\partial^8 v_{i,j}^{k-1}}{\partial y^8} - \dots \right)
 \end{aligned}$$

onde  $\eta_2$  é um parâmetro de ponderação. A FIGURA 6 ilustra os pontos utilizados para calcular  $v$ , no tempo  $k$ , nas coordenadas espaciais  $i$  e  $j$ .

FIGURA 6 – ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO PARA A MALHA 2D.



FONTE: Autor (2022).

Reordenando os termos da Eq. (2.63) e admitindo que  $h_2 = h_x = h_y$  obtém-se

$$v_{i,j}^{k-1} - 2v_{i,j}^k + v_{i,j}^{k+1} = \frac{\alpha_2^2 \tau_2^2}{h_2^2} \left[ \eta_2 (v_{i-1,j}^{k+1} + v_{i,j-1}^{k+1} - 4v_{i,j}^{k+1} + v_{i+1,j}^{k+1} + v_{i,j+1}^{k+1}) + (1 - 2\eta_2) \right. \quad (2.64)$$

$$\left. (v_{i-1,j}^k + v_{i,j-1}^k - 4v_{i,j}^k + v_{i+1,j}^k + v_{i,j+1}^k) + \eta_2 (v_{i-1,j}^{k-1} + v_{i,j-1}^{k-1} - 4v_{i,j}^{k-1} + v_{i+1,j}^{k-1} + v_{i,j+1}^{k-1}) \right],$$

com erro de truncamento de ordem  $O(h_x^2 \tau_2^2, h_y^2 \tau_2^2, \tau_2^4)$ , dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{2D} = & + \frac{\tau_2^4}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}}{\partial t^4} + \dots - \frac{\alpha_2^2 \tau_2^2 h_x^2 \eta_2}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}^{k+1}}{\partial x^4} - \dots - \frac{\alpha_2^2 \tau_2^2 h_x^2}{12} (1 - 2\eta_2) \frac{\partial^4 v_{i,j}^k}{\partial x^4} - \dots \quad (2.65) \\ & - \frac{\alpha_2^2 \tau_2^2 h_y^2 \eta_2}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}^{k+1}}{\partial y^4} - \dots - \frac{\alpha_2^2 \tau_2^2 h_y^2}{12} (1 - 2\eta_2) \frac{\partial^4 v_{i,j}^k}{\partial y^4} - \dots \\ & - \frac{\alpha_2^2 \tau_2^2 h_y^2 \eta_2}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}^{k-1}}{\partial y^4} - \dots \end{aligned}$$

Assumindo que  $\lambda_2 = \frac{\alpha_2^2 \tau_2^2}{h_2^2}$ , tem-se o seguinte sistema de equações

$$a_{p2} v_{i,j}^{k+1} = a_{w2} v_{i-1,j}^{k+1} + a_{e2} v_{i+1,j}^{k+1} + a_{n2} v_{i,j+1}^{k+1} + a_{s2} v_{i,j-1}^{k+1} + b_{p2}, \quad (2.66)$$

onde

$$a_{p2} = 1 + 4\eta_2\lambda_2, \quad (2.67)$$

$$a_{w2} = a_{e2} = a_{s2} = a_{n2} = \eta_2\lambda_2, \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} b_{p2} = \lambda_2 \Big[ (1 - 2\eta_2)(v_{i-1,j}^k + v_{i+1,j}^k + v_{i,j-1}^k + v_{i,j+1}^k) + \eta_2(v_{i-1,j}^{k-1} + v_{i+1,j}^{k-1} \\ + v_{i,j-1}^{k-1} + v_{i,j+1}^{k-1}) \Big] + (2 - 4\lambda_2 + 8\eta_2\lambda_2)v_{i,j}^k + (-1 - 4\eta_2\lambda_2)v_{i,j}^{k-1}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Para iniciar o processo iterativo é necessário conhecer a solução em dois passos de tempo anteriores  $v_{i,j}^0$  e  $v_{i,j}^1$ . Onde  $v_{i,j}^0$  é dado pela configuração inicial e  $v_{i,j}^1$  é calculado com a Eq. (2.70) (BURDEN; FAIRES, 2016)

$$\begin{aligned} v_{i,j}^1 = (1 - \lambda_2)f_2(x_i, y_j) + \frac{\lambda_2}{2}[f_2(x_i, y_{j+1}) + f_2(x_i, y_{j-1}) + f_2(x_{i-1}, y_j) \\ + f_2(x_{i+1}, y_j)] + \tau_2 g_2(x_i, y_j) + O(h_2^2). \end{aligned} \quad (2.70)$$



### 3 MÉTODO *MULTIGRID*

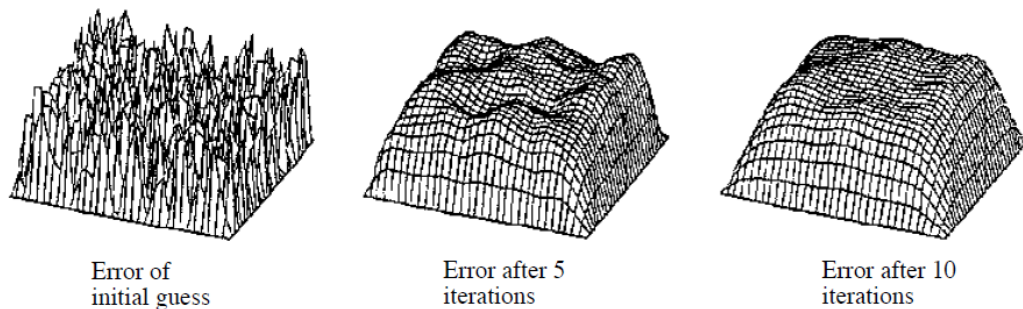
Uma forma de acelerar o processo de obtenção da solução do sistema de equações resultante da discretização é aplicar o método *Multigrid*, que melhora significativamente os fatores de convergência no processo de resolução de sistemas de equações (TROTTERBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2000; WIENANDS; OOSTERLEE, 2001). De acordo com Umetani, MacLachlan e Oosterlee (2009), Franco *et al.* (2018a), Gander, Kwok e Mandal (2020), a anisotropia relacionada aos fatores físicos e numéricos que é gerada para grandes valores de  $\alpha$  ( $\alpha$  sendo associado à velocidade de propagação da onda), pode ser um desafio na resolução da equação da onda.

Ao discretizar as equações matemáticas governantes, que modelam problemas físicos, obtém-se equações como as dadas pelas Eqs. (2.48) e (2.66) para a equação da onda 1D e 2D, respectivamente, tem-se sistemas lineares esparsos e de grande porte do tipo

$$Au = f. \quad (3.1)$$

Estes sistemas podem ser resolvidos usando métodos diretos ou iterativos. Devido às características destes sistemas, os métodos diretos tornam-se inviáveis, já geram um alto custo computacional. Neste caso, optam-se pelos métodos iterativos, que possuem um custo computacional muito mais aceitável (BURDEN; FAIRES, 2016). Entretanto, tais métodos (aqui denominados de *solvers*) possuem boas propriedades de suavização no início do processo iterativo, mas ficam mais lentos à medida que mais iterações são realizadas (TROTTERBERG; CLEES, 2009; BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000). A seguir, na FIGURA 7 evidencia-se a influência das iterações com o *solver* Gauss-Seidel nas componentes de erro para o problema de Poisson.

FIGURA 7 – COMPORTAMENTO DAS COMPONENTES DE ERRO NO PROCESSO ITERATIVO.



FONTE: Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2000).

Depois de algumas iterações, o erro de aproximação torna-se suave, mas não necessariamente pequeno. Este problema é devido à característica dos métodos iterativos clássicos de suavizar rapidamente os erros de alta frequência (modos oscilatórios), deixando apenas os erros de baixa frequência (modos suaves) (WESSELING, 1992).

Neste contexto surge o método *Multigrid* (BRANDT, 1977), que é empregado para acelerar a convergência na obtenção da solução deste tipo de sistema, já que ao usar um conjunto de malhas é possível suavizar todas as componentes do erro, desde os modos oscilatórios até os suaves, isto porque os modos suaves nas malhas finas tornam-se mais oscilatórios em malhas mais grossas (HACKBUSCH, 1985; BRANDT; LIVNE, 2011; TROTTERBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2000). Essa abordagem permite que o processo iterativo do método *Multigrid* atue sempre nas componentes oscilatórias dos erros (WESSELING, 1992; ELMAN; ERNST; O'LEARY, 2001; TROTTERBERG; CLEES, 2009). O termo *Multigrid* vem em contraponto ao termo *Singlegrid*, que é o método clássico que usa apenas uma única malha.

Seja uma solução aproximada  $v_h$  para  $u$  em uma determinada malha fina  $\Omega^h$ . Pode-se reescrever o sistema de equações dado pela Eq. (3.1) como

$$A_h v_h = f_h. \quad (3.2)$$

A aplicação do *Multigrid* em duas malhas pode ser iniciada ao suavizar esse sistema, ou seja, tem-se um número reduzido de iterações  $\nu_1$  com um dado suavizador, como Gauss-Seidel por exemplo. Esta é a etapa de pré-suavização. Assim, pode-se calcular o resíduo  $r_h$  nesta malha com a expressão

$$r_h = f_h - A_h v_h. \quad (3.3)$$

Então, transfere-se esse resíduo para uma malha imediatamente mais grossa  $\Omega^{2h}$ . Para isso, usa-se um operador de restrição  $I_h^{2h}$ , como exemplo, injeção, meia ponderação ou ponderação completa (TROTTERBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2000). Assim, obtém-se a seguinte equação

$$A_{2h} e_{2h} = r_{2h}, \quad (3.4)$$

onde  $e_{2h}$  é o erro e  $A_{2h}$  o operador de malha grossa, que pode ser obtido por discretização. Em seguida, resolve-se o sistema de equações dado pela Eq. (3.4) e a sua solução é prolongada até a malha  $\Omega^h$ , por meio de um operador de prolongação  $I_{2h}^h$ . Então tem-se a correção na malha fina, dada por

$$v_h \leftarrow v_h + e_h. \quad (3.5)$$

Em seguida, suaviza-se com um número reduzido de vezes  $\nu_2$ , o sistema de equação dado pela Eq. (3.1). Esta etapa configura-se a pós-suavização. Para duas malhas resolve-se o sistema na malha imediatamente mais grossa. Ao usar mais do que duas malhas, os processos de pré-suavização e pós-suavização são aplicados em todas as malhas, exceto na malha mais grossa, onde resolve-se o problema.

O modo de percorrer os diversos níveis de malha denomina-se ciclo. Neste trabalho utilizam-se o ciclo V (ver a FIGURA 8 para o caso de 5 níveis de malha), apresentado a seguir. Mais detalhes podem ser encontrados em Briggs, Henson e McCormick (2000) e Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2000). Para um certo nível  $l$  na malha, o ciclo V pode ser representado pelo ALGORITMO 1.

---

**Algoritmo 1: CICLO V**


---

```

1 while Não atingir a malha mais grossa possível do
2   | Suavize  $\nu_1$  vezes o sistema de equações correspondente  $A_l v_l = f_l$ 
3   | Calcule e restrinja o resíduo para a malha imediatamente mais grossa
4 end
5 Resolva o sistema correspondente à malha mais grossa possível
6 while Não atingir a malha fina possível do
7   | prolongue a solução para a malha imediatamente mais fina
8   | Corrija a solução
9   | Suavize  $\nu_2$  vezes o sistema de equações correspondente na malha imediatamente
    | mais fina  $A_l v_l = f_l$ 
10 end

```

---

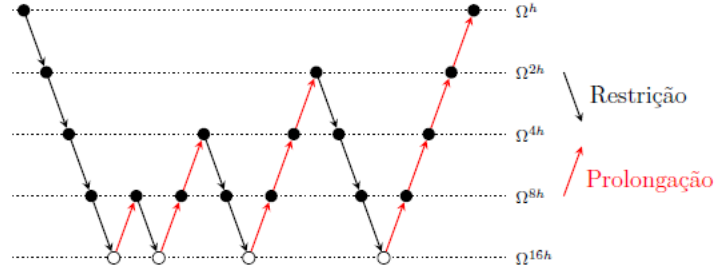
FIGURA 8 – CICLO V DO *MULTIGRID*, ONDE  $\bullet$  E  $\circ$  REPRESENTAM, RESPECTIVAMENTE, SUAVIZAÇÃO E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.



FONTE: O autor.

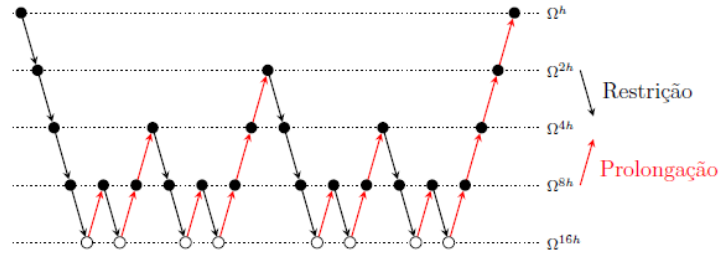
Tem-se também outras formas de se percorrer as malhas, como as ilustradas com o ciclo F (FIGURA 9) e ciclo W (FIGURA 10), ambos para o caso de 5 níveis de malha. Tais ciclos são mais robustos de acordo com o problema a ser resolvido (FRANCO *et al.*, 2018b).

FIGURA 9 – CICLO F DO *MULTIGRID*, ONDE  $\bullet$  E  $\circ$  REPRESENTAM, RESPECTIVAMENTE, SUAVIZAÇÃO E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.



FONTE: O autor.

FIGURA 10 – CICLO W DO *MULTIGRID*, ONDE  $\bullet$  E  $\circ$  REPRESENTAM, RESPECTIVAMENTE, SUAVIZAÇÃO E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.



FONTE: O autor.

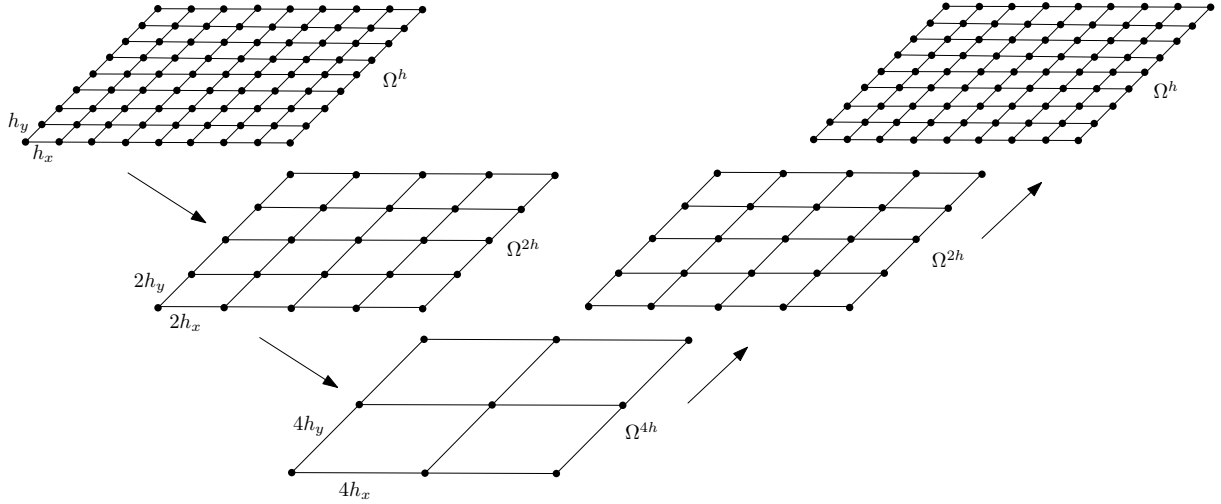
Neste trabalho utilizam-se os operadores de restrição ( $I_h^{2h}$ ) por ponderação completa (para o caso 1D dado pela Eq. (3.6)) e por meia ponderação (para o caso 2D dado pela Eq. (3.7)). Esta escolha baseia-se na fácil implementação e por excelentes resultados obtidos na literatura (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000; GASPAR *et al.*, 2007; FALGOUT *et al.*, 2017).

$$r_{2h}(x_i) = I_h^{2h} r_h(x_i) = \frac{1}{4} [2r_h(x_i) + r_h(x_{i+1}) + r_h(x_{i-1})], \quad (3.6)$$

$$r_{2h}(x_i, y_j) = I_h^{2h} r_h(x_i, y_j) = \frac{1}{8} [4r_h(x_i, y_j) + r_h(x_{i+1}, y_j) + r_h(x_{i-1}, y_j) + r_h(x_i, y_{j+1}) + r_h(x_i, y_{j-1})]. \quad (3.7)$$

Neste caso, tem-se a razão de engrossamento padrão, com  $R_e = 2$  (TROTTEMBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2000), dada por  $R_e = H/h$ , com  $h$  e  $H$  sendo o espaçamento na malha fina e na malha imediatamente mais grossa, respectivamente. Ilustra-se este tipo de engrossamento na FIGURA 11 para o problema bidimensional, com  $h_x = h_y$  e 3 níveis de malha.

FIGURA 11 – MALHAS UNIFORMES COM RAZÃO DE ENGROSSAMENTO  $R_e = 2$ .



FONTE: O autor.

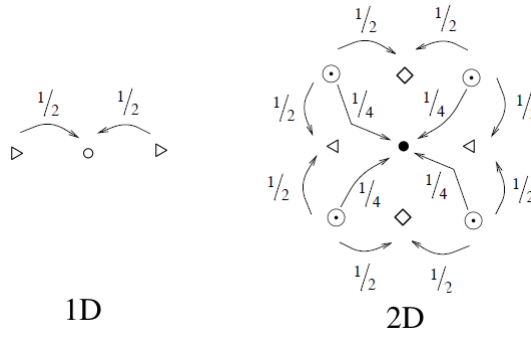
Utilizam-se neste trabalho os operadores de prolongação ( $I_{2h}^h$ ) por interpolação linear (para o caso 1D dado pela Eq. (3.8)) e por interpolação bilinear (para o caso 2D dado pela Eq. (3.9)). Esta escolha baseia-se pela fácil implementação e por excelentes resultados encontrados na literatura Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2000), Dehghan e Mohebbi (2008), Trottenberg e Clees (2009).

$$v_h(x_i) = I_{2h}^h v_h(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}[v_{2h}(x_{i-1}) + v_{2h}(x_{i+1})], & \text{para } \circ \\ v_{2h}(x_i), & \text{para } \triangleright \end{cases}, \quad (3.8)$$

$$v_h(x_i, y_j) = I_{2h}^h v_h(x_i, y_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}[v_{2h}(x_{i-1}, y_j) + v_{2h}(x_{i+1}, y_j)], & \text{para } \diamond \\ \frac{1}{2}[v_{2h}(x_i, y_{j-1}) + v_{2h}(x_i, y_{j+1})], & \text{para } \triangleleft \\ \frac{1}{4}[v_{2h}(x_{i-1}, y_j) + v_{2h}(x_{i+1}, y_j) + v_{2h}(x_i, y_{j-1}) \\ + v_{2h}(x_i, y_{j+1})], & \text{para } \bullet \\ v_{2h}(x_i, y_j), & \text{para } \odot \end{cases}. \quad (3.9)$$

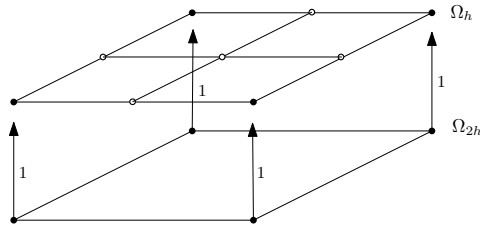
Na FIGURA 12 apresentam-se as ilustrações dos interpoladores das Eqs. (3.8) e (3.9) (TROTTEMBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2000). Onde observam-se os pontos  $\triangleright$  e  $\odot$  nas malhas fina  $\Omega^h$  e grossa  $\Omega^{2h}$ , já os pontos  $\circ$ ,  $\diamond$ ,  $\triangleleft$  e  $\bullet$  são vistos apenas na malha fina  $\Omega^h$ .

FIGURA 12 – INTERPOLAÇÃO LINEAR E BILINEAR.

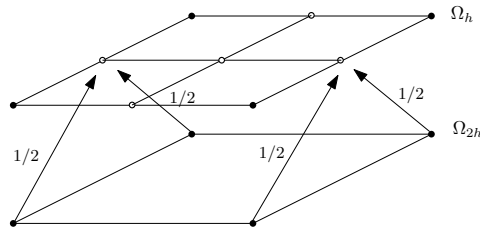


FONTE: Trottenberg e Clees (2009).

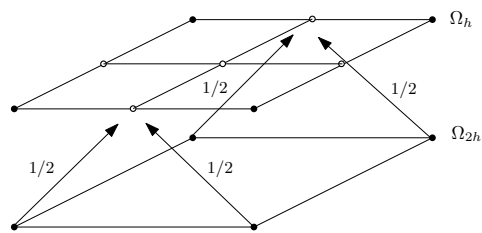
Para facilitar a compreensão da interpolação bidimensional dada na Eq. (3.9), pode-se observar as FIGURAS 13 a 16.

FIGURA 13 – INTERPOLAÇÃO DIRETA PARA  $\odot$ .

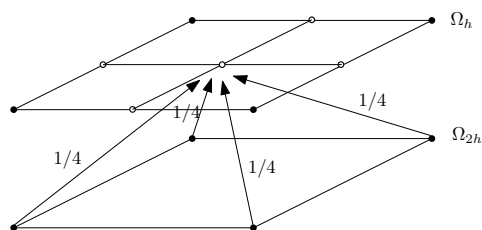
FONTE: O autor.

FIGURA 14 – INTERPOLAÇÃO LINEAR EM  $y$  PARA  $\diamond$ .

FONTE: O autor.

FIGURA 15 – INTERPOLAÇÃO LINEAR EM  $x$  PARA  $\triangleleft$ .

FONTE: O autor.

FIGURA 16 – INTERPOLAÇÃO BILINEAR PARA  $\bullet$ .

FONTE: O autor.

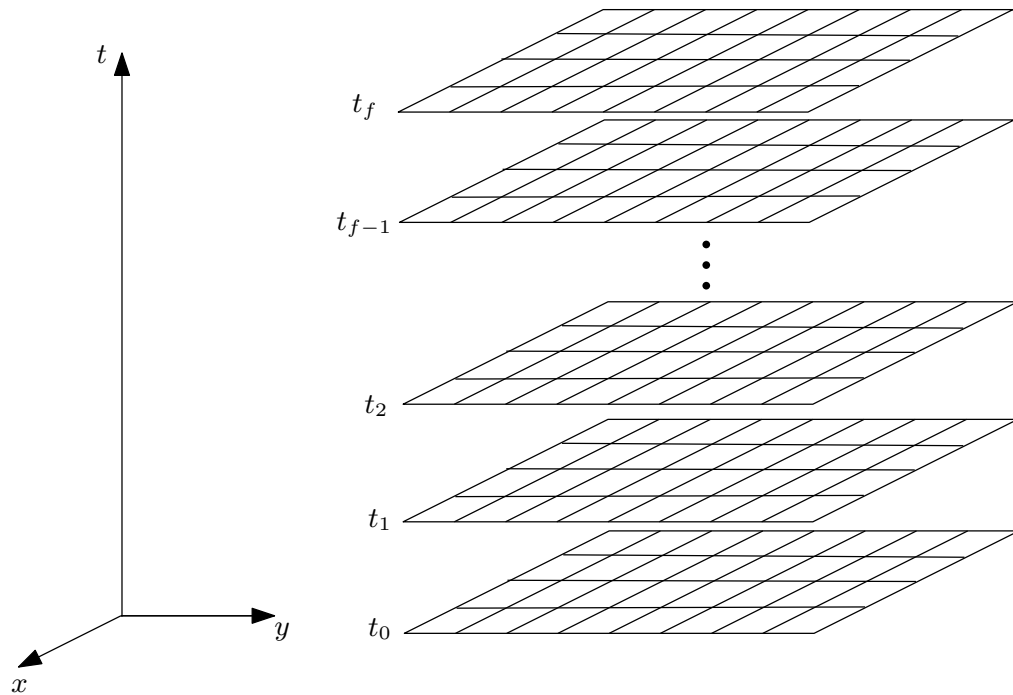
## 4 VARREDURAS NO TEMPO

Neste capítulo apresentam-se mais detalhes sobre os métodos de varreduras no tempo *Time-Stepping* e *Waveform Relaxation*, juntamente com seus respectivos algoritmos.

### 4.1 *Time-Stepping*

O método *Time-Stepping* é comumente usado para resolver numericamente problemas transientes. Neste método, a solução é calculada de forma sequencial para um conjunto de passos de tempos  $t_1, t_2, \dots, t_f$ , conforme a ilustração da FIGURA 17. Segundo Womble (1990) este processo gera algoritmos que podem ser explícitos ou implícitos (de acordo com a discretização temporal).

FIGURA 17 – PROCESSO DE ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS PELO MÉTODO *TIME-STEPPING*.



FONTE: O autor.

Ao solucionar o sistema discretizado a cada passo de tempo, utiliza-se a solução do passo de tempo anterior como estimativa inicial para obter as aproximações do sistema de equações no passo de tempo atual (VANDEWALLE, 2013). Representa-se abaixo este processo com o ALGORITMO 2.



---

**Algoritmo 2: MÉTODO *TIME-STEPPING* COM *SINGLEGRID***


---

```

1 Dados do problema, configuração inicial e condições de contorno
2 for  $k = 1 : N_t$  do
3   | while Não atingir um critério de parada do
4   |   | Suavize o sistema de equações correspondente ao passo de tempo  $k$ 
5   | end
6 end

```

---

Para algoritmos explícitos, a solução em cada ponto no espaço depende apenas das soluções de tempos anteriores, que são conhecidas. Assim, é possível obter o paralelismo no espaço, porque a solução em cada ponto pode ser calculada de forma independente. Porém, existe um grande problema nesse tipo de método quando se avalia sua estabilidade em relação ao tamanho do intervalo de tempo (BURDEN; FAIRES, 2016).

No caso de algoritmos implícitos, a solução em um ponto depende das soluções em outros pontos no mesmo tempo, que são desconhecidos (WOMBLE, 1990). Embora os métodos implícitos não possuam as mesmas restrições em relação ao tamanho do passo de tempo que os métodos explícitos, ao aplicar o *Time-Stepping*, o grau de paralelismo no espaço é o mesmo que o dos métodos explícitos.

Em cada passo de tempo resolve-se um problema classificado como elíptico, onde o método *Multigrid* é comprovadamente eficiente (WESSELING, 1992; BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000; TROTTERBERG; CLEES, 2009). Para tal, todas as malhas são discretizadas apenas nas variáveis espaciais, considerando-se cada passo de tempo fixo. De acordo com Franco (2017), na programação do método *Time-Stepping* é necessário fazer um laço externo de passos de tempo até o número de passos de tempo total, e um laço interno para as variáveis espaciais. Este processo pode ser visualizado no ALGORITMO 3.

---

**Algoritmo 3: MÉTODO *TIME-STEPPING* COM *MULTIGRID***


---

```

1 Dados do problema, configuração inicial e condições de contorno
2 for  $k = 1 : N_t$  do
3   | while Não atingir um critério de parada do
4   |   | Realize um ciclo Multigrid para o sistema de equações correspondente ao
4   |   |   | tempo  $k$ 
5   | end
6 end

```

---

## 4.2 *Waveform Relaxation*

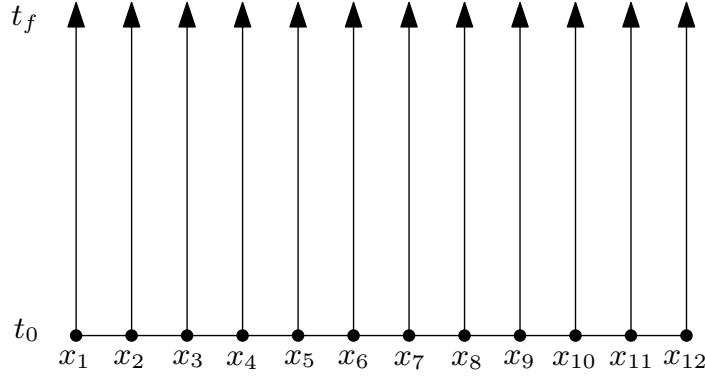
O *Waveform Relaxation* foi inicialmente proposto para resolver grandes sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) (LELARASMEE; RUEHLI; VINCENTELLI, 1982), como um método iterativo que também pode ser aplicado em EDPs dependentes do tempo, onde o domínio espacial é decomposto por um conjunto de pontos, e para cada um deles resolve-se um sistema de EDOs em todas as etapas do tempo (GANDER, 1996; FRANCO *et al.*, 2018b; LIU; JIANG, 2011; VANDEWALLE, 2013). Este método permite a realização de paralelização de algoritmos para PDEs transientes. De acordo com Vandewalle e Horton (1995) e Franco (2017), neste método as EDPs são transformadas em um sistema de EDOs para o problema unidimensional, na forma

$$\frac{d^2 v_i}{dt^2} = G_i(v_i, t), \quad (4.1)$$

onde calcula-se  $G_i$  para os valores de  $v_i$ , que contém informações do tempo para cada posição espacial  $i$ . Assim para cada nó  $x_i$  da discretização espacial resolve-se um sistema de EDOs temporal e percorrendo todos os tempos. Cada componente do sistema dado na Eq. (4.1) pode ser escrito como uma EDO, da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 v_1}{dt^2} = G_1(v_1, v_2, v_3, \dots, v_d, t), \quad \text{com } v_1(0) = v_1^0 \text{ e } \frac{dv_1}{dt} = g_1^0 \\ \frac{d^2 v_2}{dt^2} = G_2(v_1, v_2, v_3, \dots, v_d, t), \quad \text{com } v_2(0) = v_2^0 \text{ e } \frac{dv_2}{dt} = g_2^0, \\ \vdots \\ \frac{d^2 v_d}{dt^2} = G_d(v_1, v_2, v_3, \dots, v_d, t), \quad \text{com } v_d(0) = v_d^0 \text{ e } \frac{dv_d}{dt} = g_d^0 \end{array} \right. , \quad (4.2)$$

em que  $d$  é a dimensão do sistema e as notações  $v_i(0) = v_i^0$  e  $\frac{dv_i}{dt} = g_i^0$  com  $1 \leq i \leq d$ , indica respectivamente, as configurações e as velocidades iniciais ( $t = 0$ ) para cada ponto da discretização espacial. Como ilustrado na FIGURA 18 para o caso 1D, onde  $d = 12$ .

FIGURA 18 – PROCESSO DE ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM O MÉTODO *WAVEFORM RELAXATION* - 1D.

FONTE: O autor.

Cada EDO temporal deve ser resolvido em todos os nós espaciais separadamente, onde a atualização das incógnitas pode ser realizada no final de um ciclo *Waveform Relaxation*. Assim, tem-se um método iterativo para repetir o procedimento até ser atingido um critério de parada (CROW; ILIC, 1990). Pode-se obter um método totalmente paralelizável no espaço utilizando um esquema com *solver* que também permite a paralelização, tal como Gauss-Seidel *red-black* (GSRB) (VANDEWALLE, 2013).

Ao resolver a EDO temporal em todos os nós espaciais, diz-se que foi realizado um ciclo *Waveform Relaxation*, como ilustrado a seguir no ALGORITMO 4 para a FIGURA 18.

---

**Algoritmo 4:** MÉTODO *WAVEFORM RELAXATION* COM *SINGLEGRID*


---

```

1  Dados do problema, configuração inicial e condições de contorno
2  while Não atingir um critério de parada do
3      for  $i = 2 : N_x - 1$  do
4          Resolva a EDO discretizada correspondente ao ponto  $x_i$  do sistema de
            Eqs. (4.2)
5      end
6  end

```

---

Pode-se combinar o método *Waveform Relaxation* com *Multigrid*, ao realizar o engrossamento somente na direção espacial, devido ao *Waveform Relaxation* ser contínuo no tempo, assim o número de pontos da discretização temporal é mantido constante (VANDEWALLE, 2013). Por exemplo, no caso 1D, a malha fina  $\Omega^h$  tem  $33 \times 33$  pontos, com  $N_x \times N_t$  e as malhas mais grossas, com razão de engrossamento  $R_e = 2$ , são  $\Omega^{2h}$ ,  $\Omega^{4h}$ ,  $\Omega^{8h}$  e  $\Omega^{16h}$ , tendo respectivamente,  $17 \times 33$ ,  $9 \times 33$ ,  $5 \times 33$  e  $3 \times 33$  pontos. Como ilustrado no ALGORITMO 5.

**Algoritmo 5: MÉTODO WAVEFORM RELAXATION COM MULTIGRID**


---

```

1 Dados do problema, configuração inicial e condições de contorno
2 while Não atingir um critério de parada do
3   | Realize um ciclo Multigrid considerando engrossamento apenas na direção
   |   espacial em todos os passos de tempo. Para o processo de suavização, em cada
   |   nível de malha, use o método descrito no ALGORITMO 4.
4 end

```

---

O ALGORITMO 5 pode ser apresentado de forma mais detalhada no ALGORITMO 6, presente em (FRANCO *et al.*, 2018b), para a solução do sistema  $A_h(t)v_h(t) = f_h(t)$ .

**Algoritmo 6: WAVEFORM RELAXATION COM MULTIGRID (WRMG):**


---


$$v_h^k(t) \rightarrow v_h^{k+1}(t)$$


---

```

1 if Estiver no nível mais grosseiro da malha (com o tamanho da malha espacial
   | dado por  $h_0$ ) then
2   |  $A_{h_0}(t)v_{h_0}^{k+1}(t) = f_{h_0}(t)$  Resolva de forma direta.
3 else
4   |  $\bar{v}_h^k(t) = S_h^{\nu_1}(u_h^k(t))$  Pré-suavização:  $\nu_1$  vezes com GSRB Waveform Relaxation
   |   (Presente no ALGORITMO 4).
5   |  $\bar{r}_h^k(t) = f_h(t) - A_h(t)\bar{v}_h^k(t)$  Calcule o resíduo.
6   |  $\bar{r}_{2h}^k(t) = I_h^{2h}\bar{r}_h^k(t)$  Restringir o resíduo.
7   |  $A_{2h}(t)\hat{e}_{2h}^k(t) = \bar{r}_{2h}^k(t)$ ,  $\hat{e}_{2h}^k(0) = 0$  Chama o ALGORITMO WRMG para a
   |   equação residual  $G_{2h}$ .
8   |  $\hat{e}_h^k(t) = I_{2h}^h\hat{e}_{2h}^k(t)$  Interpole a correção.
9   |  $\bar{v}_h^{k+1}(t) = \bar{v}_h^k(t) + \hat{e}_h^k(t)$  Calcule a nova aproximação.
10  |  $\bar{v}_h^k(t) = S_h^{\nu_2}(u_h^{k+1}(t))$  Pós-suavização:  $\nu_2$  vezes com GSRB Waveform Relaxation
   |   (Presente no ALGORITMO 4).
11 end

```

---

Para os problemas bidimensionais realiza-se uma extensão do Método *Waveform Relaxation*, onde reescreve-se a Eq. (4.1) como

$$\frac{d^2 v_{i,j}}{dt^2} = G_{i,j}(v_{i,j}, t), \quad (4.3)$$

onde  $G_{i,j}$  são vetores de funções que contém as informações temporais e espaciais para cada coordenada  $i$  e  $j$ , onde pretende-se calcular os valores das variáveis de interesse  $v_{i,j} = (v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,d}, v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,d}, \dots, v_{d,1}, v_{d,2}, \dots, v_{d,d})$ , onde  $d^2$  é a dimensão do sistema.

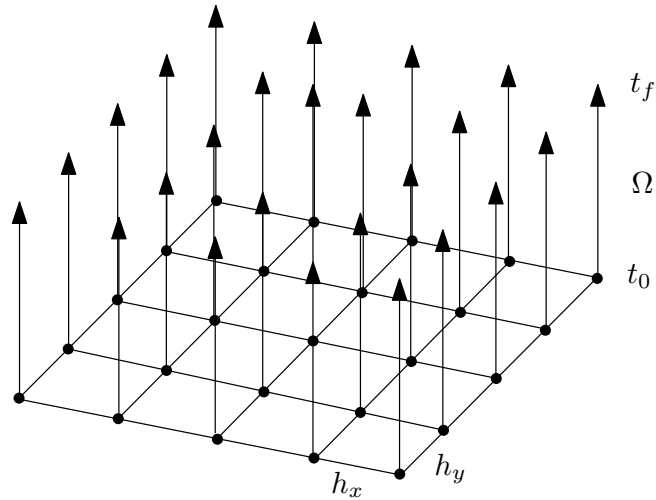
Assim, para cada nó  $x_{i,j}$  da discretização espacial, uma EDO temporal é resolvida

até ao tempo final de forma independente. Cada componente do sistema dado em Eq. (4.3) pode ser escrita como uma EDO, dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 v_{1,1}}{dt^2} = G_{1,1}(v_{1,1}, \dots, v_{1,d}, \dots, v_{d,d}, t), \quad \text{com } v_{1,1}(0) = v_{1,1}^0 \quad \text{e} \quad \frac{dv_{1,1}}{dt} = g_{1,1}^0 \\ \vdots \\ \frac{d^2 v_{1,d}}{dt^2} = G_{1,d}(v_{1,1}, \dots, v_{1,d}, \dots, v_{d,d}, t), \quad \text{com } v_{1,d}(0) = v_{1,d}^0 \quad \text{e} \quad \frac{dv_{1,d}}{dt} = g_{1,d}^0 \\ \vdots \\ \frac{d^2 v_{2,1}}{dt^2} = G_{2,1}(v_{1,1}, \dots, v_{1,d}, \dots, v_{d,d}, t), \quad \text{com } v_{2,1}(0) = v_{2,1}^0 \quad \text{e} \quad \frac{dv_{2,1}}{dt} = g_{2,1}^0 \\ \vdots \\ \frac{d^2 v_{2,d}}{dt^2} = G_{2,d}(v_{1,1}, \dots, v_{1,d}, \dots, v_{d,d}, t), \quad \text{com } v_{2,d}(0) = v_{2,d}^0 \quad \text{e} \quad \frac{dv_{2,d}}{dt} = g_{2,d}^0 \\ \vdots \\ \frac{d^2 v_{d,1}}{dt^2} = G_{d,1}(v_{1,1}, \dots, v_{1,d}, \dots, v_{d,d}, t), \quad \text{com } v_{d,1}(0) = v_{d,1}^0 \quad \text{e} \quad \frac{dv_{d,1}}{dt} = g_{d,1}^0 \\ \vdots \\ \frac{d^2 v_{d,d}}{dt^2} = G_{d,d}(v_{1,1}, \dots, v_{1,d}, \dots, v_{d,d}, t), \quad \text{com } v_{d,d}(0) = v_{d,d}^0 \quad \text{e} \quad \frac{dv_{d,d}}{dt} = g_{d,d}^0 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

onde  $1 \leq i, j \leq d$ , indicam respectivamente, as configurações iniciais e as velocidades, para cada ponto da discretização espacial. Cada linha do sistema de Eqs. (4.4) pode ser resolvida separadamente utilizando um núcleo para cada nó, como ilustrado na FIGURA 19.

FIGURA 19 – PROCESSO DE ATUALIZAÇÃO DAS INCÓGNITAS COM O MÉTODO *WAVEFORM RELAXATION* - 2D.



FONTE: O autor.

### 4.3 *Waveform Relaxation* e subdomínios

Em Gander, Kwok e Mandal (2020) tem-se uma variação do método *Waveform Relaxation*, que pode ser aplicado às EDPs, onde o domínio  $\Omega$  é dividido em  $K$  subdomínios espaciais, que podem ser resolvidos de forma independente até ao tempo final, o que permite a aplicação de estratégias paralelas. Ver FIGURA 20 para o caso unidimensional para  $K = 3$  e FIGURA 21 para o caso bidimensional com  $K = 4$ .

FIGURA 20 – DIVISÃO DO DOMÍNIO  $\Omega$  EM  $K = 3$  SUBDOMÍNIOS ESPACIAIS 1D.

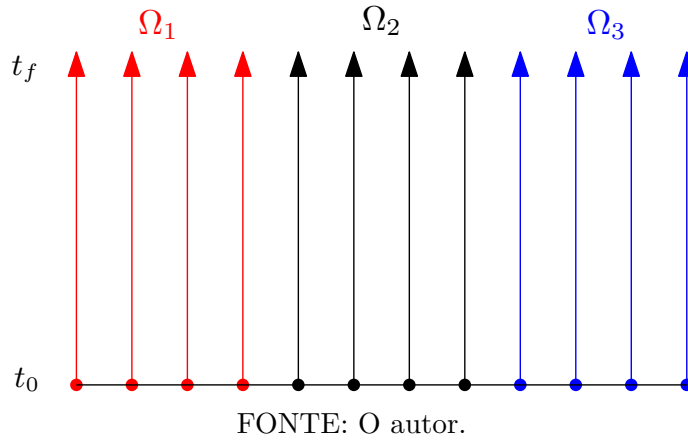
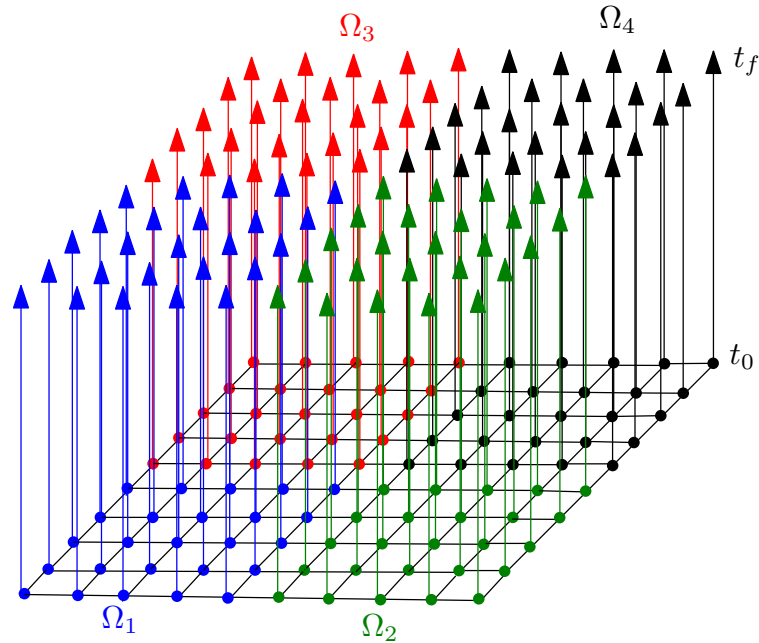
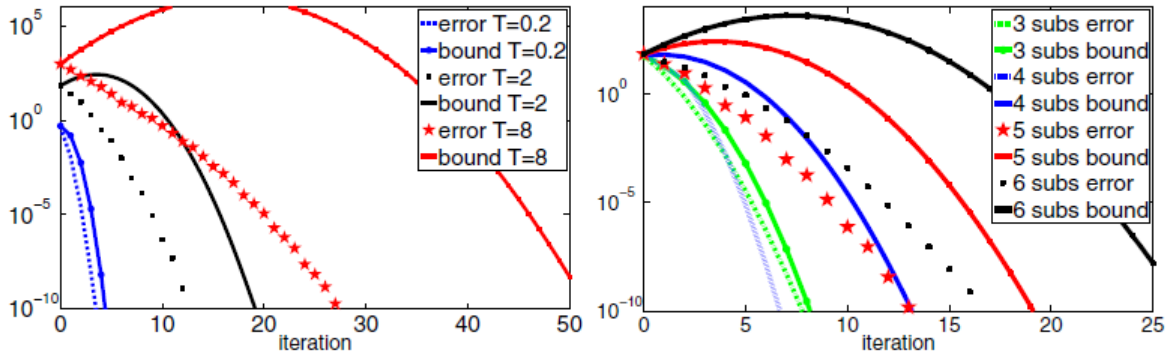


FIGURA 21 – DIVISÃO DO DOMÍNIO  $\Omega$  EM  $K = 4$  SUBDOMÍNIOS ESPACIAIS 2D.



Observa-se ainda que, em particular, para o caso abordado na FIGURA 20, o menor número de elementos possível em cada subdomínio ocorre quando cada um deles  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_K$  são respectivamente iguais aos pontos  $x_1, x_2, \dots, x_{N_x}$ . Neste caso tem-se o método *Waveform Relaxation* padrão. Em (GANDER; KWOK; MANDAL, 2020) e Gong *et al.* (2021) realiza-se um estudo para avaliar a estabilidade da utilização desta abordagem para equações do calor e para o problema de Helmholtz, bem como as formas de troca de informação entre os subdomínios. Observa-se que no início do processo iterativo, a convergência deste método é afetada negativamente, pois ocorrerem oscilações na solução aproximada. A medida que o processo iterativo avança, a solução converge para os valores desejados. Ver FIGURA 22, retirada de Gander, Kwok e Mandal (2020).

FIGURA 22 – ERRO PARA EQUAÇÃO DO CALOR 1D COM WAVEFORM RELAXATION USANDO O MÉTODO DOS SUBDOMÍNIOS ESPACIAIS.



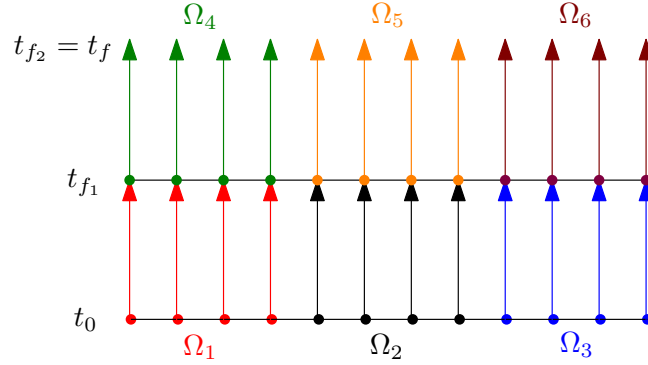
FONTE: (GANDER; KWOK; MANDAL, 2020).

Para caso abordado na FIGURA 22 em Gander, Kwok e Mandal (2020) demonstra-se as propriedades de convergência para o problema da transferência de calor unidimensional através do método chamado Dirichlet-Neumann *Waveform Relaxation*. Na figura da esquerda, os autores apresentaram o erro teórico (error) e o erro numérico (bound) obtidos com cinco subdomínios espaciais fixos e diferentes tempos finais ( $T$ , como usado na FIGURA 22). Na FIGURA 22 da direita, varia-se o número de subdomínios no espaço e o tempo final é fixado em  $T = 2s$ . Esses autores salientam ainda que as oscilações iniciais são maiores quando o tempo final é maior e/ou existem mais subdomínios no espaço. Aqui tem-se um grande desafio a ser superado: quanto maior o número de subdomínios no espaço, maior o grau de paralelização; no entanto, as oscilações no início do processo iterativo também serão amplificadas.

Uma outra abordagem é proposta em Ong e Mandal (2018) para problemas unidimensionais, onde, além da divisão em  $K$  subdomínios espaciais, existe também a divisão em  $J$  subdomínios temporais, gerando assim uma abordagem altamente paralelizável

(ver FIGURA 23 para o caso unidimensional). Este método é dado pelo ALGORITMO 6 que encontra-se na FIGURA 24.

FIGURA 23 – MÉTODO DOS SUBDOMÍNIOS NO ESPAÇO E NO TEMPO COM  $K = 3$  e  $J = 2$ .



FONTE: Autor (2022).

Note-se que a abordagem proposta em Gander, Kwok e Mandal (2020) é um caso específico da abordagem apresentada em Ong e Mandal (2018), quando tem-se  $J = 1$ .

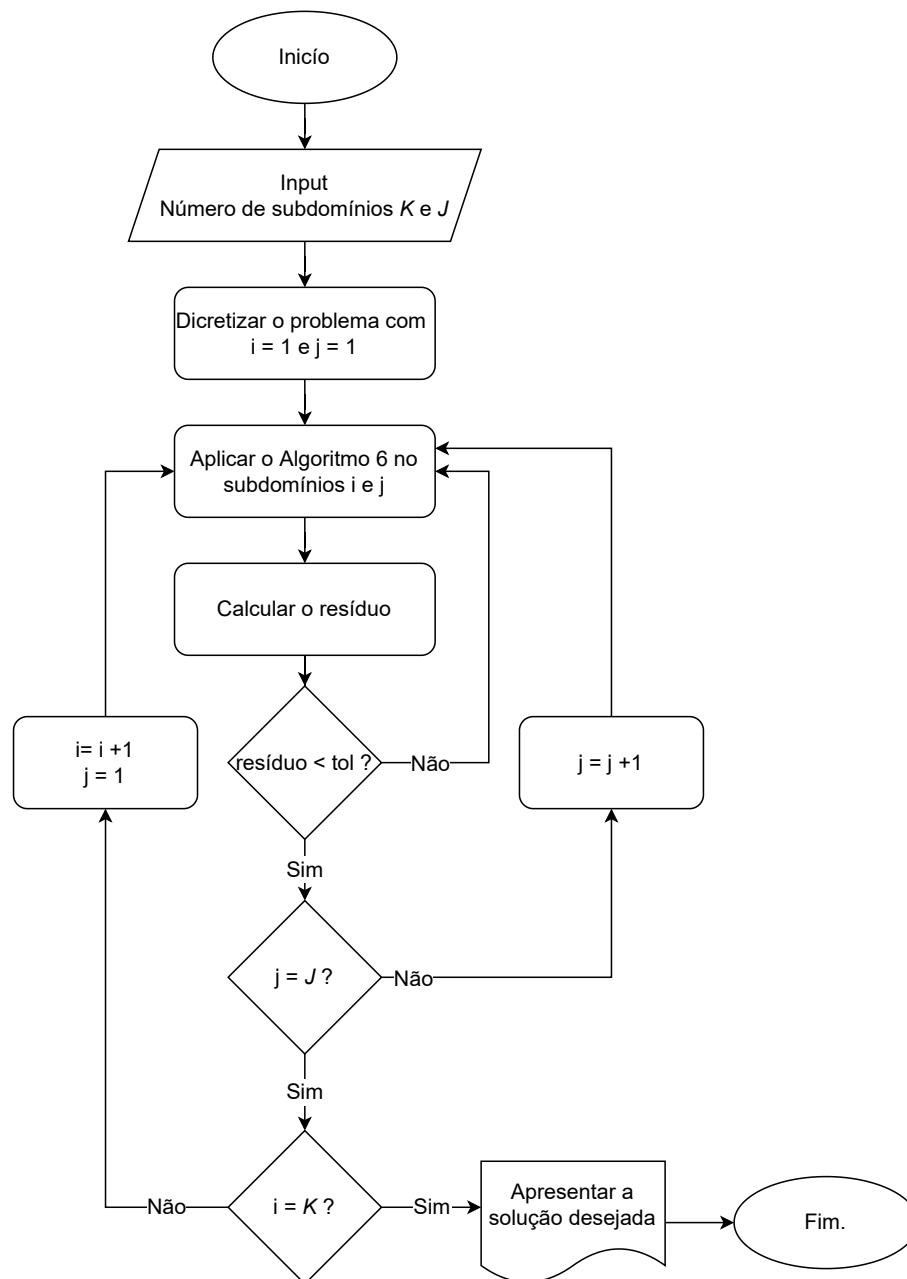
Neste trabalho, utiliza-se um método baseado na metodologia de Ong e Mandal (2018), porém adotando-se o número mínimo de subdomínios espaciais ( $K = 1$ ) e um número reduzido de subdomínios temporais  $J$  visando reduzir as oscilações no início do processo iterativo (ver FIGURA 25 para o problema bidimensional). Isto porque, ao utilizar-se subdomínios no espaço para resolver a equação da onda, pode-se ter um aumento nas perturbações iniciais geradas ao utilizar métodos paralelizáveis (GANDER; KWOK; MANDAL, 2020).

Na FIGURA 25, aplica-se o método *Waveform Relaxation* a fim de encontrar uma solução no primeiro subdomínio  $\Omega_1$ , que vai de  $t_0$  a  $t_{f_1}$  e até que se atinja um critério de parada pré-estabelecido. Neste trabalho o critério de parada escolhido utiliza a norma infinito do resíduo adimensionalizado. Em seguida, toma-se esta solução como estimativa inicial para o subdomínio  $\Omega_2$ , que vai de  $t_{f_1}$  a  $t_{f_2}$ , até que novamente se atinja o critério de parada. Este processo repete-se até que se alcance a solução desejada em  $t_f$ , que neste exemplo vai até  $t_{f_3} = t_f$ . Neste trabalho, propõe-se uma análise detalhada desta metodologia, e busca-se reduzir as oscilações no início do processo iterativo, para com isso, melhorar os indicadores associados aos métodos de varredura no tempo que são paralelizáveis. Para tal, analisam-se o efeito de parâmetros como intervalo de tempo e espaço, propriedades físicas da onda, número de subdomínios temporais, entre outros.

Soluções eficientes para a equação da onda unidimensional já se encontram na



FIGURA 24 – DIAGRAMA COM O ALGORITMO 6 PARA O MÉTODO *WAVEFORM RELAXATION* COM  $K$  SUBDOMÍNIOS NO ESPAÇO E  $J$  SUBDOMÍNIOS NO TEMPO.

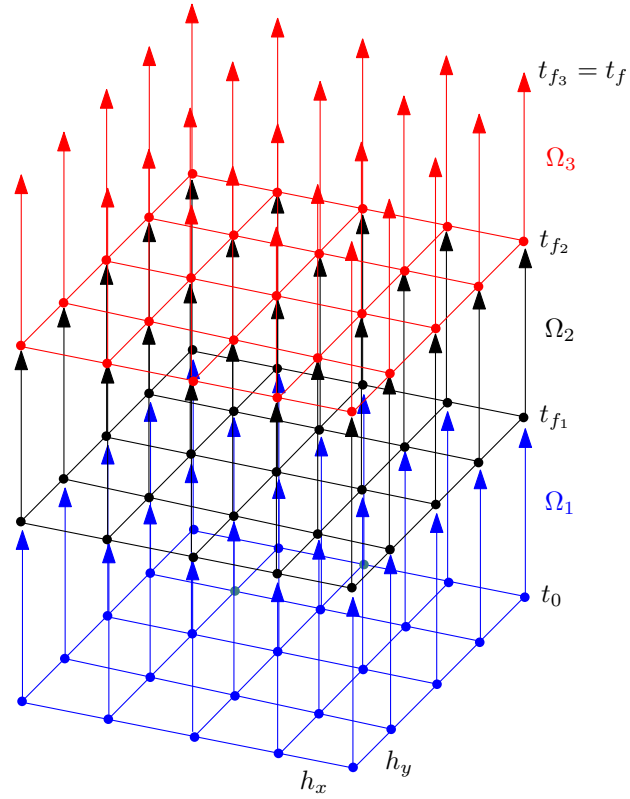


FONTE: O autor.

literatura, como em Baccouch e Temimi (2021) para os métodos de alta ordem e em Erbay, Erbay e Erkip (2021) para os casos não lineares. No entanto, ainda há desafios a serem resolvidos quando se emprega o método *Multigrid*, especialmente quando se combinam com esquemas que permitem a paralelização (GANDER; KWOK; MANDAL, 2020). Neste sentido, uma das principais contribuições deste trabalho concentra-se na utilização do método Subdomínios no Tempo, combinado com a estratégia *Waveform Relaxation* e o método *Multigrid*, a fim de reduzir as grandes perturbações iniciais existentes em Gander,

Kwok e Mandal (2020). Ao contrário do método originalmente proposto em Ong e Mandal (2018), aqui trabalha-se com um número reduzido de subdomínios no tempo, com o objetivo de reduzir o tempo de CPU e, ao mesmo tempo, aumentar o grau de paralelização dos códigos utilizados.

FIGURA 25 – MÉTODO DOS SUBDOMÍNIOS NO TEMPO COM  $K = 1$  e  $J = 3$ .



FONTE: O autor.

## 5 VERIFICAÇÃO DOS CÓDIGOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo abordam-se técnicas de verificação de código, a partir de simulações numéricas e análises *a posteriori* dos resultados encontrados com as formulações *Multigrid* e *Singlegrid*, usando o suavizador Gauss-Seidel com ordenação *red-black* (ADAMS *et al.*, 2003). Os testes foram realizados em um computador com processador Intel Corei3 1.5 GHz, 4 GB de RAM e sistema operacional Windows 10, com 64 bits e precisão dupla. Apesar das tabelas e figuras desta seção apresentarem resultados apenas para a varredura *Time-Stepping* sem subdomínios, os problemas 1D e 2D aqui apresentados foram resolvidos com as técnicas *Time-Stepping* e *Waveform Relaxation*, com e sem o método dos Subdomínios.

### 5.1 Problemas abordados

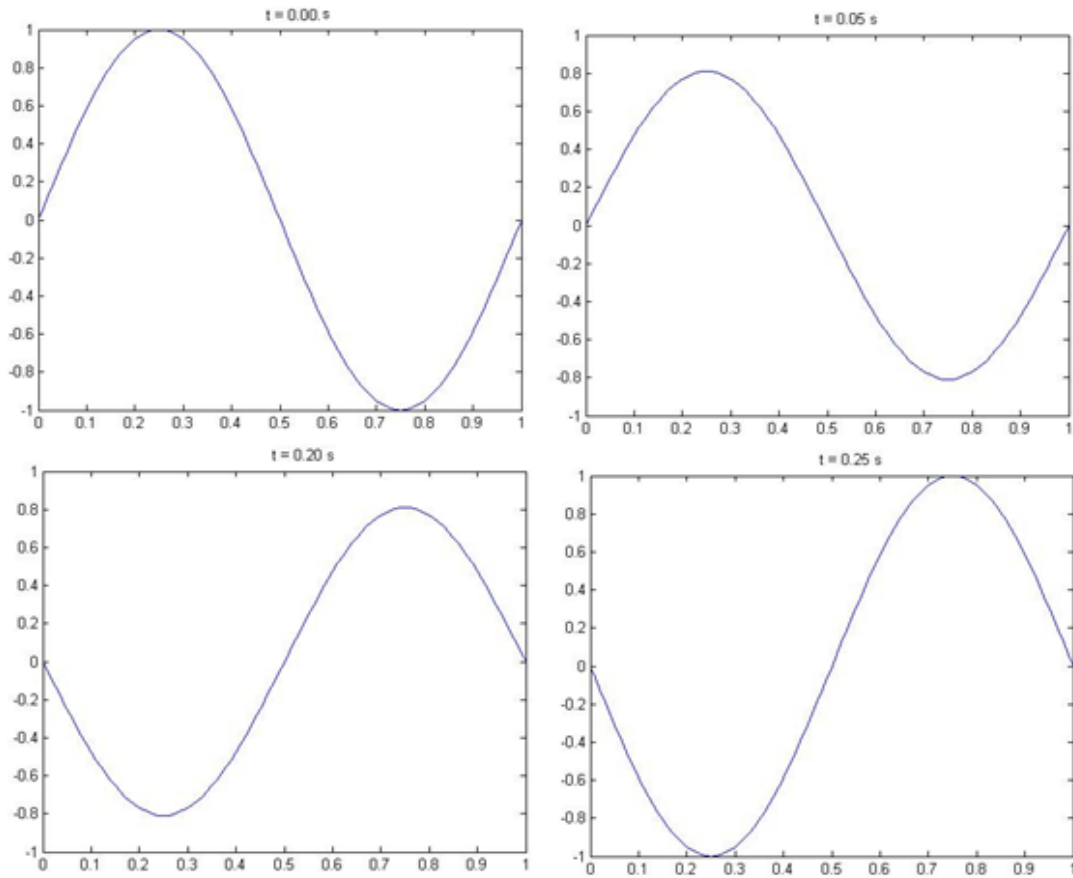
O problema 1D modelado pelas Eqs. (2.20) a (2.23), é resolvido admitindo-se  $\alpha_1 = 2$ , com a configuração inicial  $f_1(x) = \sin(\pi x)$ , velocidade inicial  $g_1(x) = 0$ , tempo final  $t_f = 1,0s$ , com  $x \in (0,1)$  (BURDEN; FAIRES, 2016) e parâmetro  $\eta_1 = 0,5$  (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013). Adota-se o mesmo número de pontos na discretização espacial e temporal, ou seja,  $N_x = N_t$ . O problema unidimensional de vibração de uma corda fixa nas extremidades pode ser ilustrado, para alguns valores de  $t$ , pela FIGURA 26 para  $N_x = N_t = 2^8 + 1$ .

O problema 2D modelado pelas Eqs. (2.29) a (2.32) é solucionado com  $\alpha_2 = 2$ , a configuração inicial  $f_2(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ , velocidade inicial  $g_2(x,y) = 0$ , tempo final  $t_f = 1,0s$ , com  $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$  (DEHGHAN; MOHEBBI, 2008) e parâmetro  $\eta_2 = 0,5$  (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013). Adota-se o mesmo número de pontos na discretização espacial e temporal  $N_x = N_y = N_t$ . A seguir ilustra-se o comportamento de uma membrana quadrangular, para alguns valores de  $t$  e mantendo as bordas fixas, na FIGURA 27 para  $N_x = N_y = N_t = 2^7 + 1$ .

### 5.2 Erro de discretização

O erro de discretização está associado ao tamanho dos elementos da malha utilizada, para efeito de verificação do comportamento desse tipo de erro, consideram-se inerentes os erros de discretização, iteração e arredondamento. Apresenta-se na TABELA 1 a norma infinito dos erros de discretização minimizando o erro de iteração. Para isso, em cada simulação ocorre até o erro de máquina; com precisão dupla. A seguir, apresenta-se a notação utilizada:  $N$  para o número de pontos em cada uma das direções  $x$ ,  $y$  e  $t$ ;  $E$  para erro de discretização;  $SG$  e  $MG$  para o uso dos métodos *Singlegrid* e *Multigrid*, respectivamente; e 1D e 2D para a dimensão do problema. No caso da primeira coluna da TABELA 1 os números de pontos são  $N = N_x = N_t$  e  $N = N_x = N_y = N_t$ , para o

FIGURA 26 – VIBRAÇÃO DE UMA CORDA FIXA NAS EXTREMIDADES.



FONTE: Autor (2022).

problema 1D e 2D, respectivamente.

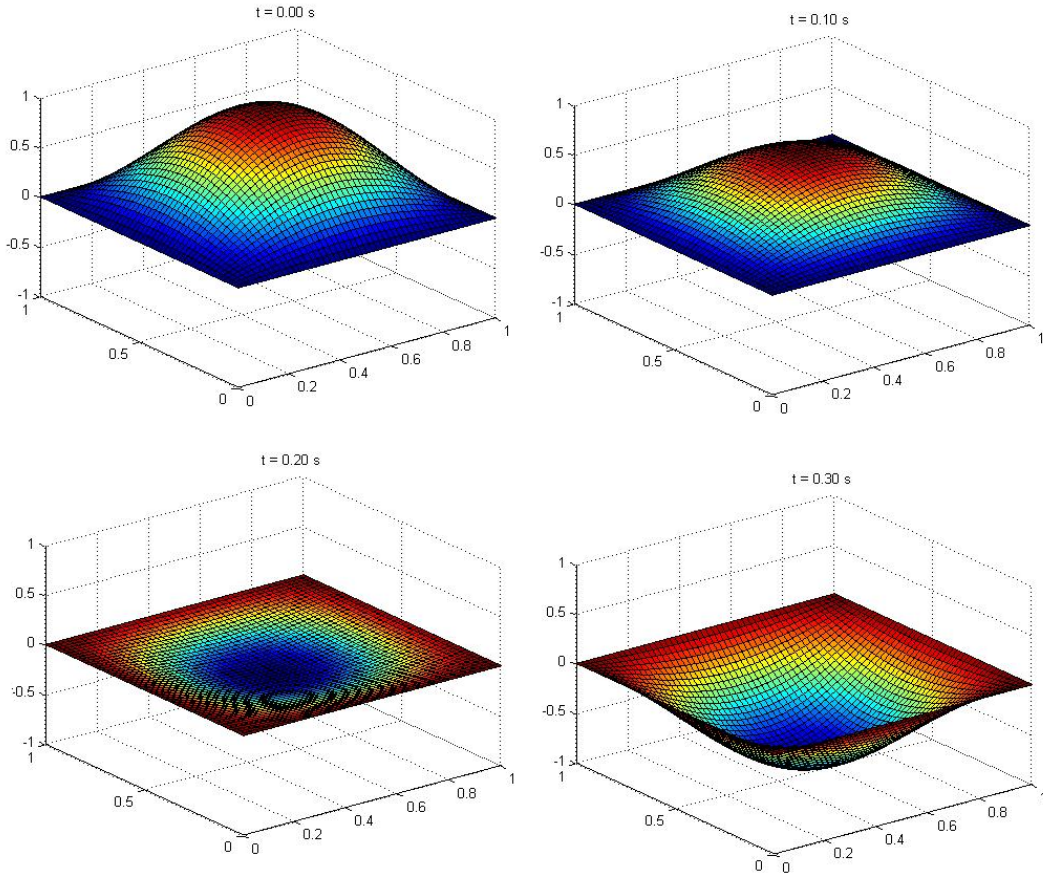
TABELA 1 – ERRO DE DISCRETIZAÇÃO PARA DIFERENTES NÚMEROS DE PONTOS

$N$	$\ E_{SG-1D}\ _{\infty}$	$\ E_{MG-1D}\ _{\infty}$	$\ E_{SG-2D}\ _{\infty}$	$\ E_{MG-2D}\ _{\infty}$
$2^3 + 1$	2,2247690E+00	2,2247690E+00	1,23215155E+00	1,23215155E+00
$2^4 + 1$	7,3045048E-01	7,3045048E-01	3,42788395E-01	3,42788395E-01
$2^5 + 1$	7,4352845E-02	7,4352845E-02	7,83783302E-02	7,83783302E-02
$2^6 + 1$	5,2713778E-03	5,2713778E-03	1,88555766E-02	1,88555766E-02
$2^7 + 1$	3,4245672E-04	3,4245672E-04	4,67832780E-03	4,67832780E-03
$2^8 + 1$	2,1705113E-05	2,1705113E-05	1,16979496E-03	1,16979496E-03
$2^9 + 1$	1,3643499E-06	1,3643496E-06	2,92791365E-04	2,92791376E-04

Verificou-se uma característica desejada nos processos de aproximação, para ambos os problemas 1D e 2D, já que o erro de discretização diminui a medida que a malha é

refinada. Nota-se que, independente de se usar o método *Multigrid* ou *Singlegrid*, o erro de discretização é praticamente o mesmo.

FIGURA 27 – VIBRAÇÃO DE UMA MEMBRANA FIXA NAS EXTREMIDADES.



FONTE: Autor (2022).

### 5.3 Ordens efetiva e aparente

A ordem das aproximações dos métodos numéricos pode ser verificada utilizando a ordem aparente  $P_U$  e a ordem efetiva  $P_E$  (MARCHI; SILVA, 2005; DEHGHAN; MOHEBBI, 2008). Utiliza-se aqui o estimador de Richardson baseado na ordem aparente do erro numérico, dada por

$$P_U = \frac{\log\left(\frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2}\right)}{\log(q)}, \quad (5.1)$$

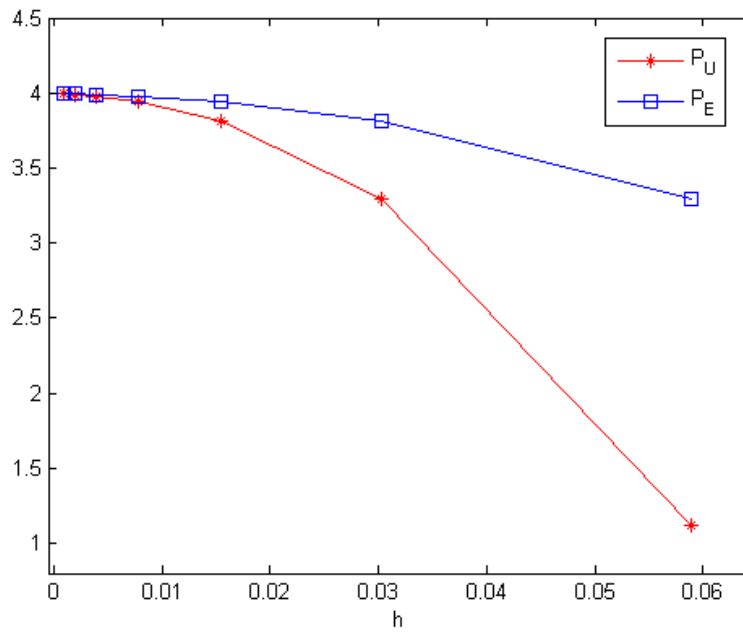
em que  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  indicam, respectivamente, as soluções nas malhas fina, grossa e super grossa, e  $q$  a razão de refino. Quando a solução analítica é conhecida, pode-se calcular  $P_E$

com

$$P_E = \frac{\log\left(\frac{E(\phi_2)}{E(\phi_1)}\right)}{\log(q)}, \quad (5.2)$$

em que  $E(\phi_2)$  e  $E(\phi_1)$  representam os erros na malha grossa e fina, respectivamente. A seguir encontram-se os valores das ordens aparente e efetiva com diferentes malhas para a equação da onda 1D e 2D, respectivamente, nas FIGURAS 28 e 29.

FIGURA 28 – ORDENS APARENTE E EFETIVA - 1D.

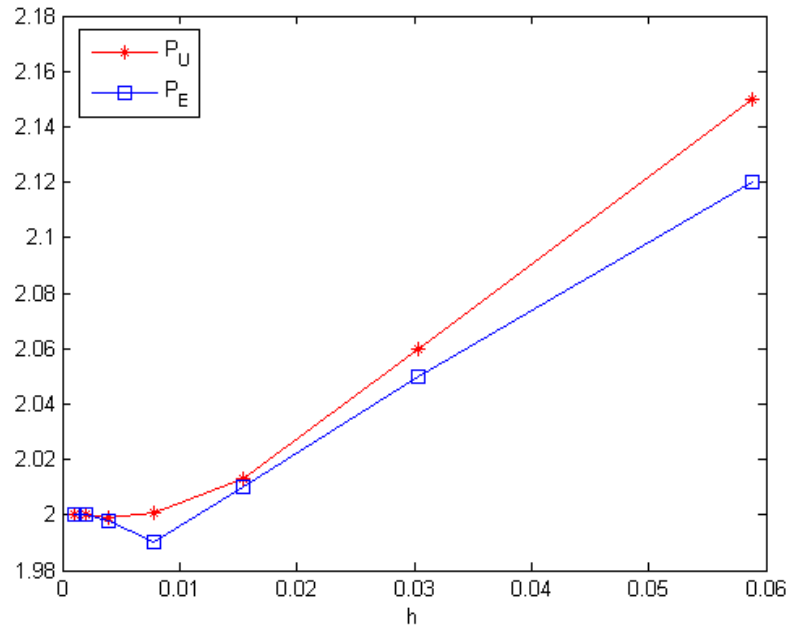


FONTE: Autor (2022).

Constata-se na FIGURA 28 que  $P_U$  e  $P_E$  tendem para 4,0, como apresentado em Cuminato e Meneguette (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013). Portanto, o modelo apresentado nas Eqs. (2.46) e (2.52), ambas de quarta ordem para  $\tau_1 = h_1$ , produz um método de quarta ordem no caso 1D, característica almejada nos métodos aproximados. No caso 2D, na FIGURA 29,  $P_U$  e  $P_E$  tendem para 2,0, pois a Eq. (2.64) é de quarta ordem para  $\tau_2 = h_x = h_y$ , mas a Eq. (2.70) é de segunda ordem, assim tem-se um método de segunda ordem. Estes resultados também podem ser confirmados com auxílio da TABELA 1.

Por exemplo, no caso 1D, para  $N = N_x = N_t = 2^7 + 1$  pontos, o erro é  $3,4245672E-04$  e diminuindo o tamanho de  $h_x$  pela metade, ou seja,  $N = 2^8 + 1$  pontos, o novo erro é  $2,1705113E-05$ , reduzindo cerca de 16 vezes. Mas para o caso 2D, diminuindo os tamanhos de  $h_x$  e  $h_y$  dos elementos pela metade, o novo erro é reduzido cerca de 4 vezes.

FIGURA 29 – ORDENS APARENTE E EFETIVA - 2D.



FONTE: Autor (2022).

Outra possibilidade é a utilização da solução analítica para a estimativa da condição inicial  $v_{i,j}^1$  no tempo  $t_2$ , nos problemas que tal solução analítica é conhecida. Neste sentido, alguns testes foram realizados, os quais produziram resultados para  $P_U$  e  $P_E$  semelhantes aos encontrados na FIGURA 29 com as estimativas dadas em Burden e Faires (2016).

Destaca-se ainda que os resultados finais obtidos nas verificações, tanto para erros quanto para ordens aparentes e efetivas, foram os mesmos para os métodos *Time-Stepping* e *Waveform Relaxation*, com e sem Subdomínios para ambos os casos 1D e 2D.

## 6 RESULTADOS

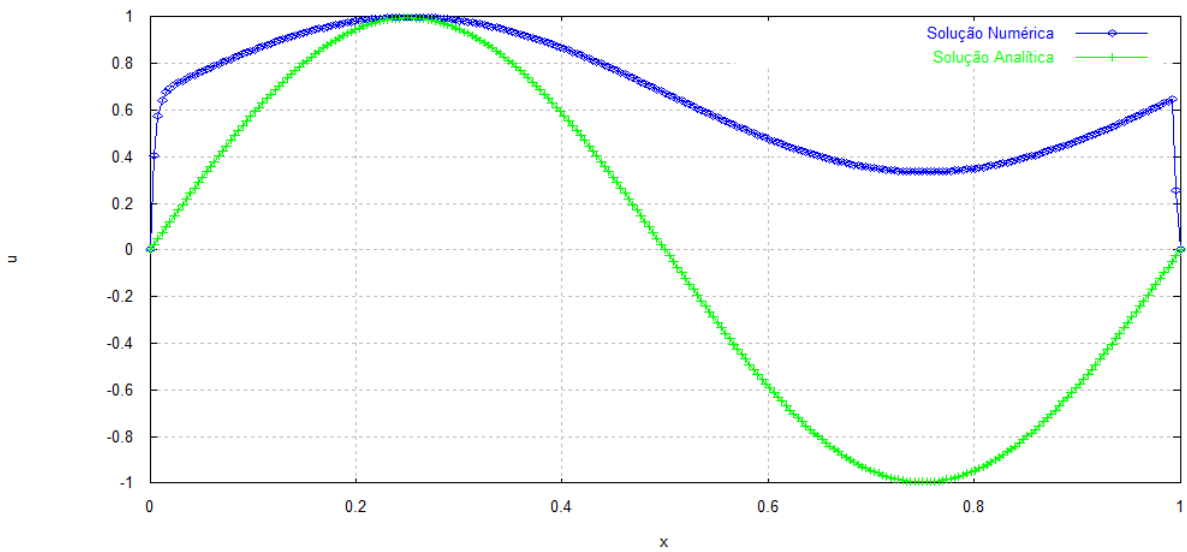
Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos com a implementação dos métodos *Time-Stepping* e *Waveform Relaxation* para os problemas 1D e 2D. Adotam-se o parâmetro  $\eta = \eta_1 = \eta_2 = 0,5$ , usando o ciclo  $V(\nu_1, \nu_2)$  com os valores de  $\nu_1 = \nu_2 = 2$  e  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 2$ . A solução do sistema de equações, resultante da discretização com o MDF ponderado, é realizada com *Singlegrid* e *Multigrid*, com o *solver* Gauss-Seidel com ordenação lexicográfica. No caso do *Multigrid*, todos os níveis de malha são percorridos, ou seja, assumem-se o número máximo de níveis de malha. Adota-se o critério de parada  $\|r^{it}\|_\infty / \|r^0\|_\infty < 10^{-9}$ , onde  $r^{it}$  e  $r^0$  são os resíduos gerados na iteração atual e na estimativa inicial, respectivamente.

### 6.1 Método *Time-Stepping* (TS) - 1D e 2D

#### 6.1.1 Solução aproximada

A seguir apresentam-se os resultados para o problema modelado pela equação da onda 1D, definido pelas Eqs. (2.20) a (2.23), usando o método *Time-Stepping* para o método *Singlegrid*, com  $t_f = 1s$ , com  $x \in (0,1)$ ,  $N_x = N_t = 2^8 + 1$  pontos, para verificar o comportamento da solução ao longo do processo iterativo. Nas FIGURAS 30, 31, 32, respectivamente para 1, 5 e 25 iterações, todas no segundo passo de tempo  $k = 2$ .

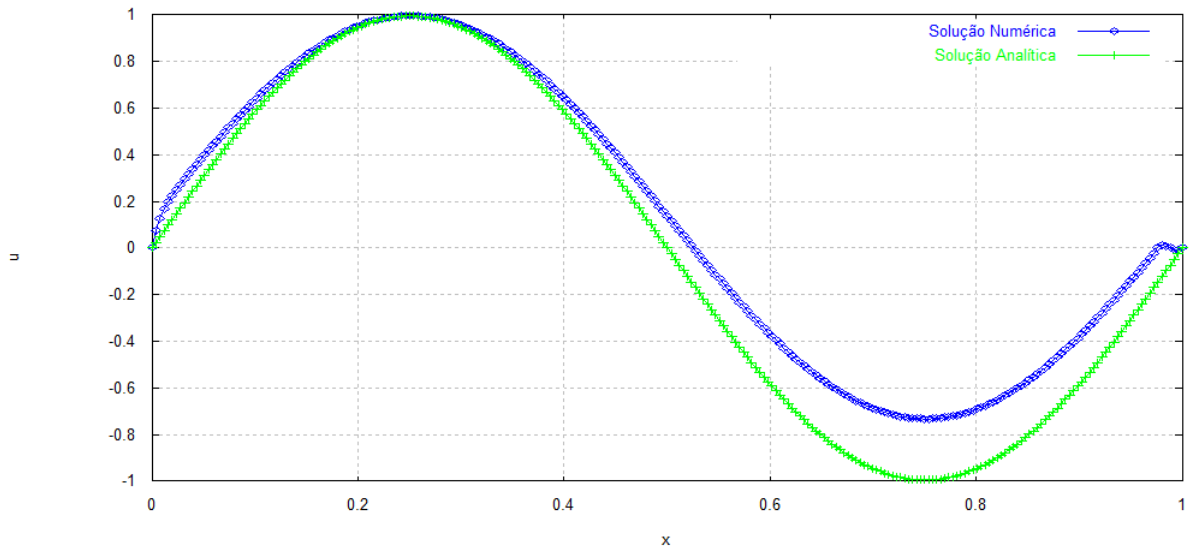
FIGURA 30 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 1 ITERAÇÃO DO *SINGLEGRID* COM *TIME-STEPPING* - 1D.



FONTE: Autor (2022).

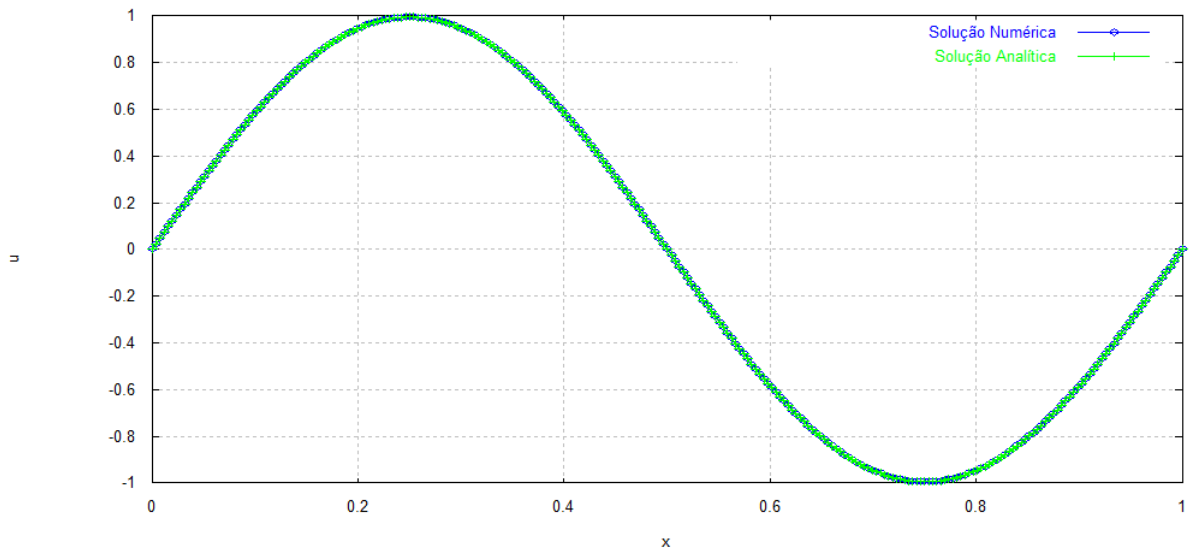


FIGURA 31 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 5 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *TIME-STEPPING* - 1D.



FONTE: Autor (2022).

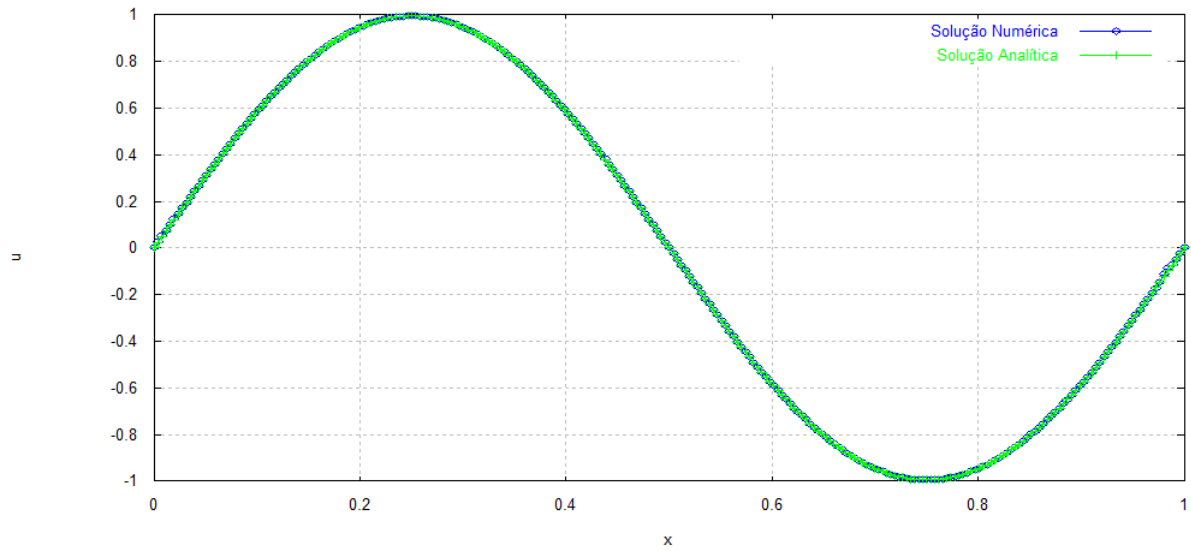
FIGURA 32 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 25 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *TIME-STEPPING* - 1D.



FONTE: Autor (2022).

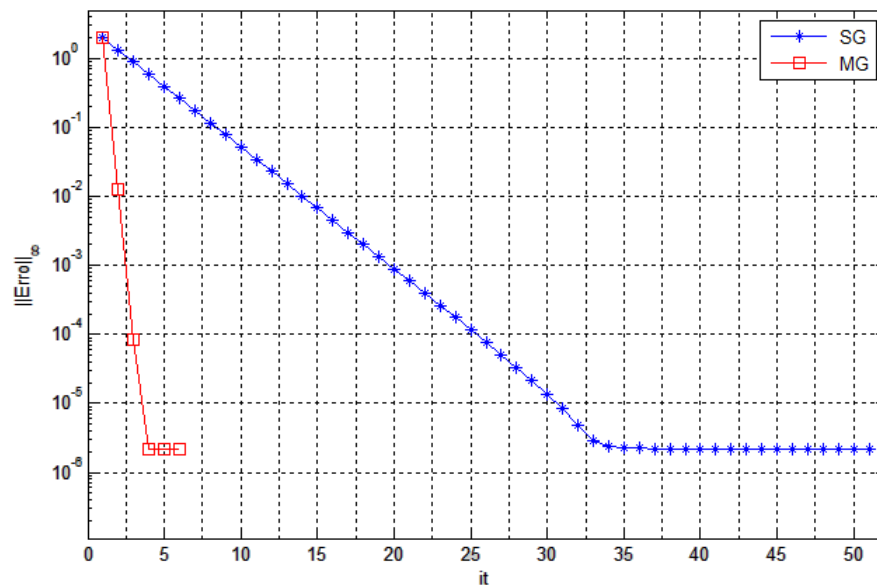
Verifica-se que com algumas iterações do método *Singlegrid*, a solução aproximada tende para a solução analítica. Ao realizar um ciclo  $V(2,2)$  do *Multigrid* a solução aproximada já se encontra relativamente próxima da solução analítica (ver FIGURA 33).

A convergência da solução aproximada pode ser vista graficamente na FIGURA 34, onde o erro é apresentado em relação ao número de iterações (it) para o *Singlegrid* (SG) e *Multigrid* (MG). Deve-se frisar que cada ciclo MG realiza quatro iterações no sistema

FIGURA 33 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 1 ITERAÇÃO DO *MULTIGRID* COM *TIME-STEPPING* - 1D.

FONTE: Autor (2022).

original, ou seja, na malha fina; as demais iterações nas malhas mais grossas são realizadas na equação residual.

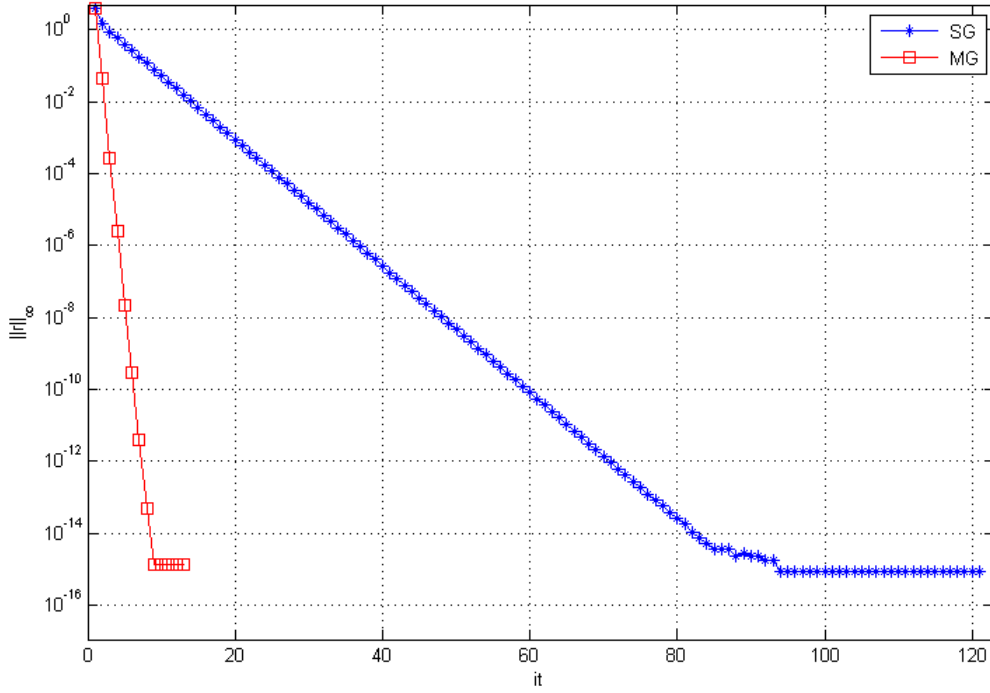
FIGURA 34 – ERRO *VERSUS* ITERAÇÕES COM *SINGLEGRID* E *MULTIGRID* - *TIME-STEPPING* - 1D.

FONTE: Autor (2022).

Verifica-se a existência de um valor limite para o erro a medida que as iterações

vão sendo realizadas, isso está associado ao erro de discretização da malha utilizada. Porém, o resíduo continua diminuindo até atingir o erro de máquina, a medida que as iterações são realizadas com o *Singlegrid* e *Multigrid* (ver FIGURA 35).

FIGURA 35 – RESÍDUO *VERSUS* ITERAÇÕES COM *SINGLEGRID* E *MULTIGRID* - *TIME-STEPPING*.



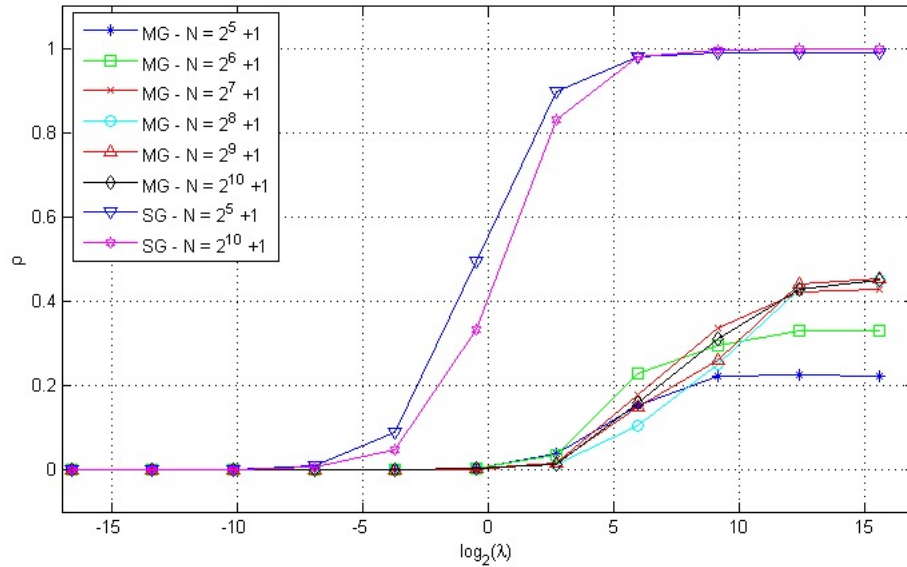
FONTE: Autor (2022).

### 6.1.2 Fator de convergência

Com o objetivo de verificar quais os intervalos e os valores das variáveis utilizadas nos cálculos, consideram-se o parâmetro  $\lambda = \alpha^2 \frac{\tau^2}{h^2}$ , e o fator de convergência  $\rho$ , em que  $\rho = \|r^{it}\|_\infty / \|r^{it-1}\|_\infty$ , com  $r^{it}$  e  $r^{it-1}$  sendo os resíduos gerados na iteração atual e na iteração anterior, respectivamente. Sabe-se que  $\rho \approx 0$  determina métodos mais eficientes, enquanto que  $\rho \approx 1$ , significa o contrário (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000). De acordo com Horton e Vandewalle (1995a) e Thole e Trottenberg (1986),  $\lambda$  pode ser considerado como uma medida do grau de anisotropia no operador discretizado em uma determinada malha e tal anisotropia pode afetar o desempenho do *solver*. Como  $\lambda$  depende dos incrementos de tempo e espaço adotados na discretização e também da velocidade de propagação da onda, então tem-se uma medida de anisotropia física e geométrica para a equação da onda. Essa abordagem também pode ser utilizada para encontrar os intervalos

de  $\lambda$ , onde o *Multigrid* e o *Singlegrid* são mais eficientes. Este indicador é calculado para diferentes malhas para os problemas 1D e 2D, ver FIGURAS 36 e 37 respectivamente.

FIGURA 36 – FATOR DE CONVERGÊNCIA PARA DIVERSAS MALHAS E VALORES DE  $\lambda$  COM *TIME-STEPPING* - 1D.



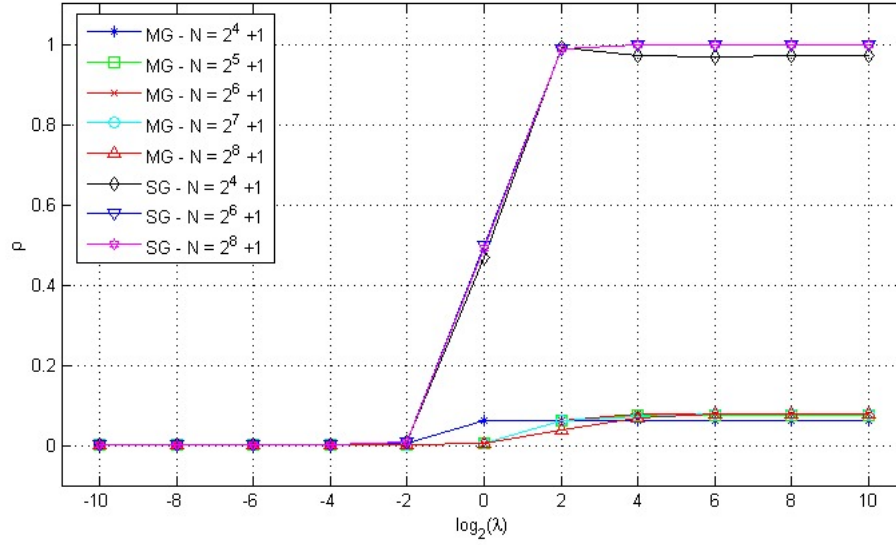
FONTE: Autor (2022).

Verifica-se que em ambos os casos, 1D e 2D, para os métodos, SG e MG, com valores de  $\log(\lambda) < 0$ , tem-se  $\rho$  pequeno, o que implica a alta eficiência de ambos os métodos. A medida que  $\log(\lambda)$  aumenta, o SG apresenta valores de  $\rho \approx 1$ , tanto para problemas 1D como para 2D, ou seja, ele é ineficiente neste intervalo. Neste mesmo intervalo, ou seja,  $\log(\lambda) > 0$ , o fator de convergência do MG para o problema 1D apresenta valores de  $\rho \approx 0,45$ . Para o problema 2D, o fator de convergência do método MG se mantém pequeno,  $\rho \approx 0,1$ . Assim, o método MG proposto para a equação da onda é muito mais eficiente para estes valores de  $\lambda$ . Além disso, pode-se perceber que os valores de  $\rho$  tendem a não depender do valor de  $\lambda$  para malhas mais refinadas, caracterizando assim a robustez do método (TROTTERBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2000).

Devido às limitações de memória, pôde-se perceber pelas FIGURAS 36 e 37, que foram utilizados os números máximos de  $N = 2^{10} + 1$  e  $N = 2^8 + 1$  para os problemas 1D e 2D, respectivamente.

### 6.1.3 Ordem de complexidade

De acordo com Burden e Faires (2016), com os resultados do tempo computacional  $t_{CPU}$  pode-se realizar um ajuste geométrico (ou não linear) para verificar a complexidade

FIGURA 37 – FATOR DE CONVERGÊNCIA PARA DIVERSAS MALHAS E VALORES DE  $\lambda$  COM *TIME-STEPPING* - 2D.

FONTE: Autor (2022).

do algoritmo utilizado, onde

$$t_{CPU} = c \cdot \mathbf{N}^p, \quad (6.1)$$

em que  $c$  é o coeficiente relativo ao método,  $p$  representa a ordem de complexidade do *solver* associado a inclinação da curva de ajuste e  $\mathbf{N}$  é o número total de variáveis do problema, ou seja,  $\mathbf{N} = (N_x - 2)(N_t - 2)$  para o caso 1D e  $\mathbf{N} = (N_x - 2)(N_y - 2)(N_t - 2)$  para o caso 2D. Teoricamente  $p$  deve estar próximo da unidade para o caso do *Multigrid*, indicando seu comportamento linear (TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2000). Nas TABELAS 2 e 3 apresentam-se os resultados destes parâmetros para os casos 1D e 2D, com *Multigrid* e *Singledrid*, para diferentes valores de  $\lambda$ , que guarda informações dos aspectos físicos como  $\alpha$  e os aspectos numéricos como  $h$  e  $\tau$ . Para encontrar o valor de  $\lambda$ , mantém-se  $\mathbf{N}$  fixo e varia-se o  $t_f$ .

TABELA 2 – PARÂMETROS DO AJUSTE GEOMÉTRICO COM *TIME-STEPPING* - 1D

$\lambda$	$c_{MG}$	$p_{MG}$	$c_{SG}$	$p_{SG}$
$10^0$	1,00E-05	0,8941	1,00E-05	0,9723
$10^1$	7,00E-06	0,9559	2,00E-05	1,0364
$10^2$	2,00E-05	0,9249	4,00E-05	1,1175
$10^3$	3,00E-05	0,9161	5,00E-05	1,2558
$10^4$	4,00E-05	0,9012	7,00E-06	1,5312
$10^5$	5,00E-05	0,9421	3,00E-06	1,7894

TABELA 3 – PARÂMETROS DO AJUSTE GEOMÉTRICO COM *TIME-STEPPING* - 2D

$\lambda$	$c_{MG}$	$p_{MG}$	$c_{SG}$	$p_{SG}$
$10^0$	7,00E-06	0,9518	1,00E-05	0,9615
$10^1$	1,00E-05	0,9438	5,00E-05	0,9922
$10^2$	2,00E-05	0,9221	1,00E-05	1,2251
$10^3$	2,00E-05	0,9341	7,00E-07	1,5693
$10^4$	2,00E-05	0,9478	2,00E-06	1,6028
$10^5$	2,00E-05	1,0071	4,00E-07	1,7752

Verifica-se uma semelhança entre as ordens de complexidade para os casos 1D e 2D. Em ambos, a medida que  $\lambda$  aumenta, tem-se o  $p_{MG}$  com valores próximos de 1 e  $p_{SG}$  próximos de 2. Isto confirma o comportamento linear do método *Multigrid*, apontando também uma certa desvantagem ao usar o método *Singlegrid* para valores grandes de  $\lambda$ , que é obtido ao usar  $t_f$  maiores e/ou números de onda  $\alpha$  grandes e/ou malhas espaciais muito refinadas (valores de interesse prático).

#### 6.1.4 *Speed-up*

Na sequência encontra-se a razão entre o tempo computacional do *Singlegrid* e *Multigrid* com o aumento do número de incógnitas e define-se

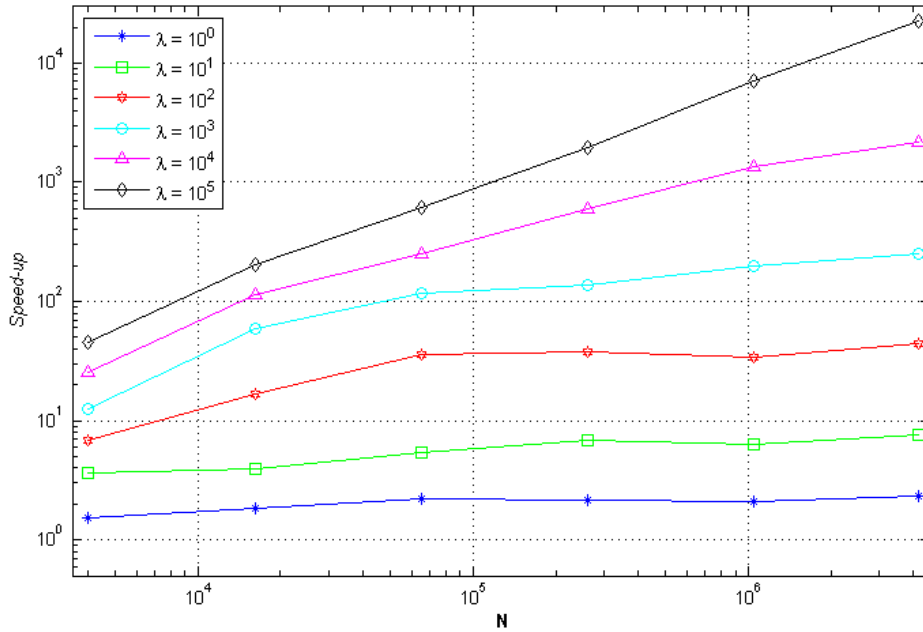
$$Speed-up = \frac{t_{CPUSG}}{t_{CPUMG}}. \quad (6.2)$$

As FIGURAS 38 e 39, apresentam respectivamente, para os casos 1D e 2D, os valores dos *Speed-ups* para diversos valores de  $\mathbf{N}$  e de  $\lambda$ .

Nota-se que em ambos os casos, 1D e 2D, o *Speed-up* aumenta para valores maiores de  $\mathbf{N}$  (propriedade desejável) e aumenta significativamente para valores maiores de  $\lambda$ . Por exemplo, no caso 2D, para  $\lambda = 10^3$ , com  $N_x = N_y = N_t = 2^7 + 1$ , ou seja, com  $\mathbf{N} = 2.048.383$  incógnitas, o método *Multigrid* apresenta  $t_{CPUMG} = 16,4s$  e o *Singlegrid*  $t_{CPUSG} = 5291,8s$ , portanto, o *Multigrid* resolve o problema aproximadamente 322 vezes mais rápido.

## 6.2 Método *Waveform Relaxation* padrão (WR) - 1D

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos com *Waveform Relaxation* padrão (ou convencional) para o problemas 1D. Para verificação dos resultados encontrados, também apresentam-se a solução de um problema semelhante ao apresentado por Gander, Kwok e Mandal (2020), mas com condições iniciais e condições de contorno diferentes.

FIGURA 38 – *SPEED-UP VERSUS N COM TIME-STEPPING - 1D.*

FONTE: Autor (2022).

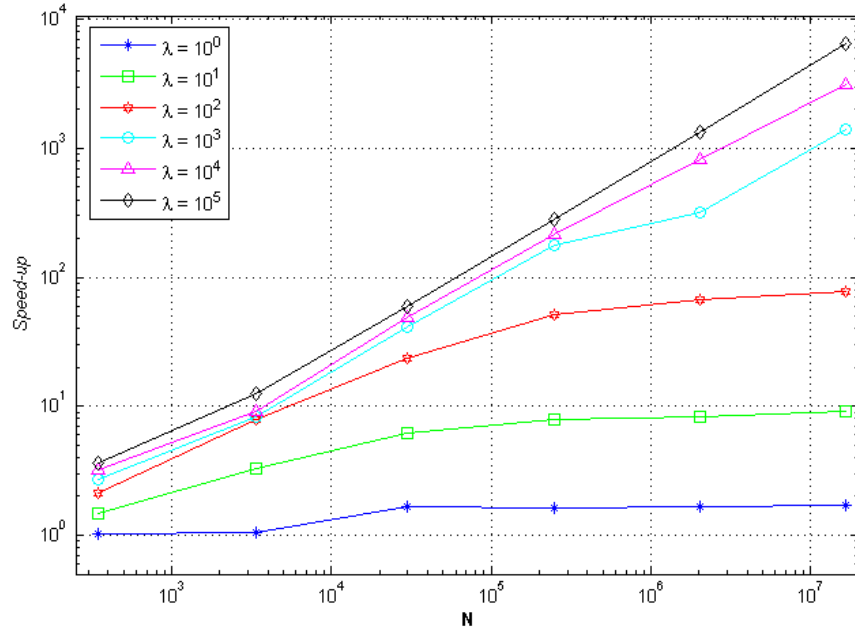
### 6.2.1 Solução aproximada

A seguir, verifica-se o comportamento oscilatório da solução aproximada durante o processo de iterativo para o problema 1D, abordado na seção 6.1 e modelado pela equação da onda definida pelas Eqs. (2.20) a (2.23), usando-se o método *Waveform Relaxation* padrão, com  $t_f = 1,0s$ ,  $x \in (0,1)$ ,  $N_x = N_t = 2^7 + 1$  pontos, o parâmetro  $\eta = 0,5$ , com  $\lambda = 4$ , com *Singlegrid* e *solver* Gauss-Seidel com ordenação *red-black*. Ver as FIGURAS 40, 41, 42 e 43, respectivamente para 2, 50, 200 e 1000 iterações.

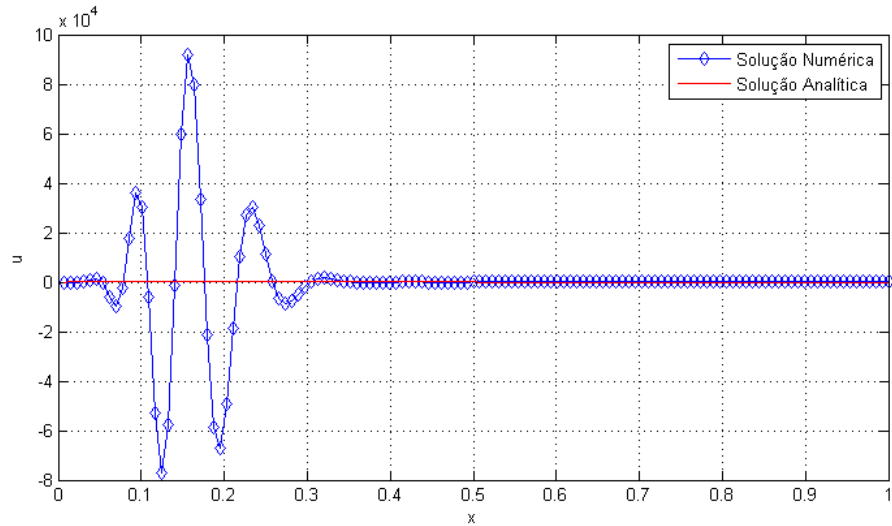
Observa-se que existem fortes oscilações iniciais ao aplicar o método *Waveform Relaxation* padrão, mesmo quando se utilizam malhas mais grosseiras (com menos pontos). Apesar da forte oscilação no início do processo, a solução numérica converge para os valores desejados, ou seja, os erros numéricos são reduzidos à medida que as iterações são realizadas. Destaca-se que estas oscilações iniciais não são encontradas ao utilizar o método *Time-Stepping*.

Na FIGURA 44 é possível observar o comportamento da norma infinito do resíduo à medida que as iterações são realizadas, para *Singlegrid* e *Multigrid*, para o mesmo problema tratado nas FIGURAS 40 - 43.

Embora o método *Multigrid* execute menos ciclos do que o método *Singlegrid*, a ordem de perturbação gerada pelos resíduos é a mesma em ambos os métodos. Estas perturbações iniciais não são uma característica desejável no processo de aproximação, que

FIGURA 39 – *SPEED-UP VERSUS N COM TIME-STEPPING - 2D.*

FONTE: Autor (2022).

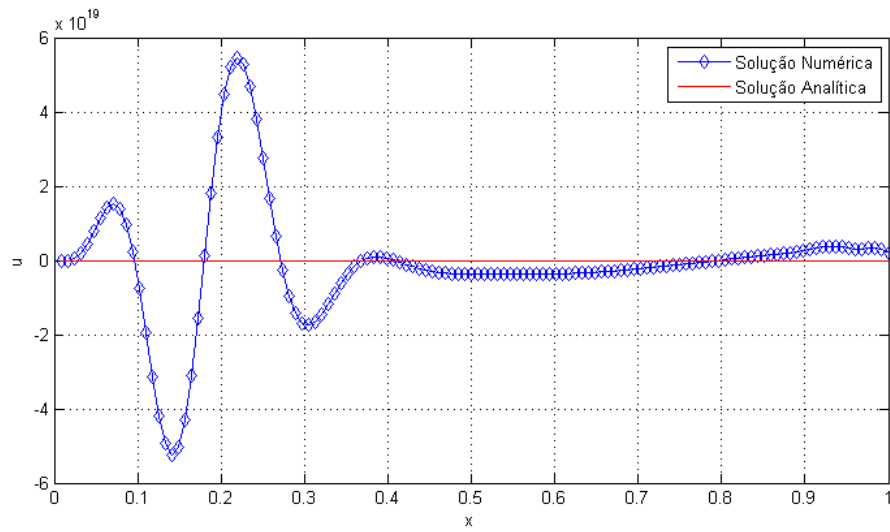
FIGURA 40 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 2 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO - 1D.

FONTE: Autor (2022).

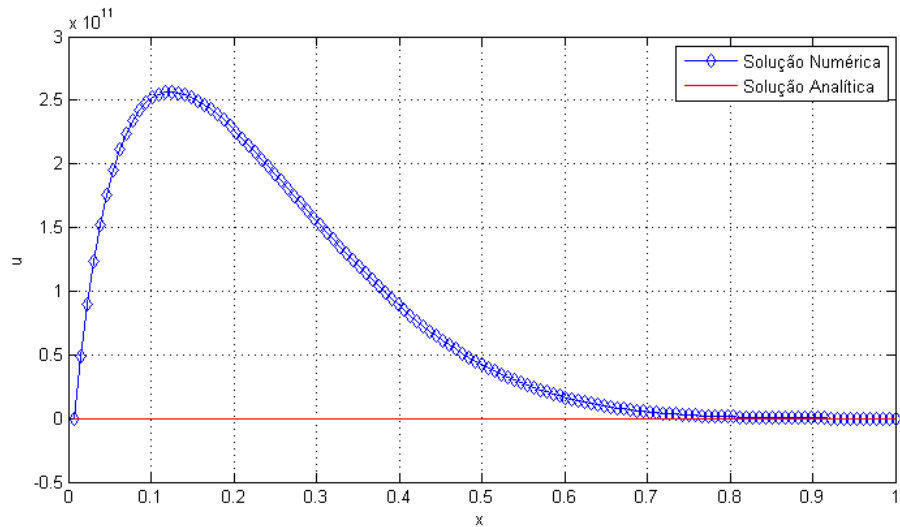
apesar de já serem descritas na literatura, as suas causas ainda continuam desconhecidas e interferem negativamente nos parâmetros de interesse, como fatores de convergência e tempo de CPU (GANDER; KWOK; MANDAL, 2020).

Na FIGURA 45, apresentam-se a norma infinito dos resíduos para diferentes números de pontos, com o tempo final fixado em  $t_f = 1,0s$ , e na FIGURA 46 varia-se o



FIGURA 41 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 50 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO - 1D.

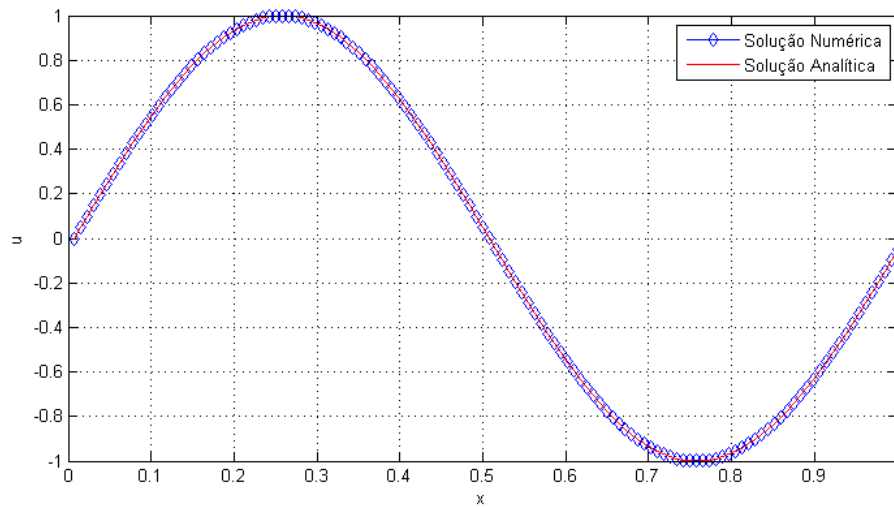
FONTE: Autor (2022).

FIGURA 42 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 500 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO - 1D.

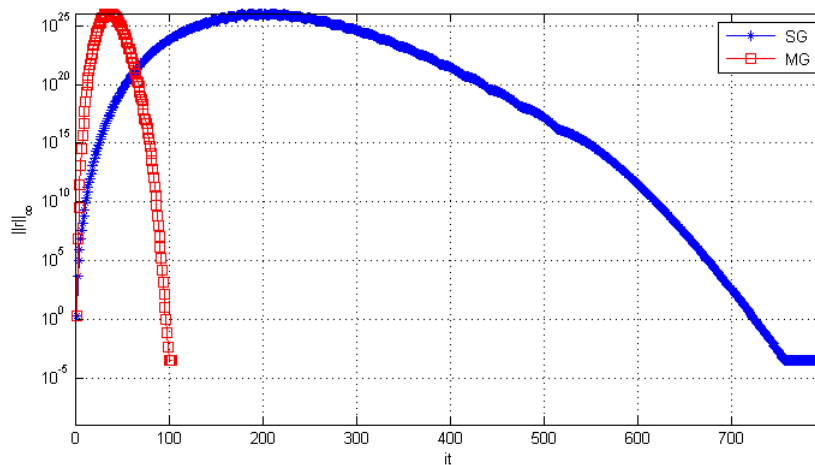
FONTE: Autor (2022).

tempo final  $t_f$ , com  $N = N_x = N_t = 2^7 + 1$ . Ambas figuras utilizam *Singlegrid* e *Waveform Relaxation* padrão.

Nota-se que com o aumento no tempo final, o resíduo máximo aumenta consideravelmente, para a ordem de  $10^{25}$ , esta característica é semelhante ao que acontece quando o número de pontos na malha aumenta. Isto implica em uma perda de eficiência na resolução de problemas com *Waveform Relaxation* e *Singlegrid* com muitos graus de liberdade e/ou um tempo final relativamente grande. Encontram-se resíduos muito

FIGURA 43 – SOLUÇÃO APROXIMADA COM 1000 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO - 1D.

FONTE: Autor (2022).

FIGURA 44 – RESÍDUO *VERSUS* ITERAÇÕES USANDO *SINGLEGRID* E *MULTIGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO.

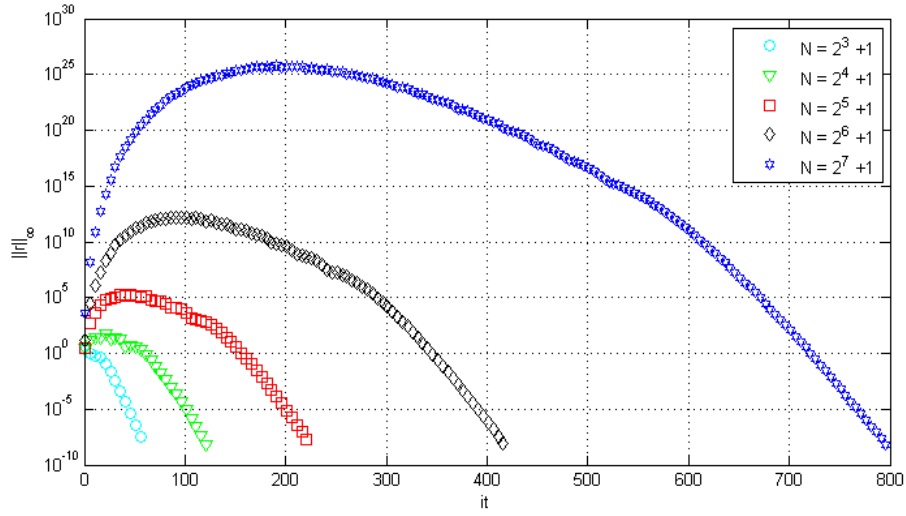
FONTE: Autor (2022).

semelhantes quando se aplica o método *Multigrid* para estes casos, como visto na FIGURA 44.

### 6.2.2 Fator de convergência médio

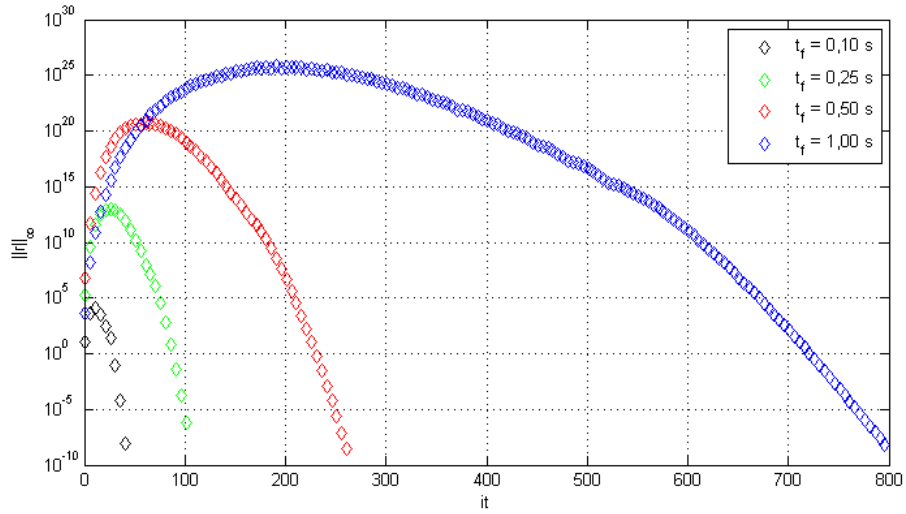
Com o aumento do resíduo gerado ao se utilizar o método *Waveform Relaxation* padrão, os fatores de convergência assintótica  $\rho$  acabam sendo afetados negativamente, com isso estes fatores não conseguem representar fielmente o comportamento do processo iterativo, já que próximos do final eles tendem a ser menores do que ao longo de todo o

FIGURA 45 – RESÍDUO *VERSUS* ITERAÇÕES VARIANDO  $N$ , COM  $t_f = 1,0s$  FIXO, COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO.



FONTE: Autor (2022).

FIGURA 46 – RESÍDUO *VERSUS* ITERAÇÕES VARIANDO  $t_f$  COM  $N = 2^7 + 1$  FIXO, COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO.



FONTE: Autor (2022).

processo. Desta maneira, utiliza-se o fator de convergência médio  $\rho_m$  dado em Trottenberg e Clees (2009), por este parâmetro ser mais representativo. Ele é dado por

$$\rho_m = \sqrt[it]{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_{it}} = \sqrt[it]{\frac{\|r^1\|_\infty}{\|r^0\|_\infty} \cdot \frac{\|r^2\|_\infty}{\|r^1\|_\infty} \cdots \frac{\|r^{it-1}\|_\infty}{\|r^{it-2}\|_\infty} \cdot \frac{\|r^{it}\|_\infty}{\|r^{it-1}\|_\infty}}, \quad (6.3)$$

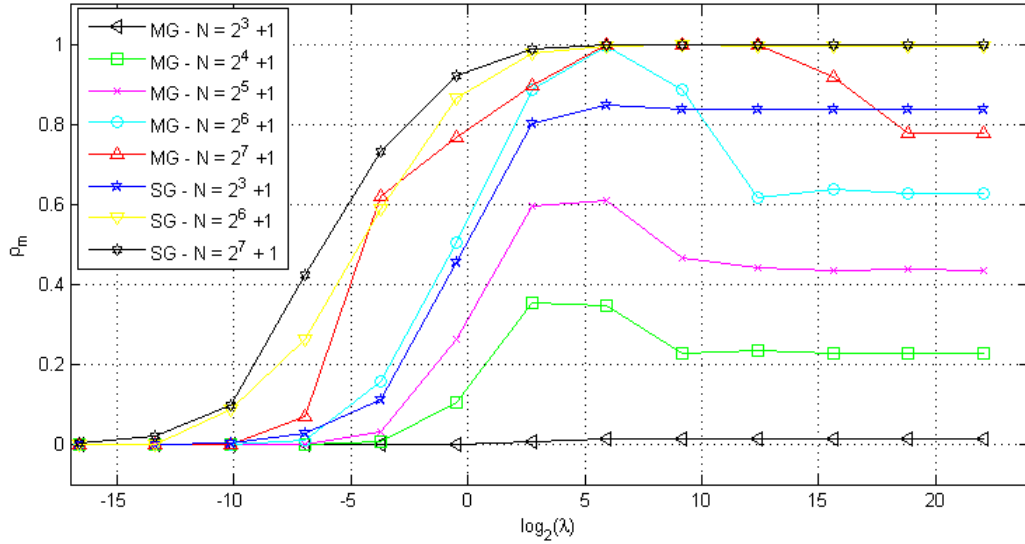
ou, ainda

$$\rho_m = \sqrt[4]{\frac{\|r^{it}\|_\infty}{\|r^0\|_\infty}}. \quad (6.4)$$

Além disso, de acordo com Horton e Vandewalle (1995a) e Thole e Trottenberg (1986), o nível de anisotropia  $\lambda = \alpha^2 \tau^2 / h^2$  no operador discretizado numa determinada malha, pode afetar o desempenho de todo o método. Isto porque  $\lambda$  depende tanto dos incrementos temporais e espaciais (adotados na discretização), como da velocidade de propagação da onda. Portanto, como já foi dito,  $\lambda$  representa uma medida de anisotropia física e geométrica para a equação da onda. E neste caso, o tempo final do problema pode ser escrito dependendo diretamente de  $\lambda$  e  $\alpha$ , com a expressão  $t_f = \sqrt{\lambda} / \alpha$ .

Aqui, apresentam-se os resultados do teste, onde varia-se o valor do parâmetro  $\lambda$  e calcula-se  $\rho_m$  para uma vasta gama de problemas de propagação de ondas. A fim de verificar o comportamento do *Waveform Relaxation* padrão, utilizam-se os métodos *Singlegrid* e *Multigrid* (ver FIGURA 61).

FIGURA 47 –  $\rho_m$  VERSUS  $\lambda$  PARA O MÉTODO WAVEFORM RELAXATION PADRÃO COM SINGLEGRID E MULTIGRID.



FONTE: Autor (2022).

Pode-se observar na FIGURA 47, que a medida que  $\lambda$  aumenta, os fatores de convergência média dos métodos *Singlegrid* e *Multigrid* também aumentam, tornando-se  $\rho_m \approx 1,0$ ; uma propriedade que não é boa para o processo de aproximação. Com isto, pode-se concluir que o modelo de solução não é eficiente e nem robusto para valores intermédios ou grandes de  $\lambda$  (casos de problemas em malhas refinadas e tempos finais maiores). Este resultado ratifica a hipótese de que é ineficiente aplicar o método *Waveform*

*Relaxation* padrão para resolver a equação da onda, seja com os métodos *Singlegrid* ou *Multigrid*.

O problema da simulação computacional de ondas hiperbólicas transiente pode ser resolvido de diferentes maneiras, mas a maioria delas tem limitações, especialmente para tempos finais relativamente grandes. Para estes casos, esquemas explícitos apresentam instabilidades que comprometem a confiabilidade da solução aproximada (BAILLY; JUVE, 2000). Como visto anteriormente, mesmo os métodos implícitos apresentam dificuldades para resolver estes casos, já que no início do processo iterativo, as soluções aproximadas apresentam fortes oscilações, que são suavizadas a medida que o número de iterações aumenta (ver FIGURA 45 e FIGURA 46), porém este comportamento compromete seriamente a eficiência de tais métodos. Portanto, procura-se melhorar a aplicabilidade de métodos paralelizáveis, tais como o *Waveform Relaxation*. Para tal, combina-se a metodologia desenvolvida até agora com o método Subdomínios no Tempo.

### 6.3 Método *Waveform Relaxation* com Subdomínios - 1D

A partir desta seção, apresentam-se os resultados do *Waveform Relaxation* combinado com o método dos Subdomínios no tempo. Para tal, adotam-se  $K = 1$  para o número de subdomínios espaciais. Para o número  $J$  de subdomínios no tempo, adotam-se o menor valor possível, desde que seja capaz de fornecer bons fatores de convergência média ( $\rho_m$ ). Seguem os valores adotados para  $J$  na TABELA 4, que podem variar dependendo dos valores de  $N^2 = N_x N_t$  e  $\lambda$ . A escolha de  $J$  baseia-se na análise empírica dos dados, de modo que o  $\rho_m \leq 0,4$  para o método *Multigrid*, e assim, o modelo numérico implícito possa ser considerado aceitável (TROTTERBERG; CLEES, 2009).

TABELA 4 – NÚMERO DE SUBDOMÍNIOS  $J$  PARA OS VALORES DE  $N^2$  E  $\lambda$

$N^2 \setminus \lambda$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$10^{+1}$	$10^{+2}$	$10^{+3}$	$10^{+4}$	$10^{+5}$	$10^{+6}$	$10^{+7}$
$(2^3 + 1)^2$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(2^4 + 1)^2$	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
$(2^5 + 1)^2$	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
$(2^6 + 1)^2$	1	1	2	4	4	4	4	4	4	4
$(2^7 + 1)^2$	1	1	2	4	8	8	8	8	8	8
$(2^8 + 1)^2$	1	2	8	16	16	16	16	16	16	16

Realizaram-se vários testes com diferentes combinações para a escolha do número de subdomínios adequado com cada  $\lambda$  e  $N^2$ . Visto que, como apresentado nas FIGURAS 45 e 46, o aumento do resíduo influencia negativamente no processo de aproximação. Outra possibilidade para auxiliar na escolha do número de subdomínios, seria adotar um limite superior o  $\|r\|_\infty$ . Porém, neste trabalho optou-se por não utilizá-lo, a fim de realizar

comparações com os resultados de Ong e Mandal (2018) e Gander, Kwok e Mandal (2020).

Deve-se notar que para valores maiores de  $J$ , o número de pontos espaciais dentro de cada subdomínio será menor, o que pode reduzir o nível de paralelização do método. Por exemplo: para um problema 1D com  $N_x = N_t = 2^6 + 1$ , tem-se para  $J = 1$  um único domínio  $\Omega$  com 65 pontos espaciais; mas para  $J = 2$ , tem-se  $\Omega_1$  com 33 pontos espaciais e  $\Omega_2$  com 32 pontos espaciais; para o caso de  $J = 4$ , tem-se  $\Omega_1$  com 17 pontos espaciais e os três subdomínios  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  e  $\Omega_4$  com 16 pontos espaciais cada. Assim, é sempre interessante ter o menor valor possível para  $J$ , mas no caso de  $J = 1$ , tem-se o método *Waveform Relaxation* padrão, o qual observou-se não ser eficiente para a equação da onda.

Também é possível notar que para domínios discretizados com  $N$  pequenos, é possível trabalhar com um pequeno número de subdomínios no tempo, independentemente do valor de  $\lambda$ . Mas para problemas com  $N$  grandes, dependendo do valor de  $\lambda$ , fica inviável trabalhar com  $J$  pequeno, já que as instabilidades do método *Waveform Relaxation* padrão afetam negativamente os valores de  $\rho_m$ . Salienta-se que todos os testes 1D seguintes foram realizados utilizando o número de subdomínios no tempo presentes na TABELA 4.

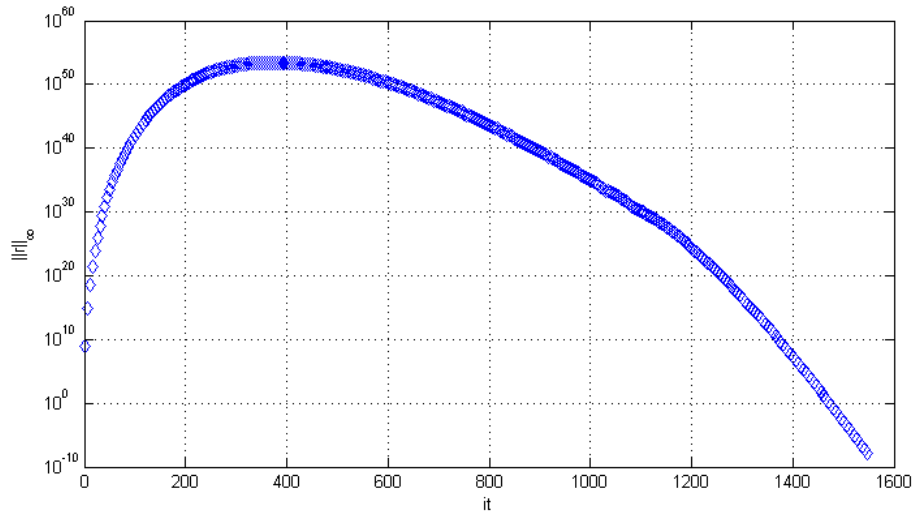
Na tentativa de resolver o problema das perturbações iniciais, que geram resíduos mais elevados durante o início das iterações, analisam-se os parâmetros do método proposto originalmente por Ong e Mandal (2018) (por exemplo, FIGURA 23), com o objetivo de melhorar os fatores de convergência médio. Mantém-se o número de subdomínios espaciais fixado em  $K = 1$  e analisam-se o número de subdomínios temporais  $J$ . Desta forma, obtém-se uma estratégia altamente paralelizável ao utilizar o método *Waveform Relaxation*. As FIGURAS 48 e 49 mostram o comportamento do resíduo para  $J = 1$  e  $J = 4$ , respectivamente, usando *Singlegrid* para  $N = 2^8 + 1$  ou seja, um total de  $N^2 = 66049$  pontos e  $t_f = 1,0s$ .

Observa-se que ao utilizar apenas um subdomínio temporal ( $J = 1$ ), tem-se o  $t_{CPU} = 14,15s$  com um resíduo máximo da ordem de  $10^{53}$ . Contudo, utilizando quatro subdomínios no tempo ( $J = 4$ ) e com  $t_0 = 0,0s$ ,  $t_{f1} = 0,25s$ ,  $t_{f2} = 0,50s$ ,  $t_{f3} = 0,75s$  e  $t_f = 1,0s$ , tem-se o resíduo máximo na ordem de  $10^{12}$  e o tempo de processamento cai para  $t_{CPU} = 4,01s$ .

Na FIGURA 50 pode-se observar o comportamento do resíduo máximo relativamente à variação do número de subdomínios temporais  $J$  e os valores de  $N$ , considerando  $K = 1$ .

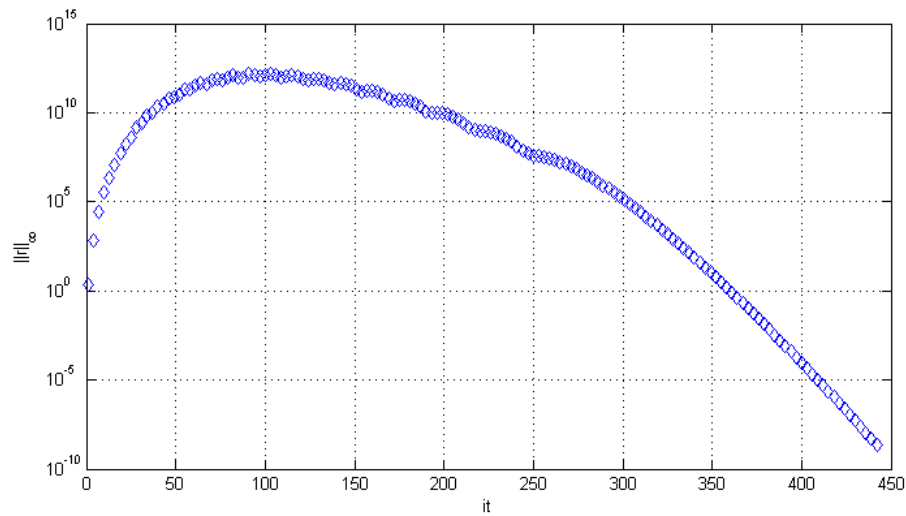
Verificam-se que as maiores reduções dos resíduos máximos encontram-se nas primeiras subdivisões do domínio. Por exemplo, para  $N = 2^8 + 1$  e  $J = 1$ , o resíduo máximo tem uma ordem de  $10^{53}$  e  $t_{CPU} = 14,15s$ , contudo, quando se usa  $J = 8$ , este resíduo diminui para uma ordem de  $10^5$  e  $t_{CPU} = 2,35s$ . Destaca-se ainda a melhoria considerável na ordem dos resíduos máximos e do tempo de processamento, ao utilizar o

FIGURA 48 – RESÍDUO *VERSUS* ITERAÇÕES PARA  $t_f = 1,0s$ ,  $N = 2^8 + 1$ ,  $K = 1$  E  $J = 1$  USANDO *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO.



FONTE: Autor (2022).

FIGURA 49 – RESÍDUO *VERSUS* ITERAÇÕES PARA  $t_f = 1,0s$ ,  $N = 2^8 + 1$ , USANDO *WAVEFORM RELAXATION* COM  $K = 1$  E  $J = 4$  SUBDOMÍNIOS.



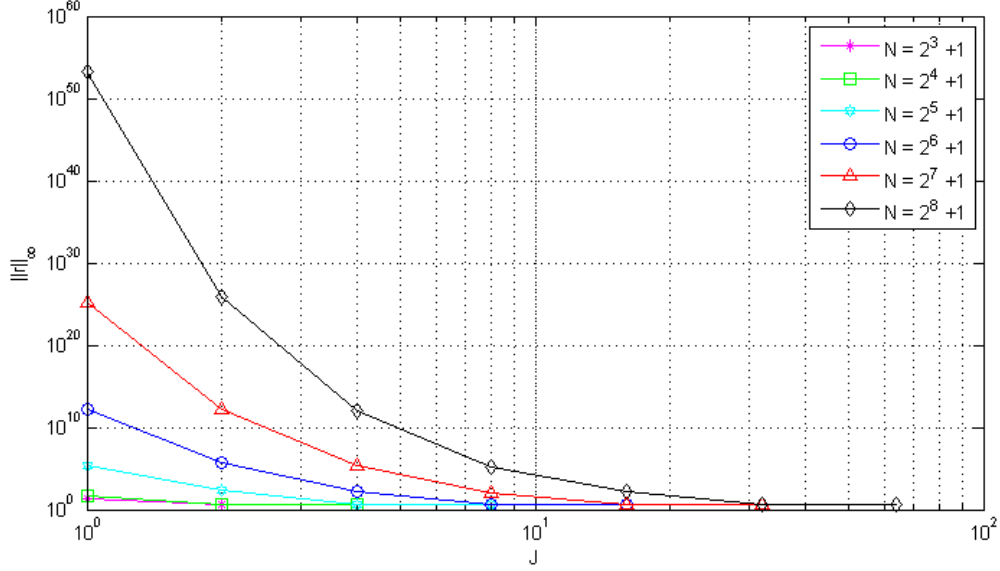
FONTE: Autor (2022).

método *Waveform Relaxation* combinado com o método dos Subdomínios no Tempo.

### 6.3.1 Fator de convergência médio

Na FIGURA 51 apresenta-se os fatores de convergência médios  $\rho_m$  para os métodos *Multigrid* e *Singlegrid*, com diferentes valores de  $\lambda$  e  $N$ , usando o método *Waveform Relaxation* com  $J = 8$  subdomínios temporais e  $K = 1$  subdomínio espacial, tanto para o *Singlegrid* como para o *Multigrid*.

FIGURA 50 – RESÍDUO *VERSUS*  $J$  PARA O  $t_f = 1,0s$  E  $K = 1$ , PARA DIVERSOS VALORES DE  $N$ , USANDO *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS.



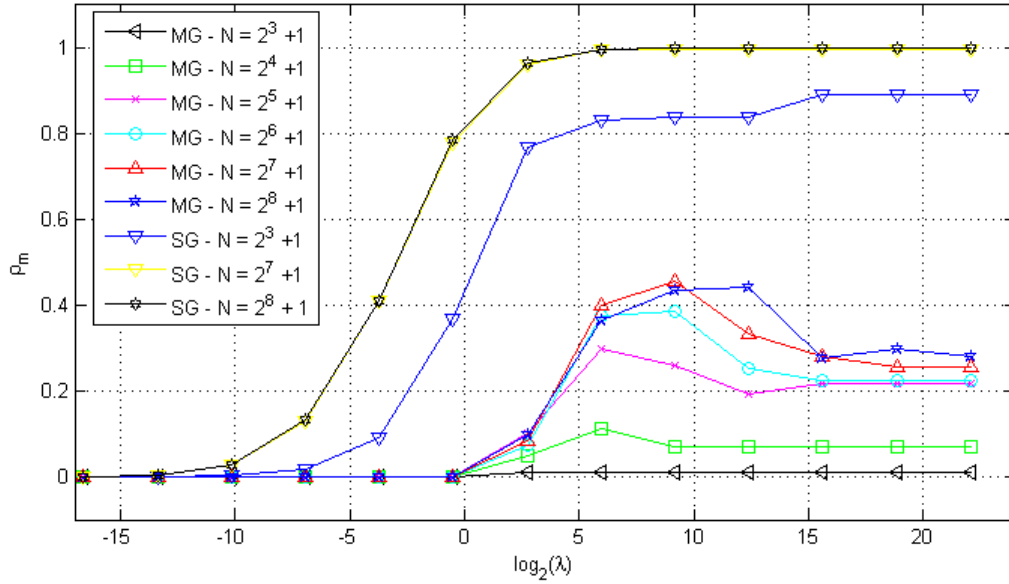
FONTE: Autor (2022).

Observa-se na FIGURA 51, que ambos os métodos, *Multigrid* e *Singlegrid*, apresentam  $\rho_m \approx 0,0$  para valores  $\log_2(\lambda) < -5,0$ , o que implica uma alta eficiência. Mas, com o aumento de  $\log_2(\lambda)$ , o método *Singlegrid* apresenta valores de  $\rho_m \approx 1,0$  com o refinamento da malha, ou seja, o método é ineficiente nesta região. Para este mesmo intervalo, o método *Multigrid* apresenta valores de  $\rho_m \approx 0,4$ . No pior caso, na região perto de  $\lambda = 10^2$ , o *Multigrid* apresenta valores de  $\rho_m \approx 0,45$ , sendo muito inferior aos valores apresentados pelo método *Singlegrid*.

Portanto, o método *Multigrid* proposto para a equação da onda é mais eficiente para estes valores de  $\lambda$ . Além disso, nota-se que os valores de  $\rho_m$  tendem a não depender do valor de  $\lambda$  para malhas mais refinadas, o que evidencia a robustez do método. Neste trabalho, valores elevados de  $\lambda$  podem significar tempos finais maiores ou números de onda  $\alpha$  grandes, ou até mesmo, malhas espaciais altamente refinadas.

Outro exemplo pode ser dado adotando-se  $\lambda = 10^4$ , com  $N = 2^8 + 1$ ,  $J = 16$  subdomínios temporais e  $K = 1$  subdomínio espacial. Neste caso, para o método *Singlegrid*, tem-se  $t_{CPU} = 1320,62s$ , com  $\rho_m \approx 0,9999$  e aproximadamente 120000 iterações. Já para o método *Multigrid*, tem-se  $t_{CPU} = 4,67s$ ,  $\rho_m \approx 0,4301$ , e um total de 23 ciclos-V(2,2), o que corrobora a vantagem ao se aplicar o *Multigrid* proposto neste trabalho. Uma possível explicação para estas vantagens pode estar na redução do fator de convergência médio do método *Multigrid* com o aumento do número de subdomínios temporais ( $J$ ), como pode-se observar na FIGURA 52.



FIGURA 51 –  $\rho_m$  PARA OS MÉTODOS *MULTIGRID* E *SINGLEGRID*, USANDO *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS PARA  $J = 8$  E  $K = 1$ .

FONTE: Autor (2022).

### 6.3.2 Ordem de complexidade

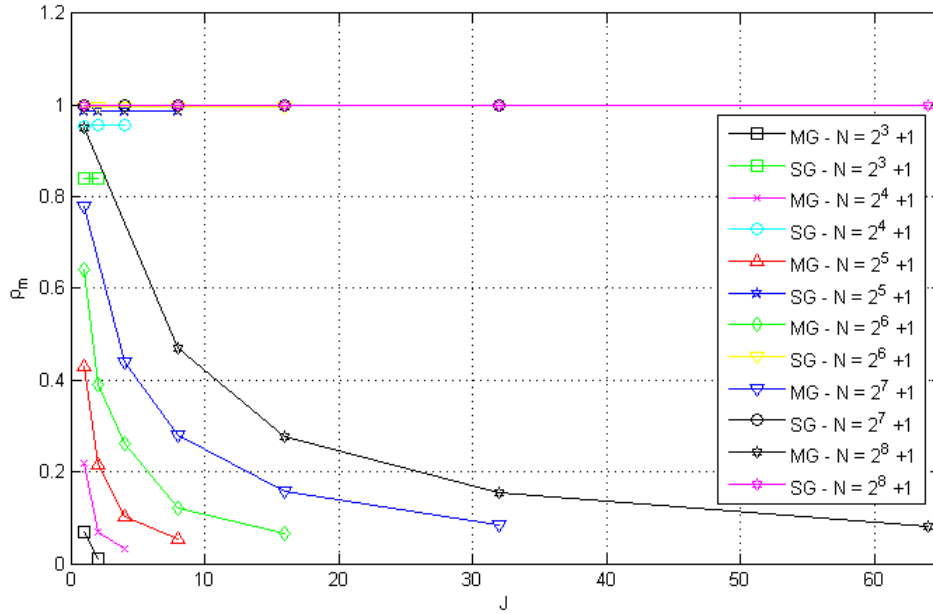
Calcula-se a ordem de complexidade usando-se a Eq. (6.1). A TABELA 5 apresenta os valores obtidos para os parâmetros  $c$  e  $p$ , no caso onde utilizou-se  $K = 1$  e  $J$  de acordo com a TABELA 4. Deve-se lembrar que  $c$  é o coeficiente do método,  $p$  representa a ordem de complexidade relacionado com a inclinação da curva obtida com ajuste não linear e  $N$  é o número total de incógnitas do problema. Teoricamente  $p$  deve ser próximo de 1 para o método *Multigrid* (TROTTERBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2000).

TABELA 5 – PARÂMETROS DO AJUSTE GEOMÉTRICO USANDO *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS - 2D.

$\lambda$	$c_{SG}$	$p_{SG}$	$c_{MG}$	$p_{MG}$
$10^0$	3,00E-04	0,6997	2,00E-04	0,7101
$10^1$	2,00E-04	0,8943	4,00E-04	0,7822
$10^2$	9,00E-05	1,2051	1,00E-04	1,0319
$10^3$	6,00E-05	1,6515	8,00E-05	1,0833
$10^4$	2,00E-06	1,8277	3,00E-04	0,8955
$10^5$	2,00E-06	1,8188	1,00E-04	0,9898

Para o caso de  $\alpha$  maiores,  $t_f$  grandes ou malhas espaciais muito refinadas, tem-se aumento nos valores de  $\lambda$ , para os quais observa-se que os valores de  $p_{MG}$  tendem

FIGURA 52 –  $\rho_m$  PARA O *MULTIGRID* E *SINGLEGRID* VARIANDO O NÚMERO DE SUBDOMÍNIOS NO TEMPO  $J$  E  $N$ , PARA  $\lambda = 10^5$ ,  $K = 1$ .



FONTE: Autor (2022).

permanecer próximos de 1 e os valores de  $p_{SG}$  aproximam-se de 2. Parece haver uma relação entre  $\lambda$  e  $p$  da mesma forma que existe entre  $N$  e  $p$  na Eq. (6.1).

### 6.3.3 Speed-up

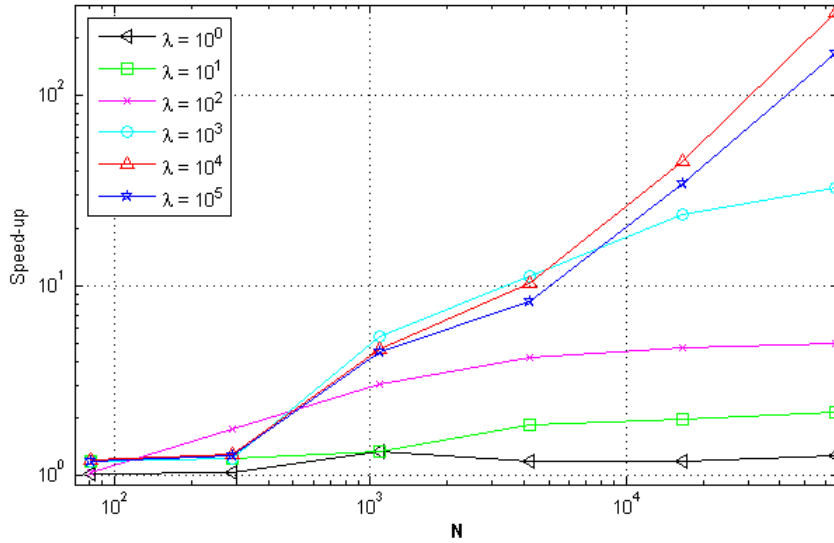
Nesta seção, analisa-se o *Speed-up*, que é dado pela Eq. (6.2). Na FIGURA 53 mostram-se os resultados do *Speed-up* ao variar o número total de incógnitas  $N$  para diferentes valores de  $\lambda$ , considerando  $K = 1$  e  $J = 8$ .

Note-se que o *Speed-up* é maior com o aumento do número incógnitas (propriedade desejável) e também para valores mais elevados de  $\lambda$ . Por exemplo, quando  $\lambda = 10^5$ , com  $N = 2^8 + 1$  e  $J = 8$  subdomínios temporais, o método *Multigrid* tem um tempo de processamento igual a  $t_{CPU} = 8,13s$  e o *Singlegrid* um  $t_{CPU} = 1477,82s$ , ou seja, o método *Multigrid* resolve o problema cerca de 182 vezes mais rápido do que o *Singlegrid*.

## 6.4 Aplicação: propagação de pulso de uma onda unidimensional com reflexão e inversão de fase

Aqui aborda-se um problema um pouco mais realístico, onde provoca-se uma oscilação em uma das extremidades de uma corda inicialmente em repouso. Este problema, sem solução analítica conhecida, é resolvido de forma aproximada, admitindo-se  $\Omega = [0,1]$ ,  $\alpha = 2$ ,  $t_f = 1,0s$ , com configuração e velocidades iniciais  $f(x) = g(x) = 0$  e condições e

FIGURA 53 – SPEED-UP *VERSUS* N PARA DIFERENTES VALORES DE  $\lambda$ ,  $K = 1$  e  $J = 8$ , USANDO *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS.



FONTE: Autor (2022).

contorno  $u(0,0) = u(1,t) = 0$ , ou seja, tem-se uma corda com posição de repouso no tempo inicial, fixada em ambas as extremidades. O tempo de experimento  $[t_0, t_f]$  pode ser dividido nos intervalos  $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{p-1}, t_p, t_{p+1}, \dots, 2t_p, \dots, t_f = 1,0$ , onde  $t_p$  é o tempo em que a oscilação atinge a amplitude máxima. Aplica-se um impulso na extremidade  $x = 0$ , de forma contínua durante o intervalo  $[t_3, 2t_p]$ . O pulso inicial pode ser inserido no problema impondo a seguinte condição de contorno em  $x = 0$ ,

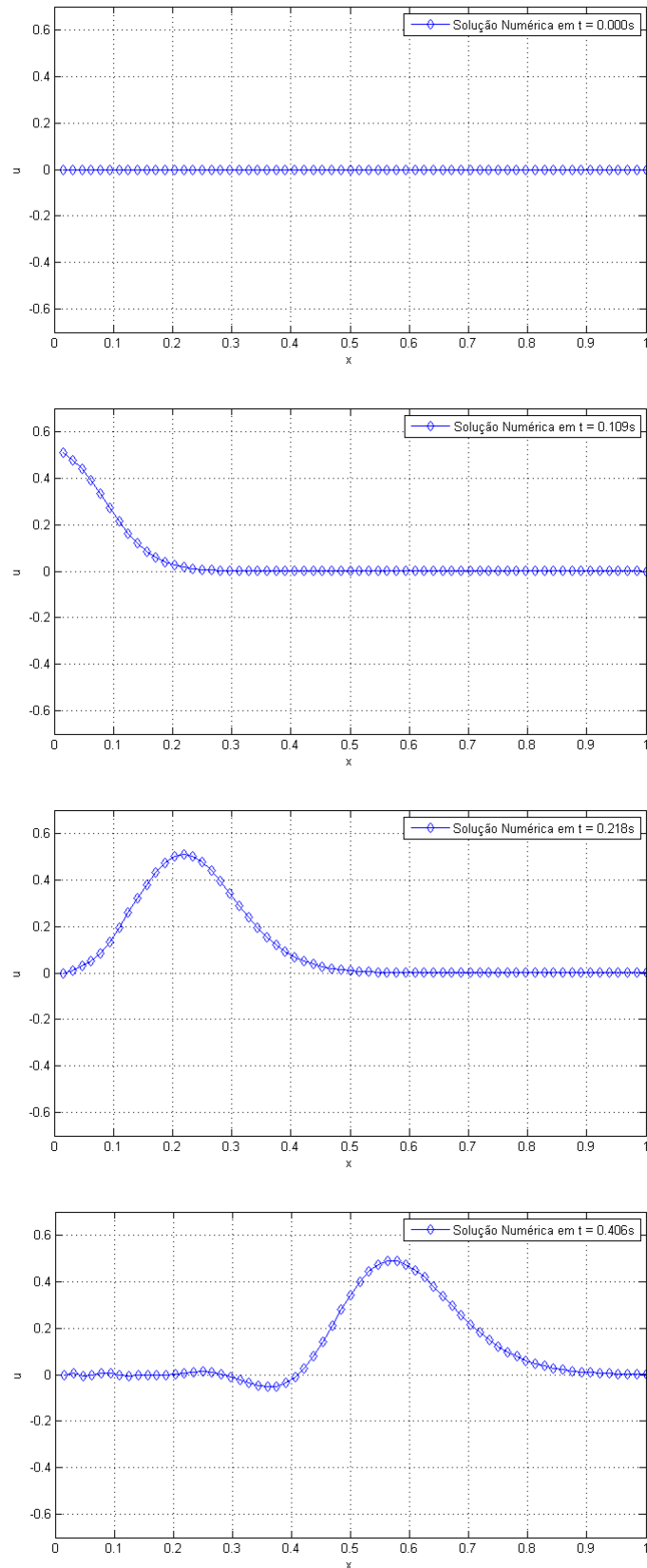
$$u(0,t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \in [t_0, t_3) \\ \text{sen}(\pi t), & \text{para } t \in [t_3, t_p) \\ \text{sen}(\pi(2t_p - t)), & \text{para } t \in [t_p, 2t_p) \\ 0, & \text{para } t \in [2t_p, t_f] \end{cases} \quad (6.5)$$

Para o exemplo abordado adota-se  $t_p = 0,109s$ , ou seja,  $2t_p = 0,218s, \dots, \lambda = 10^0$  e  $N = 2^6 + 1$ . Na primeira linha da Eq. (6.5) a corda se mantém fixa, em seguida provoca-se o início do pulso em  $t_3$ , que vai aumentando sua amplitude até  $t_p$  (amplitude máxima) e a partir de  $2t_p$  a extremidade  $x = 0$  é mantida fixa novamente. Pode-se observar a propagação do pulso à medida que o tempo varia nas FIGURAS 54 a 55, onde utilizou-se *Waveform Relaxation* com subdomínios com  $K = 1$  (subdomínio espacial) e  $J = 4$  (subdomínios temporais) e *Multigrid*.

Observa-se a propagação do pulso sobre a corda, inicialmente em repouso, a medida que o pulso toca a extremidade esquerda, que se encontrava fixa, ocorrendo a inversão de fase, que é uma característica física conhecida. Este exemplo foi resolvido com

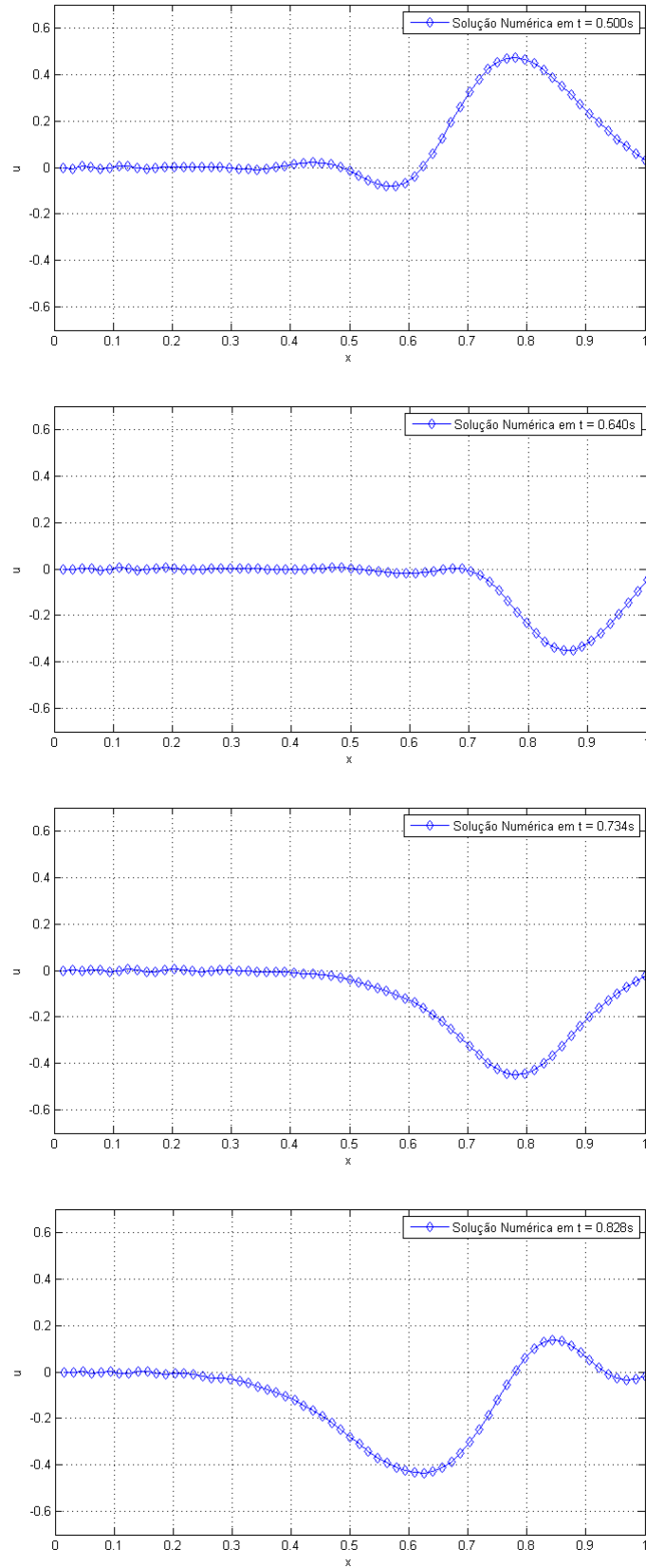
o método *Waveform Relaxation* com  $K = 1$  e  $J = 1$  (padrão) e *Waveform Relaxation* com subdomínios temporais  $K = 1$  e  $J = 4$ , combinado com o *Singlegrid* e *Multigrid* para ambos os casos. A TABELA 6 mostra alguns dos parâmetros avaliados.

FIGURA 54 – PROPAGAÇÃO DE UM PULSO EM UMA CORDA PARA OS INSTANTES  $t_0 = 0,000s$ ,  $t = 0,109s$ ,  $t = 0,218s$  E  $t = 0,406s$ , USANDO *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS ( $K = 1$  E  $J = 4$ ) E *MULTIGRID*.



FONTE: Autor (2022).

FIGURA 55 – PROPAGAÇÃO DE UM PULSO EM UMA CORDA PARA OS INSTANTES  $t = 0,500s$ ,  $t = 0,640s$ ,  $t = 0,734s$  E  $t = 0,828s$ , USANDO *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS ( $K = 1$  E  $J = 4$ ) E *MULTIGRID*.



FONTE: Autor (2022).

TABELA 6 – PARÂMETROS OBTIDOS DA SOLUÇÃO COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO ( $K = 1$  E  $J = 1$ ) E COM *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS NO TEMPO ( $K = 1$  E  $J = 4$ ), PARA O PROBLEMA DE PROPAGAÇÃO DE UM PULSO.

	$WR_{SG}$	$WR_{MG}$	$WR_{SG-SUB}$	$WR_{MG-SUB}$
$t_{CPU}$	2,94E-01	1,67E-01	1,23E-01	6,59E-02
$\rho_m$	9,51E-01	7,38E-01	8,72E-01	2,35E-02
$\ r\ _\infty$	1,03E+12	1,03E+12	5,67E+01	5,67E+01

Percebe-se que ao usar subdomínios no tempo, o tempo de processamento  $t_{CPU}$  e o resíduo máximo  $\|r\|_\infty$  diminuem significativamente. Evidencia-se esta melhora quando se trata dos fatores de convergência médio  $\rho_m$ , especialmente ao empregar o método *Multigrid*, reafirmando assim a eficiência deste método quando aplicado a problemas modelados pela equação da onda.

### 6.5 Método *Waveform Relaxation* padrão - 2D

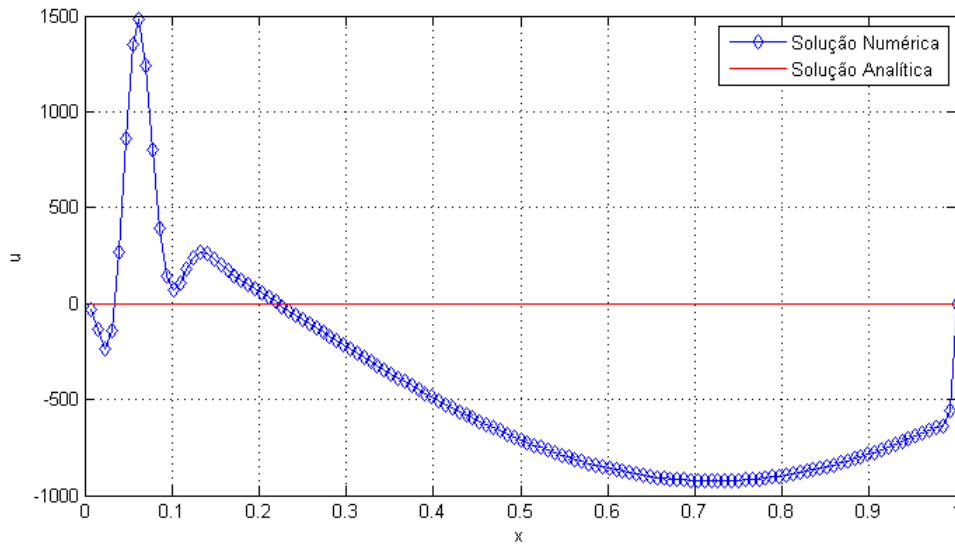
A seguir, apresenta-se o comportamento oscilatório da solução durante o processo iterativo para o problema bidimensional usando o método *Waveform Relaxation* padrão. Para tal, resolve-se o problema modelado pelas Eqs. (2.29 - 2.32), usando *Singlegrid* e o *solver* Gauss-Seidel com ordenação *red-black*, para uma malha com  $N = N_x = N_y = (2^7 + 1)$ . As FIGURAS 56 - 59 apresentam as soluções aproximadas para a seção transversal com  $y = 0,5m$ , para 5, 50, 200 e 1500 iterações, respectivamente, todas com o tempo final  $t_f = 1,0s$ .

Verificam-se grandes oscilações iniciais ao aplicar o método *Waveform Relaxation* padrão para o problema da equação da onda bidimensional, mesmo ao se utilizar malhas mais grosseiras. Apesar deste comportamento apresentado no início do processo iterativo, pode-se observar novamente que a solução numérica converge para os valores desejados à medida que um grande número de iterações é realizado.

Na FIGURA 60 pode-se observar o comportamento da norma infinito do resíduo à medida que as iterações (*it*) são realizadas, para o método *Singlegrid* com *Waveform Relaxation* padrão.

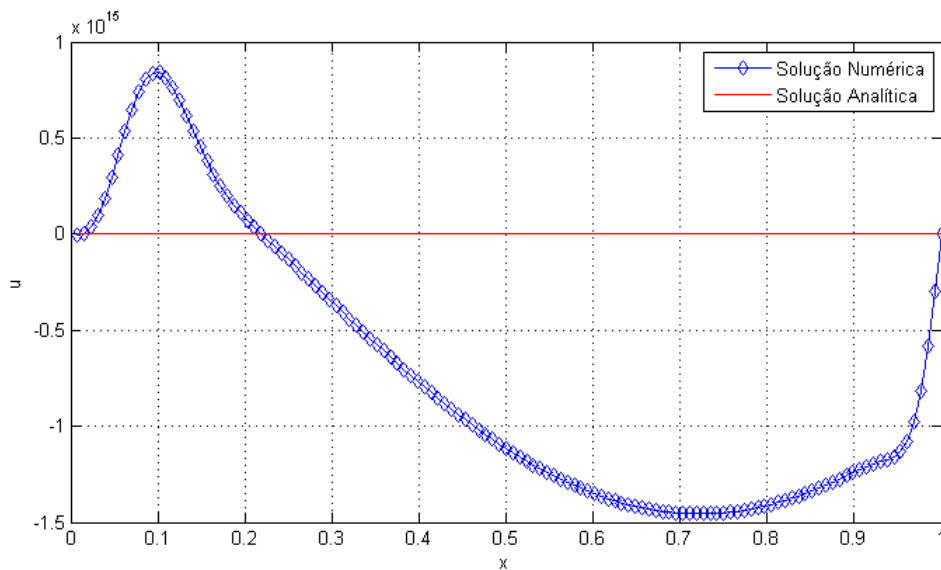
As oscilações iniciais provocam um aumento considerável dos resíduos gerados pelas soluções aproximadas. Esta não é uma característica desejável no processo de aproximação, pois isso interfere negativamente nos fatores de convergência, no tempo de CPU e outros parâmetros. Mesmo utilizando o método *Multigrid*, a ordem da perturbação do resíduo é a mesma, embora este execute poucos ciclos e com um tempo de processamento bem menor se comparado ao método *Singlegrid*.

FIGURA 56 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL  $y = 0,5$  COM 5 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO - 2D.



FONTE: Autor (2022).

FIGURA 57 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL  $y = 0,5$  COM 50 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO - 2D.



FONTE: Autor (2022).

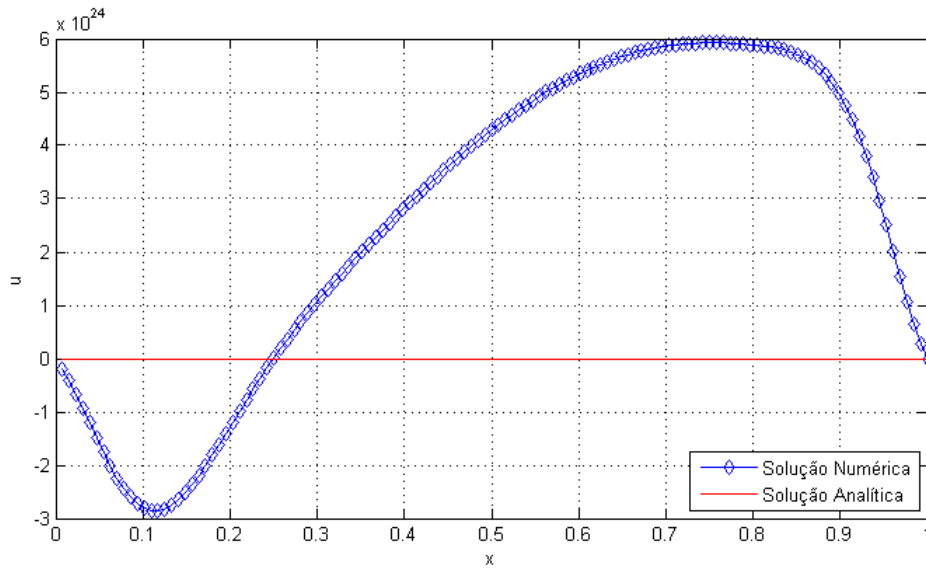
### 6.5.1 Fator de convergência médio

Aqui calculam-se os fatores de convergência médio para o método *Waveform Relaxation* aplicado ao problema bidimensional descrito no preâmbulo desta seção 6.5, mas com tempo final variável.

Pode-se escrever o tempo final dependendo diretamente de  $\lambda$  e  $\alpha$ , com a expressão

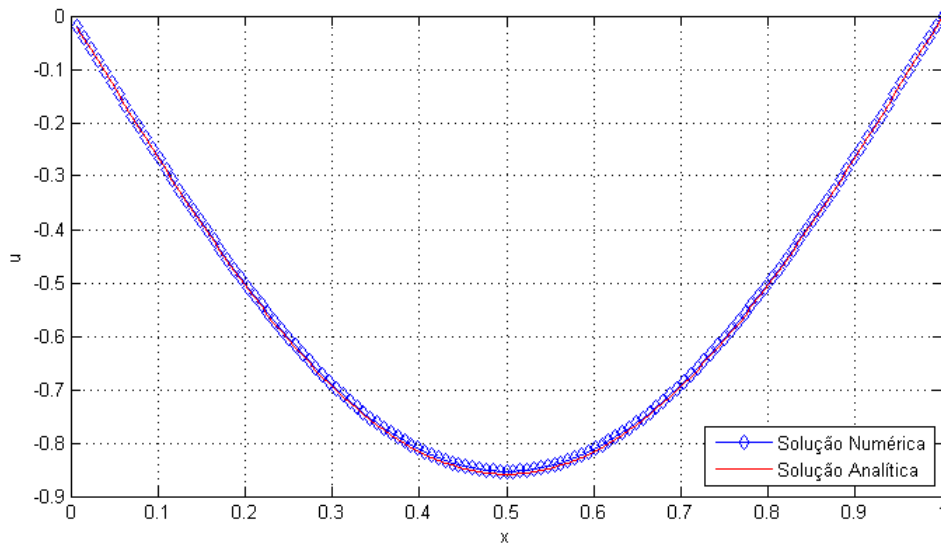


FIGURA 58 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL  $y = 0,5$  COM 200 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO - 2D.



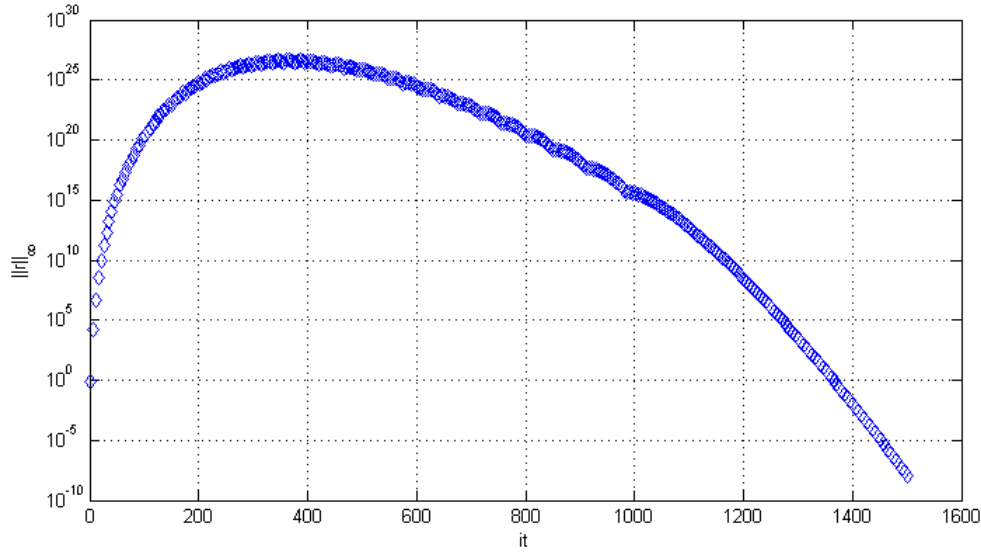
FONTE: Autor (2022).

FIGURA 59 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL  $y = 0,5$  COM 1500 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO - 2D.



FONTE: Autor (2022).

$t_f = \sqrt{\lambda}/\alpha$ . Depois, apresentam-se os resultados do exemplo, onde variam-se os valores do parâmetro  $\lambda$  e calculam-se  $\rho_m$  para um intervalo de  $\lambda$ , que serve para a grande maioria dos casos reais de propagação de ondas. A fim de verificar o comportamento do método *Waveform Relaxation* padrão, utilizando os métodos *Singlegrid* e *Multigrid*, veja a FIGURA 61.

FIGURA 60 – RESÍDUO *VERSUS* ITERAÇÕES PARA O *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* PADRÃO - 2D.

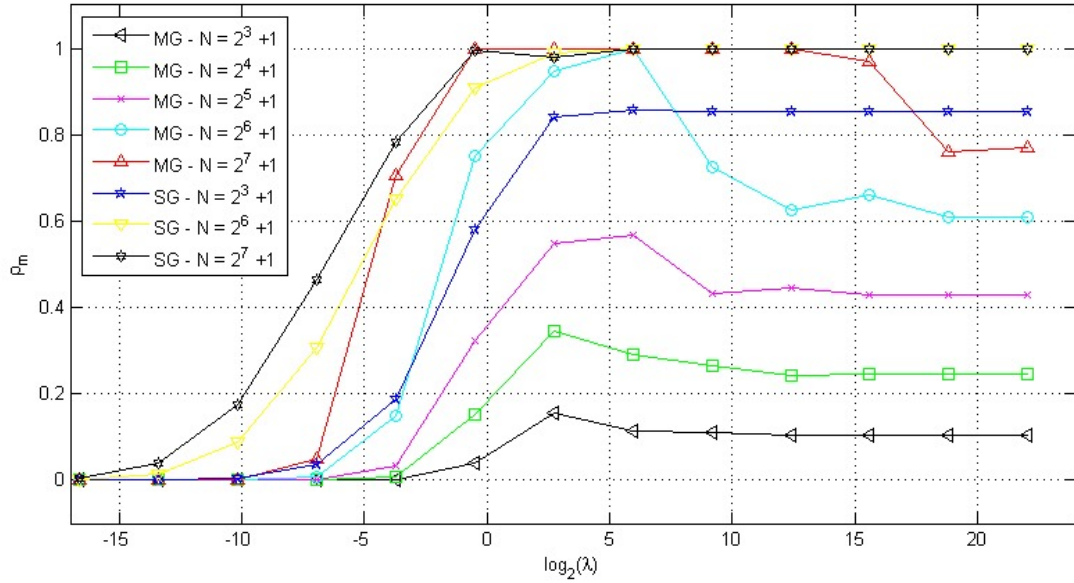
FONTE: Autor (2022).

Pode-se observar na FIGURA 61, que à medida que  $\lambda$  aumenta, os fatores de convergência médios dos métodos *Multigrid* e *Singlegrid* também aumentam, tornando-se  $\rho_m \approx 1.0$ , o que não é bom sinal. Com isto, pode-se concluir que o modelo de solução não é eficiente e nem robusto para valores intermédios ou grandes  $\lambda$  (neste caso tem-se muitas incógnitas e tempos finais grandes). Este resultado ratifica a hipótese de que é ineficiente aplicar o método *Waveform Relaxation* padrão para resolver a equação da onda bidimensional, seja com os métodos *Multigrid* ou *Singlegrid*.

O problema de simulação computacional de ondas abordado neste trabalho pode ser resolvido de diferentes maneiras, mas a maioria delas tem limitações, especialmente para tempos finais relativamente grandes. Para estes casos, esquemas explícitos exibem instabilidades que comprometem a confiabilidade da solução aproximada (BAILLY; JUVE, 2000). Até mesmo os métodos implícitos apresentam dificuldades para resolver estes casos, pois, como visto no início do processo iterativo, as soluções aproximadas apresentam fortes oscilações e que são suavizadas à medida que o número de iterações aumenta (ver FIGURAS 56 - 59). Como é sabido, isto compromete seriamente a eficiência de tais métodos. Portanto, procura-se melhorar sua aplicabilidade.

## 6.6 Método *Waveform Relaxation* com Subdomínios - 2D

A partir daqui, apresentam-se os resultados do método *Waveform Relaxation* combinado com o método dos Subdomínios para o problema de propagação de ondas bidimensional. Para tal, adota-se sempre  $K = 1$  para o número de subdomínios espaciais.

FIGURA 61 –  $\rho_m$  VERSUS  $\lambda$  USANDO SINGLEGRID E MULTIGRID COM WAVEFORM RELAXATION PADRÃO - 2D.

FONTE: Autor (2022).

Para o número  $J$  de subdomínios no tempo, adota-se sempre o menor valor possível, mas que seja capaz de fornecer bons fatores de convergência médios ( $\rho_m$ ).

Na TABELA 7 estão os valores utilizados para  $J$ , que podem variar dependendo dos valores de  $N^3 = N_x N_y N_t$  e  $\lambda$ . Salienta-se que foram realizadas numerosas simulações com as mais variadas combinações no número de subdomínios, onde a escolha de  $J$  foi baseada na análise empírica destes dados.

TABELA 7 – NÚMEROS DE SUBDOMÍNIOS NO TEMPO  $J$  ADOTADOS EM RELAÇÃO AOS VALORES DE  $N^3$  E  $\lambda$  - 2D

$N^3 \setminus \lambda$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$10^{+1}$	$10^{+2}$	$10^{+3}$	$10^{+4}$	$10^{+5}$	$10^{+6}$	$10^{+7}$
$(2^3 + 1)^3$	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
$(2^4 + 1)^3$	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
$(2^5 + 1)^3$	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
$(2^6 + 1)^3$	1	1	4	4	4	4	4	4	4	4
$(2^7 + 1)^3$	1	2	8	8	8	8	8	8	8	8
$(2^8 + 1)^3$	1	4	8	16	16	16	16	16	16	16

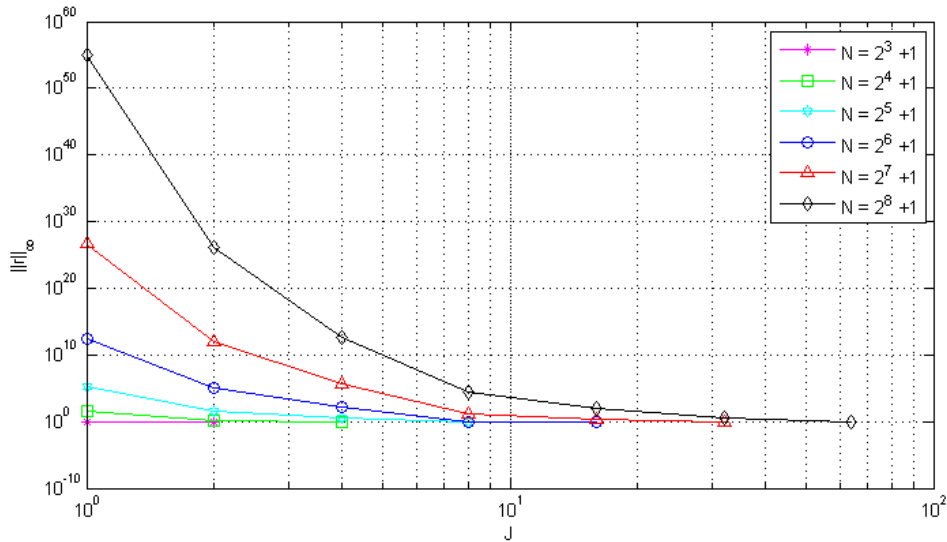
Os valores presentes na TABELA 7 foram adotados de modo a que os fatores de convergência médios sejam  $\rho_m \leq 0,4$ , com isto, tem-se um modelo numérico implícito considerado aceitável (TROTTERBERG; CLEES, 2009). Para que o nível de paralelização

seja maior, é de interesse ter o menor valor possível para  $J$ . Observam-se ainda que, para  $J = 1$ , tem-se o método *Waveform Relaxation* padrão, o qual sabe-se que não é eficiente para este tipo de problema.

Também é possível notar que para domínios com um número pequeno de pontos ( $N$  pequeno), é possível trabalhar com um número pequeno para  $J$ , independentemente do valor de  $\lambda$ . Mas para um número grande de pontos ( $N$  grande), dependendo do valor de  $\lambda$ , fica inviável trabalhar com um número muito pequeno para  $J$ , porque as instabilidades da técnica *Waveform Relaxation* padrão afetam negativamente os valores de  $\rho_m$ . Com base na TABELA 7, pode-se afirmar que para os casos simulados aqui é necessário trabalhar com um número máximo de 16 malhas espaciais em cada subdomínio temporal, garantindo assim que cada subdomínio espacial e temporal seja resolvido de forma eficiente.

Na FIGURA 62 pode-se observar o comportamento do resíduo máximo em relação ao número de subdomínios temporais  $J$ , assim como os valores de  $N$ , considerando  $K = 1$ .

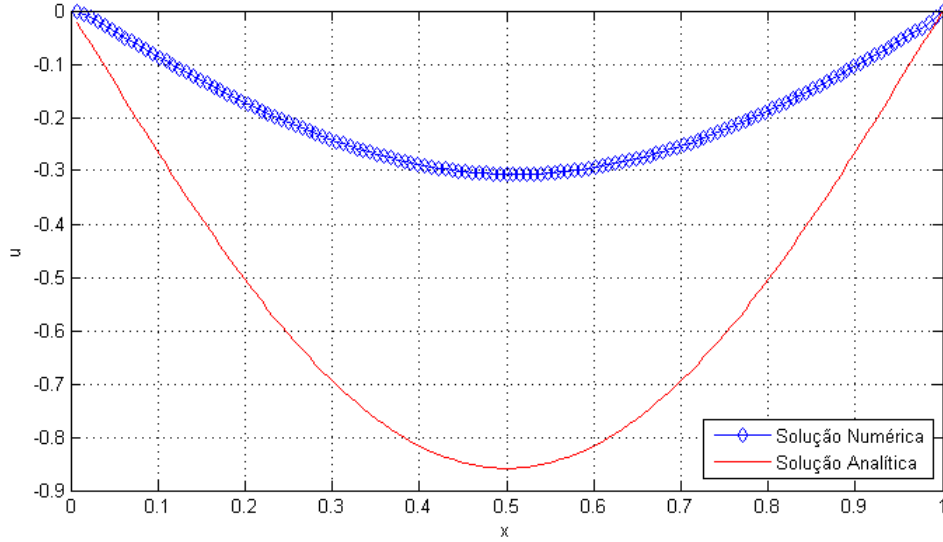
FIGURA 62 – RESÍDUO *VERSUS*  $J$ , PARA  $t_f = 1,0s$  e  $K = 1$ , PARA DIVERSOS VALORES DE  $N$ , COM *SINGLEGRID* E *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS.



FONTE: Autor (2022).

Resolve-se o problema modelado pelas Eqs. (2.31) a (2.34), que é o mesmo exemplo abordado na seção 6.5, mas usando-se *Waveform Relaxation* com  $J = 8$  subdomínios no tempo e  $K = 1$  subdomínio no espaço. A seguir apresenta-se as soluções na seção transversal com  $y = 0,5m$ , para 5, 50 e 200 iterações, respectivamente nas FIGURAS 63, 64 e 65. Na FIGURA 66 pode-se analisar o comportamento do resíduo com o aumento do número de iterações.

FIGURA 63 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL  $y = 0,5$  COM 5 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS ( $K = 1$  E  $J = 8$ ) - 2D.



FONTE: Autor (2022).

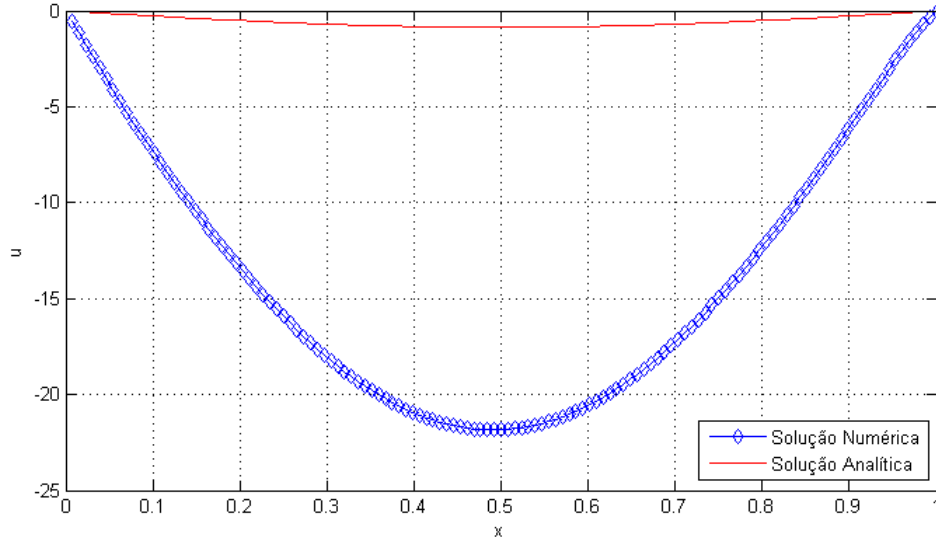
Observando e comparando as FIGURAS 66 e 60 verifica-se que as oscilações iniciais foram significativamente reduzidas ao utilizar o método *Waveform Relaxation* com o Subdomínios no tempo (ver FIGURA 66), sendo necessárias apenas 241 iterações para que a solução aproximada fique próxima da solução desejada, bem menor do que as 1510 iterações necessárias ao utilizar o método *Waveform Relaxation* padrão (ver FIGURA 60).

#### 6.6.1 Fator de convergência médio

A seguir na FIGURA 67 apresentam-se os resultados obtidos para o fator de convergência médio  $\rho_m$  ao aplicar o método *Waveform Relaxation* com subdomínios no tempo, para o *Multigrid* e *Singlegrid*, para a mesma gama de problemas descritos na FIGURA 61.

Notam-se que, ao contrário da FIGURA 61, na FIGURA 67 os valores de  $\rho_m$  para o método *Multigrid* tendem a estabilizar  $\rho_m \approx 0,35$  para  $\lambda$  e  $N$  variando, com o objetivo de abordar uma faixa maior problemas. Estes resultados demonstram a eficiência e robustez do método *Multigrid*. Notam-se também que os fatores de convergência médios do método *Singlegrid* aumentam e mantém-se próximos da unidade  $\rho_m \approx 1,0$ , sempre que  $\lambda$  e  $N$  aumentam. O número de subdomínios utilizados para cada uma das curvas na FIGURA 67 pode ser encontrado na TABELA 7, onde para valores grandes de  $N$  e  $\lambda$  adotam-se  $J$  maiores. Pode-se observar também que para valores intermediários de  $\lambda$ , tem-se os maiores valores de  $\rho_m$  para o método *Multigrid*, mas que em geral, ainda assim são bem menores do que tais valores com o método *Singlegrid*.

FIGURA 64 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL  $y = 0,5$  COM 50 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS ( $K = 1$  E  $J = 8$ ) - 2D.



FONTE: Autor (2022).

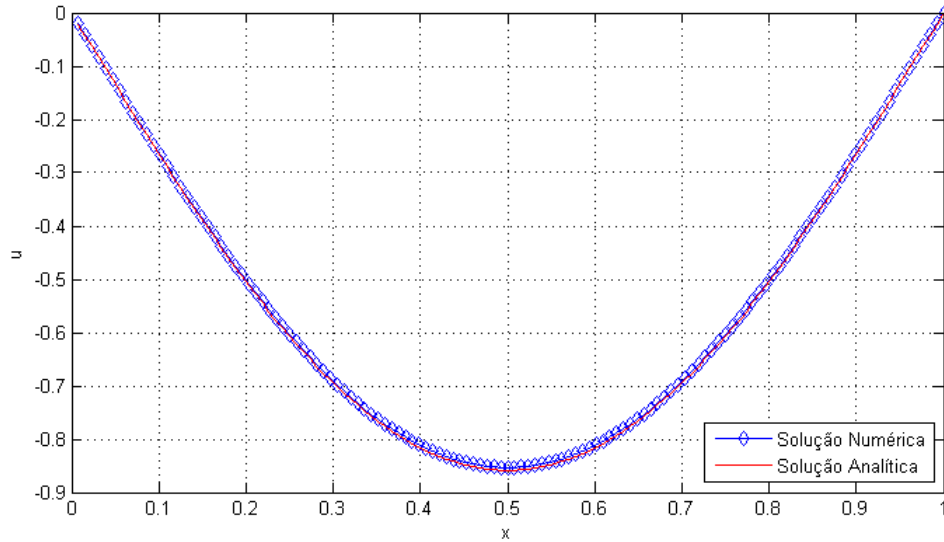
### 6.6.2 *Speed-up*

Encontra-se uma forte relação entre o *Speedup*, que é a razão entre o tempo computacional do *Singlegrid* ( $t_{CPUSG}$ ) e *Multigrid* ( $t_{CPUMG}$ ) (Eq. 6.2) e nível de refino da malha. Ver FIGURA 68, para diferentes valores de  $\lambda$ . Lembrando que  $\mathbf{N} = (N_x - 2)(N_y - 2)(N_t - 2)$  é o número total de incógnitas (graus de liberdade).

Nota-se que em todos os casos, o *Speed-up* aumenta para valores mais elevados de  $\mathbf{N}$ , que é uma propriedade desejável, e aumenta significativamente para valores mais elevados de  $\lambda$ . Por exemplo, com  $\lambda = 10^1$  e  $N = 2^7 + 1$ , ou seja, com 2146689 pontos e 2048383 graus de liberdade, utilizando o método *Multigrid*, tem-se  $t_{CPUMG} = 455,19$  s para  $J = 1$  e  $t_{CPUMG} = 80,78$  s para  $J = 8$ . Neste caso, o resíduo máximo vai de  $5,19\text{E}+27$  para  $2,39\text{E}+03$ . Se o mesmo exemplo for resolvido utilizando o método *Singledrid*, tem-se as mesmas ordens para o resíduo máximo, mas o tempo computacional vai de  $t_{CPUSG} = 2447,46$  s para  $t_{CPUSG} = 495,29$  s. Ou seja, utilizando o método *Multigrid* com  $J = 8$ , resolve-se o problema aproximadamente 30 vezes mais rápido do que utilizando *Singlegrid* com  $J = 1$  e essa diferença é maior para valores grandes de  $N$  ou  $\lambda$ .

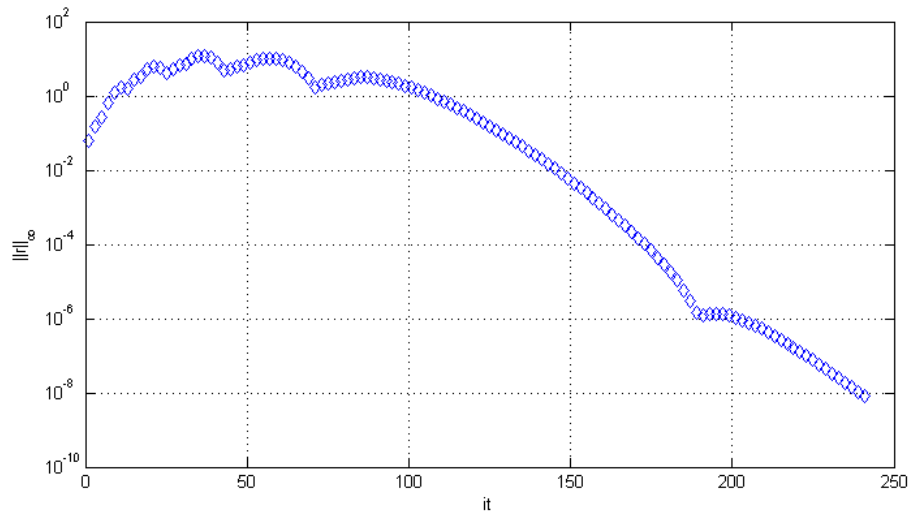
Para valores maiores de  $\lambda$ , por exemplo com  $\lambda = 10^5$ ,  $N = 2^7 + 1$  e  $J = 1$ , utilizando o método *Multigrid*, tem-se  $t_{CPUMG} = 222,68$  s e utilizando o método *Singledrid*, tem-se  $t_{CPUSG} = 26262,72$  s. Ou seja, obtém-se a mesma solução, mas aproximadamente 122 vezes mais rápida quando se utiliza o método *Multigrid*. Esta diferença entre os métodos é ainda maior quando se trabalha com  $J = 8$  subdomínios no tempo, uma vez

FIGURA 65 – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA O PERFIL  $y = 0,5$  COM 200 ITERAÇÕES DO *SINGLEGRID* COM *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS ( $K = 1$  E  $J = 8$ ) - 2D.



FONTE: Autor (2022).

FIGURA 66 – RESÍDUO *VERSUS* ITERAÇÕES COM *SINGLEGRID* USANDO *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS NO TEMPO (PARA  $J = 8$ ).

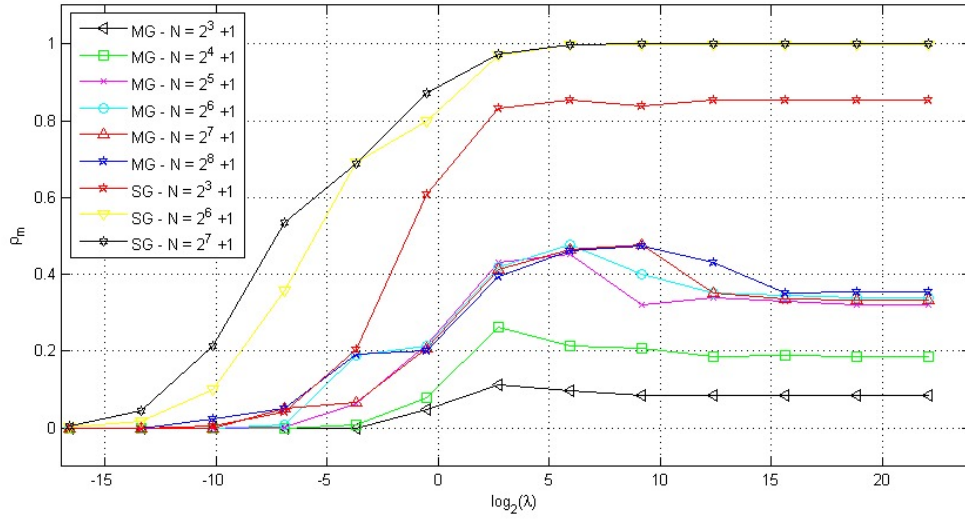


FONTE: Autor (2022).

que o *Multigrid* resolve o problema 381 vezes mais rápido. Na seção 6.6.3 apresenta-se uma análise dos efeitos do *Multigrid* e Subdomínios separadamente.

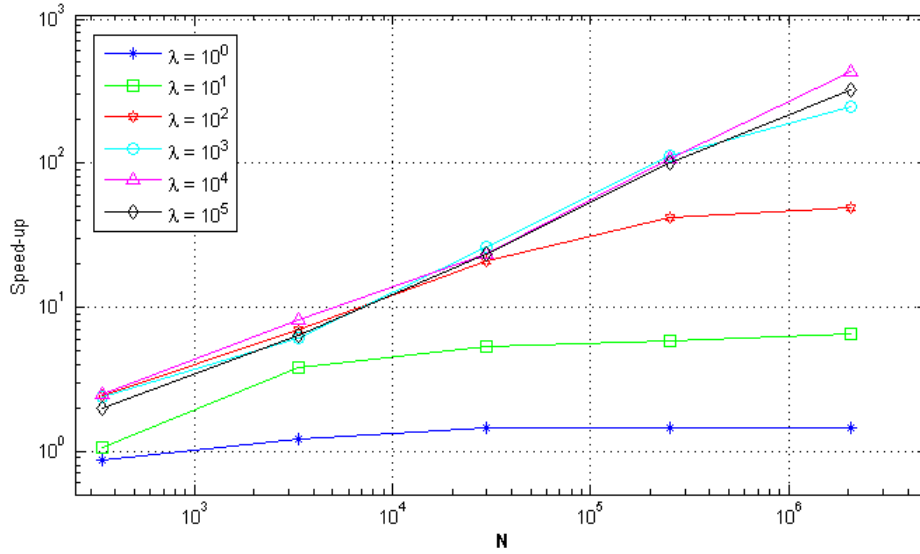
### 6.6.3 Outras comparações

Pode-se perceber que a combinação do método Subdomínios com o método *Multigrid* produz excelentes resultados para o *Waveform Relaxation*. Mas a contribuição

FIGURA 67 –  $\rho_m$  VERSUS  $\lambda$  USANDO WAVEFORM RELAXATION COM SUBDOMÍNIOS - 2D.

FONTE: Autor (2022).

FIGURA 68 – SPEED-UP VERSUS N USANDO WAVEFORM RELAXATION COM SUBDOMÍNIOS - 2D.



FONTE: Autor (2022).

que cada método produz e sua influência na melhora dos resultados pode ser medida através da análise dos parâmetros como o resíduo máximo  $\|r\|_\infty$ , tempo de processamento  $t_{CPU}$  e fator de convergência médio  $\rho_m$ , que podem ser observados na TABELA8, onde fixam-se  $\lambda = 10^1$ ,  $N = 2^7 + 1$ ,  $K = 1$  e varia-se o número de subdomínios  $J$ . Nota-se que o valor de  $N$  adotado gera um problema relativamente grande.

Nesta tabela, pode-se verificar a interferência do número de subdomínios nos



TABELA 8 – PARÂMETROS DO *MULTIGRID* E *SINGLEGRID* PARA  $\lambda = 10^1$ ,  $N = 2^7 + 1$ ,  $K = 1$ , USANDO *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS - 2D.

$J$	$t_{CPU} - SG$	$t_{CPU} - MG$	$\ r\ _\infty$	$\rho_m - SG$	$\rho_m - MG$
1	2447,46s	455,19	5,19E+27	9,997E-01	9,994E-01
2	1324,46s	214,58s	7,10E+13	9,904E-01	9,224E-01
4	768,75s	120,05s	1,09E+06	9,827E-01	6,027E-01
8	495,29s	80,78s	2,39E+03	9,718E-01	4,133E-01
16	351,34s	61,18s	8,70E+01	9,565E-01	2,149E-01

três parâmetros analisados e para ambos os métodos (*Multigrid* e *Singlegrid*). Com isto, observa-se que o resíduo máximo  $\|r\|_\infty$  vale aproximadamente 5,19E+27 com  $J = 1$ , mas com  $J = 16$  este parâmetro cai para 8,70E+01. Nota-se também uma redução nos fatores de convergência médias  $\rho_m$ , mas no método *Singlegrid* isto é menos evidente, passando de 9,997E-01 para 9,565E-01. Já para o método *Multigrid*, esta redução é maior, passando de 9,994E-01 para 2,149E-01. Outra vantagem está no tempo de processamento  $t_{CPU}$ , que reduz significativamente à medida que o número de subdomínios aumenta, passando de 2447,46s para 351,34s com *Singlegrid* e de 455,19s para 61,18s com *Multigrid*.

Como observado anteriormente, para problemas com um número grande de pontos  $N$ , tem-se grandes valores para  $\lambda$  em malhas espaciais mais refinadas ou tempos finais maiores (problemas mais realísticos). Para tal, resolve-se o problema dado pela TABELA 8, mas com um valor de  $\lambda$  diferente, com  $\lambda = 10^5$  (ver TABELA 9).

TABELA 9 – PARÂMETROS DO *MULTIGRID* E *SINGLEGRID* PARA  $\lambda = 10^5$ ,  $N = 2^7 + 1$ ,  $K = 1$ , USANDO *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS - 2D.

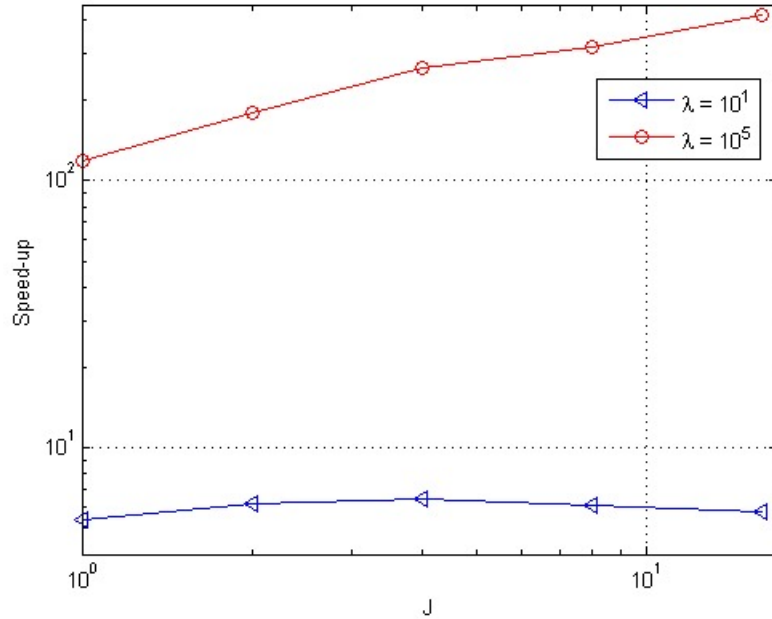
$J$	$t_{CPU} - SG$	$t_{CPU} - MG$	$\ r\ _\infty$	$\rho_m$ -SG	$\rho_m$ -MG
1	26262,72s	222,68s	3,627E+03	9,995E-01	7,958E-01
2	23751,65s	132,95s	3,627E+03	9,994E-01	6,748E-01
4	22920,39s	87,15s	3,627E+03	9,994E-01	5,047E-01
8	21695,46s	68,87s	3,627E+03	9,993E-01	3,354E-01
16	25469,29s	61,10s	3,627E+03	9,993E-01	2,038E-01

Observa-se na TABELA 9 que a vantagem ao utilizar o método *Multigrid* é ainda maior para  $\lambda = 10^5$ , em relação ao uso do *Singlegrid*. Neste caso não houve diminuição do valor do resíduo máximo, mas não apresenta valores tão grandes como os apresentados na TABELA 8. Mas a redução dos fatores de convergência médios do método *Singlegrid* é quase imperceptível, passando de 9,995E-01 para 9,993E-01. No método *Multigrid*, este mesmo parâmetro vai de 7,958E-01 para 2,038E-01, o que representa uma melhora significativa.

O tempo de processamento do método *Singlegrid* presente na TABELA 8 não reduz nas mesmas proporções dos resultados presentes na TABELA 9. Mas para o método

*Multigrid* o comportamento é muito semelhante em ambos os casos. Na FIGURA 69 analisa-se o comportamento do *Speed-up* para um número diferente de subdomínios  $J$ , para  $\lambda = 10^1$  e  $10^5$  (dados das TABELAS 8 e 9).

FIGURA 69 – *SPEED-UP VERSUS J* USANDO *WAVEFORM RELAXATION* COM SUBDOMÍNIOS - 2D.

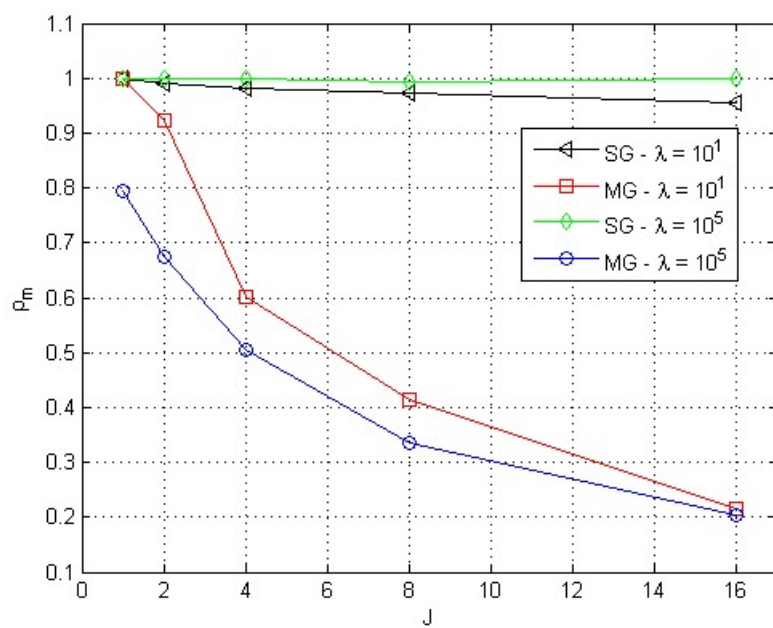


FONTE: Autor (2022).

Isso evidencia que o método dos Subdomínios aplicado sem o método *Multigrid* não é tão eficiente para problemas grandes, mas quando os dois métodos são combinados, tem-se um excelente método de solução para o problema da propagação de ondas aqui abordado. Pode-se verificar isso ao comparar o tempo de processamento do método *Singlegrid* que vai de 26262,72s a 25469,29s, e o tempo de processamento do método *Multigrid* que vai de 222,68s a 61,10s, uma diferença aproximada de até 423 vezes mais rápido ao usar o método *Multigrid* em relação ao uso do método *Singlegrid*.

O fator de convergência médio  $\rho_m$  do método *Singlegrid* não sofre grandes alterações como as encontradas ao usar o método *Multigrid*, para os valores de  $\lambda$  analisados. Percebe-se também que a variação do número de subdomínios  $J$  produz melhoras significativas para o método *Multigrid*, que não ocorrem ao usar o método *Singlegrid*. Este comportamento pode ser visto na FIGURA 70.

FIGURA 70 –  $\rho_m$  VERSUS  $J$  USANDO WAVEFORM RELAXATION COM SUBDOMÍNIOS - 2D.



FONTE: Autor (2022).

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 7.1 Conclusões gerais

Neste trabalho de tese apresentam-se esquemas de solução eficientes e robustos para o problema de propagação de ondas 1D e 2D com o método *Time-Stepping* e com o método *Waveform Relaxation*. Para tal, usam-se discretizações utilizando o MDF ponderado por um parâmetro  $\eta$  em diferentes estágios de tempo, obtendo assim, um método implícito de quarta ordem para o problema unidimensional e de segunda ordem no caso bidimensional. Ao se empregar o método *Multigrid* para solucionar o sistema de equações resultante com *solver* Gauss-Seidel lexicográfico e *red-black*, encontram-se soluções acuradas, com um tempo computacional menor se comparado ao método *Singlegrid*. O método *Singlegrid* contém valores de  $\rho_m$  muito próximos da unidade quando  $\lambda$  é grande, o que implica em um processo lento e pouco eficiente nestes casos. Mas o uso do método *Multigrid* mostrou-se muito vantajoso para esse tipo de problema, pois apresentaram-se bons fatores valores de  $\rho_m$  e robustez para as faixas de  $\lambda$  analisadas.

Realizaram-se testes e comparações entre os métodos *Multigrid* e *Singlegrid*, usando o método paralelizável *Waveform Relaxation* padrão e *Waveform Relaxation* com Subdomínios no tempo, para se obter as soluções de problemas de propagação de ondas unidimensionais e bidimensionais. Os resultados utilizando *Waveform Relaxation* padrão apresentam sérias limitações, devido ao aumento de oscilações no início do processo iterativo, gerando uma abordagem ineficiente para esta classe de problemas. É importante também salientar que o método *Multigrid* aplicado sem os Subdomínios no tempo teve melhorias limitadas. Resultados igualmente ineficientes são obtidos se o método de Subdomínios no tempo for aplicado sem o método *Multigrid*, indicando uma forte interdependência destes métodos. Evidencia-se que uma das principais contribuições deste trabalho está nos excelentes resultados que foram obtidos da combinação *Waveform Relaxation* com Subdomínios no tempo e o método *Multigrid*. Assim como as significativas melhores nos parâmetros analisados, especialmente em termos de fatores de convergência médios, acelerações e redução das oscilações iniciais, o que diminui muito o tempo de processamento.

### 7.2 Principais contribuições

Esta seção apresenta algumas das principais contribuições deste trabalho e que influenciam diretamente no estado da arte, especialmente na simulação de problemas envolvendo a equação da onda unidimensional e bidimensional.

- Verificou-se numericamente que as ordens efetivas e aparentes são as mesmas para os métodos *Time-Stepping* e *Waveform Relaxation*.

- Apresentou-se uma estratégia eficiente de redução dos resíduos gerados pelo método *Waveform Relaxation* ao usar subdomínios no tempo.
- Aplicou-se de forma satisfatória o método *Multigrid* para a equação da onda com as estratégias *Time-Stepping* e *Waveform Relaxation*.
- Obteve-se excelentes tempos computacionais, fatores de convergência médios, ordens de complexidade e *Speed-up*.
- Possibilitou-se a aplicação de códigos paralelizáveis para obter a solução numérica da equação da onda, que possui inúmeras aplicações práticas.

Estes resultados geraram até aqui três artigos publicados em periódicos, "*Performance of the multigrid method with timestepping to solve 1D and 2D wave equations*" no *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics* (2021), "*Subdomain Method in time with Waveform Relaxation in space applied to the Wave Equation combined with the Multigrid Method*" na *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* (2022) e "*Computational simulation of one-dimensional waves with the Multigrid Method*" no *Brazilian Journal of Development* (2022); um artigo publicado em congresso internacional, "*Approximate solution of the wave equation using the Multigrid Method*" no *XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering* (CILAMCE-2020), um artigo submetido em periódico "*A parallelizable method for two-dimensional wave propagation using subdomains in time with Multigrid and Waveform Relaxation*" no *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* (2022) e dois programas de computador "*Wave 1D Time Stepping*" e "*Wave 2D Time Stepping*" registrados junto ao Instituto Nacional de Propriedade Industrial (INPI).

### 7.3 Propostas para trabalhos futuros

A metodologia aqui apresentada, pode ser estendida a problemas mais realistas, considerando forças externas que operam no problema, por exemplo para o caso 1D, inserindo o termo  $F(x, t)$  no lado direito da Eq. (2.17), porque, segundo (TROTTERBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2000), isto provoca apenas alterações do termo fonte do sistema de equações, não alterando o desempenho do método. Outros problemas mais realistas também podem ser considerados e com pequena adaptação do código utilizado nesta tese, como por exemplo, equação da onda quando se levam em conta as forças amortecedoras e/ou restauradoras elásticas.

A aplicação do método de varredura no tempo *Space-Time* também pode ser realizada para a equação da onda. Alguns testes preliminares apresentam a mesma

característica no aumento inicial do resíduo que ocorre com o método *Waveform Relaxation*. Portanto, a aplicação do método dos subdomínios pode produzir resultados satisfatórios.

Outra possibilidade é a de verificar a aplicabilidade do método *Waveform Relaxation* com Subdomínios no tempo para problemas tridimensionais tornando possível a obtenção de métodos paralelizáveis, respeitando-se as limitações de memória. Assim como a aplicação do método *Multigrid*, já que, com isso, pode-se diminuir significativamente os fatores de convergência médios.

## REFERÊNCIAS

- ADAMS, M. *et al.* Parallel multigrid smoothing: polynomial versus gauss–seidel. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 188, n. 2, p. 593–610, 2003. Citado na página 65.
- AVALOS, G.; LASIECKA, I. Differential riccati equation for the active control of a problem in structural acoustics. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer, v. 91, n. 3, p. 695–728, 1996. Citado na página 22.
- BACCOUCH, M.; TEMIMI, H. A high-order space–time ultra-weak discontinuous galerkin method for the second-order wave equation in one space dimension. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 389, p. 113331, 2021. ISSN 0377-0427. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 63.
- BAILLY, C.; JUVE, D. Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized euler equations. *AIAA journal*, v. 38, n. 1, p. 22–29, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 22, 83 e 96.
- BAKHVALOV, N. S. On the convergence of relaxation method with natural constraints on the elliptic operator. *URSS Comp. Math. Phys.*, v. 1, n. 5, 1966. Citado na página 26.
- BAMBERGER, A.; GLOWINSKI, R.; TRAN, Q. H. A domain decomposition method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients and grid change. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 34, n. 2, p. 603–639, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 39.
- BANERJEE, P. K.; BUTTERFIELD, R. Boundary element methods in engineering science. McGraw-Hill London, v. 17, 1981. Citado na página 37.
- BASKONUS, H. M.; BULUT, H.; SULAIMAN, T. A. New complex hyperbolic structures to the lonngren-wave equation by using sine-gordon expansion method. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, Sciendo, v. 4, n. 1, p. 129–138, 2019. Citado na página 22.
- BELLEN, A.; ZENNARO, M. Parallel algorithms for initial-value problems for difference and differential equations. *Journal of Computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 25, n. 3, p. 341–350, 1989. Citado na página 26.
- BENEDUSI, P.; MINION, M. L.; KRAUSE, R. An experimental comparison of a Space-Time Multigrid method with PFASST for a reaction-diffusion problem. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 99, p. 162–170, 2021. Citado na página 29.
- BOLTEN, M.; MOSER, D.; SPECK, R. A Multigrid perspective on the parallel full approximation scheme in space and time. *Numerical Linear Algebra with Applications*, Wiley Online Library, v. 24, n. 6, p. e2110, 2017. Citado na página 29.
- BRANDT, A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, v. 31, n. 138, p. 333–390, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 48.
- BRANDT, A. Multigrid techniques: 1984 guide with applications to fluid dynamics. Technical Report GMDStudien 85, 1984. Citado na página 23.
- BRANDT, A.; LIVNE, O. E. Multigrid techniques: 1984 guide with applications to fluid dynamics. SIAM, v. 67, 2011. Citado na página 48.

- BRANDT, A.; LIVSHITS, I. Wave-ray multigrid method for standing wave equations. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, v. 6, n. 162-181, p. 91, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 37.
- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. *A Multigrid Tutorial*. 2nd. ed. Philadelphia: SIAM, 2000. Citado 8 vezes nas páginas 21, 24, 29, 47, 49, 50, 55 e 73.
- BRITT, S.; TURKEL, E.; TSYNKOV, S. A high order compact time/space finite difference scheme for the wave equation with variable speed of sound. *Journal of Scientific Computing*, Springer, v. 76, n. 2, p. 777–811, 2018. Citado na página 25.
- BURDEN, R.; FAIRES, J. Numerical analysis. *Brooks/Cole Cengage Learning*, 2016. Citado 10 vezes nas páginas 20, 38, 39, 42, 46, 47, 55, 65, 69 e 74.
- CHARTIER, P.; PHILIPPE, B. A parallel shooting technique for solving dissipative ode's. *Computing*, Springer, v. 51, n. 3-4, p. 209–236, 1993. Citado na página 26.
- CHEN, M. *et al.* An explicit algorithm for modeling planar 3d hydraulic fracture growth based on a super-time-stepping method. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 191, p. 370–389, 2020. Citado na página 26.
- CHOPTUIK, M. W. *Using Multigrid to Solve Time Dependent PDEs*. 2008. 4 Feb. 2008 <<http://www.sfb.tpi.uni-jena.de/VideoSeminar/Files/20080204-choptuik.pdf>>. Citado na página 25.
- CLEVENGER, T. C. *et al.* A flexible, parallel, adaptive geometric multigrid method for fem. *arXiv preprint arXiv:1904.03317*, 2019. Citado na página 25.
- CONTE, D.; D'AMBROSIO, R.; PATERNOSTER, B. Gpu-acceleration of waveform relaxation methods for large differential systems. *Numerical Algorithms*, Springer, v. 71, n. 2, p. 293–310, 2016. Citado na página 26.
- CRAIG, C. D. Multigrid methods in science and engineering. *IBM T.F. Watson Research Center and Yale University, IEE*, 1966. Citado na página 23.
- CROW, M.; ILIC, M. The parallel implementation of the waveform relaxation method for transient stability simulations. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 5, n. 3, p. 922–932, 1990. Citado na página 57.
- CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE, M. *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 20, 21, 37, 40, 42, 65 e 68.
- DAI, X.; MADAY, Y. Stable parareal in time method for first-and second-order hyperbolic systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 35, n. 1, p. A52–A78, 2013. Citado na página 27.
- DEHGHAN, M.; MOHEBBI, A. The combination of collocation, finite difference, and multigrid methods for solution of the two-dimensional wave equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, Wiley Online Library, v. 24, n. 3, p. 897–910, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 22, 26, 37, 51, 65 e 67.



- DEVI, V. *et al.* Lagrange's operational approach for the approximate solution of two-dimensional hyperbolic telegraph equation subject to dirichlet boundary conditions. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 367, p. 1–16, 2020. Citado na página 22.
- DOBREV, V. *et al.* Two-level convergence theory for Multigrid reduction in time MGRIT. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 39, n. 5, p. S501–S527, 2017. Citado na página 28.
- DURRAN, D. R. The third-order adams-bashforth method: An attractive alternative to leapfrog time differencing. *Monthly weather review*, v. 119, n. 3, p. 702–720, 1991. Citado na página 39.
- ELMAN, H. C.; ERNST, O. G.; O'LEARY, D. P. A multigrid method enhanced by krylov subspace iteration for discrete helmholtz equations. *SIAM Journal on scientific computing*, SIAM, v. 23, n. 4, p. 1291–1315, 2001. Citado na página 48.
- ERBAY, H.; ERBAY, S.; ERKIP, A. A semi-discrete numerical method for convolution-type unidirectional wave equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 387, p. 112496, 2021. ISSN 0377-0427. Numerical Solution of Differential and Differential-Algebraic Equations. Selected Papers from NUMDIFF-15. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 63.
- ERNST, O. G.; GANDER, M. J. Multigrid methods for helmholtz problems: a convergent scheme in 1d using standard components. *Direct and Inverse Problems in Wave Propagation and Applications. De Gruyter*, p. 135–186, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 22, 25 e 37.
- EYMARD, R.; GALLOUËT, T.; HERBIN, R. Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, Elsevier, v. 7, p. 713–1018, 2000. Citado na página 37.
- FALGOUT, R. D. *et al.* Parallel time integration with Multigrid. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 36, n. 6, p. C635–C661, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 28.
- FALGOUT, R. D. *et al.* Multigrid methods with space-time concurrency. *Computing and Visualization in Science*, Springer, v. 18, n. 4-5, p. 123–143, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 50.
- FEDORENKO, R. P. The speed of convergence of one iterative process. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Elsevier, v. 4, n. 3, p. 227–235, 1964. Citado na página 23.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3nd. ed. New York: Springer, 2002. Citado na página 37.
- FOLTYN, L.; LUKÁŠ, D.; PETEREK, I. Domain decomposition methods coupled with parareal for the transient heat equation in 1 and 2 spatial dimensions. *Applications of Mathematics*, Springer, v. 65, n. 2, p. 173–190, 2020. Citado na página 28.
- FORSYTHE, G. E.; WASOW, W. R. Finite difference methods. *Partial Differential*, 1960. Citado na página 37.
- FRANCO, S. R. Métodos multigrid espaço-tempo para resolver as equações do calor e da poroelasticidade. *Universidade Federal do Paraná - UFPR*, Tese de doutorado, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.

- FRANCO, S. R. *et al.* Multigrid method based on a space-time approach with standard coarsening for parabolic problems. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 317, p. 25–34, 2018a. Citado 4 vezes nas páginas 25, 27, 29 e 47.
- FRANCO, S. R. *et al.* A multigrid waveform relaxation method for solving the poroelasticity equations. *Submetido para Computational and Applied Mathematics*, Springer, v. 37, p. 4805–4820, 2018b. Citado 4 vezes nas páginas 25, 50, 56 e 58.
- GANDER, M. J. Overlapping schwarz for linear and nonlinear parabolic problems. *9th International Conference on Domain Decomposition Methods*, p. 97–104, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 56.
- GANDER, M. J. 50 years of time parallel time integration: Multiple shooting and time domain decomposition methods. Springer, p. 69–113, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 21, 23, 26 e 27.
- GANDER, M. J.; HALPERN, L.; NATAF, F. Optimal schwarz waveform relaxation for the one dimensional wave equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 41, n. 5, p. 1643–1681, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 39.
- GANDER, M. J. *et al.* A direct time parallel solver by diagonalization for the wave equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 41, n. 1, p. A220–A245, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 22, 27 e 37.
- GANDER, M. J.; KWOK, F.; MANDAL, B. C. Dirichlet–neumann waveform relaxation methods for parabolic and hyperbolic problems in multiple subdomains. *BIT Numerical Mathematics*, Springer, p. 1–35, 2020. Citado 12 vezes nas páginas 22, 25, 37, 47, 60, 61, 62, 63, 64, 76, 78 e 84.
- GANDER, M. J.; NEUMULLER, M. Analysis of a new space-time parallel multigrid algorithm for parabolic problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 38, n. 4, p. A2173–A2208, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 25, 28 e 29.
- GASPAR, F. J. *et al.* An efficient multigrid solver for a reformulated version of the poroelasticity system. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, v. 196, 2007. Citado na página 50.
- GASPAR, F. J.; RODRIGO, C. Local fourier analysis of vanka smoother based multigrid for staggered discretization of biot’s consolidation problem. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, v. 9, n. 28, p. 18–25, 2015. Citado na página 25.
- GILADI, E.; KELLER, H. B. Space-time domain decomposition for parabolic problems. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 93, n. 2, p. 279–313, 2002. Citado na página 27.
- GONG, S. *et al.* Convergence of parallel overlapping domain decomposition methods for the helmholtz equation. *Numerical Analysis*, Cornell University, 2021. Citado na página 61.
- GOPAL, V.; MOHANTY, R.; JHA, N. New nonpolynomial spline in compression method of for the solution of 1d wave equation in polar coordinates. *Advances in Numerical Analysis*, Hindawi, 2013. Citado na página 22.

- GUPTA, M. M.; KOUATCHOU, J.; ZHANG, J. Comparison of second- and fourth-order discretizations for multigrid poisson solvers. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS*, v. 132, p. 226–232, 1997. Citado na página 24.
- HACKBUSCH, W. *Parabolic multi-grid methods*. Berlin: Symposium on Computing methods in applied sciences and engineering VI, 1985. 189–197 p. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 48.
- HACKBUSCH, W. *Multi-grid methods and applications*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013. v. 4. Citado na página 25.
- HAUT, T. S. *et al.* A high-order time-parallel scheme for solving wave propagation problems via the direct construction of an approximate time-evolution operator. *IMA Journal of Numerical Analysis*, Oxford University Press, v. 36, n. 2, p. 688–716, 2016. Citado na página 27.
- HORTON, G.; VANDEWALLE, S. A space-time multigrid method for parabolic partial differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 16, n. 4, p. 848–864, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 23, 26, 73 e 82.
- HORTON, G.; VANDEWALLE, S. A space time multigrid method for parabolic partial differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 16, n. 4, p. 848–864, 1995. Citado na página 29.
- HORTON, G.; VANDEWALLE, S.; WORLEY, P. An algorithm with polylog parallel complexity for solving parabolic partial differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 16, n. 3, p. 531–541, 1995. Citado na página 29.
- ISERLES, A. Generalized leapfrog methods. *IMA Journal of Numerical Analysis*, Oxford University Press, v. 6, n. 4, p. 381–392, 1986. Citado na página 39.
- JI, B. *et al.* Adaptive second-order crank–nicolson time-stepping schemes for time-fractional molecular beam epitaxial growth models. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 42, n. 3, p. B738–B760, 2020. Citado na página 26.
- KELKAR, K. M. Iterative method for the numerical prediction of heat transfer in problems involving large differences in thermal conductivities. *Numerical Heat Transfer, Part B Fundamentals*, Taylor & Francis, v. 18, n. 1, p. 113–128, 1990. Citado na página 23.
- KELLER, H. B. *Numerical methods for two-point boundary-value problems*. New Yor: Courier Dover Publications, 1992. Citado na página 26.
- KLAIJ, C. M.; VEGT, J. J. van der; VEN, H. van der. Space–Time discontinuous Galerkin method for the compressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 217, n. 2, p. 589–611, 2006. Citado na página 27.
- KÖCHER, U.; BAUSE, M. Variational Space–Time methods for the wave equation. *Journal of Scientific Computing*, Springer, v. 61, n. 2, p. 424–453, 2014. Citado na página 22.
- KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*. 10nd. ed. Wiley: Springer, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 38.

- LELARASMEE, E.; RUEHLI, A. E.; VINCENTELLI, S. A. L. The waveform relaxation method for time domain analysis of large scale integrated circuits theory and applications. *IEEE Trans. Comput. Aided Design Integr. Circ. Systems*, n. 1, p. 131–145, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 56.
- LENT, J. V. Multigrid methods for time-dependent partial differential equations. *Katholieke Universiteit Leuven*, Thesis, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 24, 26 e 29.
- LENT, J. V.; VANDEWALLE, S. Multigrid waveform relaxation for anisotropic partial differential equations. *Numerical Algorithms*, v. 31, p. 361–380, 2002. Citado na página 24.
- LIAO, H.-l.; SUN, Z.-z. Maximum norm error estimates of efficient difference schemes for second-order wave equations. *Journal of computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 235, n. 8, p. 2217–2233, 2011. Citado na página 40.
- LIAO, H.-l.; TANG, T.; ZHOU, T. A second-order and nonuniform time-stepping maximum-principle preserving scheme for time-fractional allen-cahn equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, p. 109473, 2020. Citado na página 26.
- LIU, J.; JIANG, Y.-L. Waveform relaxation for reaction–diffusion equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 235, n. 17, p. 5040–5055, 2011. ISSN 0377-0427. Citado na página 56.
- LLORENTE, I. M.; MELSON, N. D. Robust multigrid smoothers for three dimensional elliptic equations with strong anisotropies. *ICASE*, v. 98-37, 1998. Citado na página 24.
- LLORENTE, I. M.; TIRADO, F. Relationships between efficiency and execution time of full multigrid methods on parallel computers. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Systems*, v. 6, n. 8, 1997. Citado na página 24.
- LUBICH, C.; OSTERMANN, A. Multigrid dynamic iteration for parabolic equations. *BIT*, v. 27, n. 2, p. 216–234, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 26.
- MALACARNE, M. F.; PINTO, M. A.; FRANCO, S. R. Computational simulation of one-dimensional waves with the multigrid method. *Brazilian Journal of Development*, v. 7, n. 8, p. 83763–83775, 2021. Citado na página 37.
- MALACARNE, M. F.; PINTO, M. A. V.; FRANCO, S. R. Approximate solution of the wave equation using the multigrid method. *Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC.*, p. 2675–6269, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 25.
- MALACARNE, M. F.; PINTO, M. A. V.; FRANCO, S. R. Performance of the multigrid method with time-stepping to solve 1d and 2d wave equations. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, Taylor & Francis, v. 23, n. 1, p. 45–56, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 42.
- MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Multi-dimensional discretization error estimation for convergent apparent order. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 27, n. 4, p. 432–439, 2005. Citado na página 67.

- MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 139, n. 1-4, p. 289–314, 1996. Citado na página 37.
- METAXAS, A. C.; MEREDITH, R. J. *Industrial microwave heating*. London: IET, 1983. Citado na página 22.
- NGUYEN, H.; TSAI, R. A stable parareal-like method for the second order wave equation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 405, p. 109156, 2020. Citado na página 27.
- NIEVERGELT, J. Parallel methods for integrating ordinary differential equations. *Communications of the ACM*, ACM New York, NY, USA, v. 7, n. 12, p. 731–733, 1964. Citado na página 26.
- OLIVEIRA, F. D.; FRANCO, S.; PINTO, M. V. The effect of multigrid parameters in a 3d heat diffusion equation. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, Sciendo, v. 23, n. 1, p. 213–221, 2018. Citado na página 25.
- OLIVEIRA, M. L. *et al.* On the robustness of the xy-zebra-gauss-seidel smoother on an anisotropic diffusion problem. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Tech Science Press, v. 117, n. 2, p. 251–270, 2018. Citado na página 25.
- OLVER, P. J. *Introduction to partial differential equations*. Minnesota: Springer, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- ONG, B. W.; MANDAL, B. C. Pipeline implementations of neumann–neumann and dirichlet–neumann waveform relaxation methods. *Numerical Algorithms*, Springer, v. 78, n. 1, p. 1–20, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 28, 61, 62, 64 e 84.
- ONG, B. W.; SCHRODER, J. B. Applications of time parallelization. *Computing and Visualization in Science*, Springer, v. 23, n. 1, p. 1–15, 2020. Citado na página 27.
- OOSTERLEE, C. W. A gmres-based plane smoother in multigrid to solve 3-d anisotropic fluid flow problems. *Comput. Phys.*, v. 130, p. 41–53, 1997. Citado na página 24.
- OOSTERLEE, C. W.; GASPAR, F. J. Multigrid relaxation methods for systems of saddle point type. *Appl. Numer. Math.*, v. 58, p. 1933–1950, 2008. Citado na página 25.
- OOSTERLEE, C. W. *et al.* Multigrid line smoothers for higher order upwind discretizations of convection-dominated problems. *Comput. Phys.*, v. 274, n. 1, 1998. Citado na página 24.
- PIERCE, A. D. Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 87, n. 6, p. 2292–2299, 1990. Citado na página 22.
- PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H. Efeito de parâmetros do método multigrid cs e fas sobre o tempo de cpu para a equação de laplace bidimensional. *Proceedings of ENCIT*, 2006. Citado na página 24.
- RINCON, M. A.; QUINTINO, N. Numerical analysis and simulation for a nonlinear wave equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 296, p. 247–264, 2016. Citado na página 22.

- RIZZUTI, G.; MULDER, W. A. Multigrid-based ‘shifted-laplacian’ preconditioning for the time-harmonic elastic wave equation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 317, p. 47–65, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 25.
- RODRIGUES, S. *et al.* Reducing the discretization error for a poroelasticity problem in variables having extreme values. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer, v. 44, n. 4, p. 1–11, 2022. Citado na página 25.
- RUPRECHT, D. Wave propagation characteristics of parareal. *Computing and Visualization in Science*, Springer, v. 19, n. 1-2, p. 1–17, 2018. Citado na página 27.
- SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H.; SOUZA, L. F. Performance of geometric multigrid method for coupled two-dimensional systems in cfd. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, p. 2602–2616, 2015. Citado na página 25.
- SATHYAMURTHY, P. S.; PATANKAR, S. V. Block-correction-based multigrid method for fluid flow problems. *Numerical Heat Transfer, Part B Fundamentals*, Taylor & Francis, v. 25, n. 4, p. 375–394, 1994. Citado na página 23.
- SILVA, A. J. R. Ondas, fluidos e termodinâmica. *Notas de aula Física II - USP*, DOCPPLAYER, 2019. Citado na página 31.
- STERCK, H. D. *et al.* Convergence analysis for parallel-in-time solution of hyperbolic systems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, Wiley Online Library, v. 27, n. 1, p. e2271, 2020. Citado na página 22.
- STÜBEN, K.; TROTTEBERG, U. Multigrid methods: Fundamental algorithms, model problem analysis and applications. *Multigrid methods*, Springer, p. 1–176, 1982. Citado na página 23.
- TA-ASAN, S.; ZHANG, H. On the multigrid waveform relaxation method. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 16, n. 5, p. 1092–1104, 1995. Citado na página 23.
- TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Philadelphia: Taylor & Francis, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 29.
- THOLE, C.; TROTTEBERG, U. Basic smoothing procedures for the multigrid treatment of elliptic 3d operators. *Appl. Math. Comput.*, v. 333, n. 19, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 23, 73 e 82.
- THOMAS, J. W. *Numerical partial differential equations: finite difference methods*. New York: Springer Science & Business Media, 2013. v. 22. Citado na página 42.
- TROTTEBERG, U.; CLEES, T. Multigrid software for industrial applications-from mg00 to samg. Springer, p. 423–436, 2009. Citado 9 vezes nas páginas 29, 47, 48, 51, 52, 55, 81, 83 e 97.
- TROTTEBERG, U.; OOSTERLEE, C.; SCHULLER, A. *Multigrid*. San Diego: Academic Press, 2000. Citado 11 vezes nas páginas 21, 24, 47, 48, 49, 51, 52, 74, 75, 87 e 107.

- UMETANI, N.; MACLACHLAN, S. P.; OOSTERLEE, C. W. A multigrid-based shifted laplacian preconditioner for a fourth-order helmholtz discretization. *Numerical Linear Algebra with Applications*, Wiley Online Library, v. 16, n. 8, p. 603–626, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 37 e 47.
- VANDEWALLE, S. *Parallel multigrid waveform relaxation for parabolic problems*. Stuttgart: Springer-Verlag, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 23, 54, 56 e 57.
- VANDEWALLE, S.; HORTON, G. Multicomputer-multigrid solution of parabolic partial differential equations. In: HEMKE, P. W.; WESSELIN, P. (Ed.). *Multigrid Methods IV: Proceedings of the Fourth European Multigrid Conference*. Amsterdam: Springer Basel AG, 1993. p. 97–109. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 26.
- VANDEWALLE, S.; HORTON, G. Fourier mode analysis of the multigrid waveform relaxation and time-parallel multigrid methods. *Computing*, v. 54, p. 317–330, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 56.
- VANDEWALLE, S. G.; VELDE, E. F. Van de. Space-time concurrent multigrid waveform relaxation. *Annals of Numerical Mathematics*, v. 1, n. 1-4, p. 347–360, 1994. Citado na página 23.
- VARGAS, A. P. S.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H. Analysis of multigrid method with crank-nicolson scheme for 2d time-dependent fourier equation. *Será Publicado*, 2015. Citado na página 25.
- WEBER, I.; KREISS, G.; NAZAROV, M. Stability analysis of high order methods for the wave equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 404, p. 113900, 2022. ISSN 0377-0427. Citado na página 39.
- WESSELING, P. *An Introduction to Multigrid Methods*. Chichester: John Wiley & Sons, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 48 e 55.
- WIENANDS, R.; OOSTERLEE, C. W. On three-grid fourier analysis for multigrid. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 23, n. 2, p. 651–671, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 47.
- WOMBLE, D. E. A time-stepping algorithm for parallel computers. *SIAM journal on scientific and statistical computing*, SIAM, v. 11, n. 5, p. 824–837, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- ZHANG, J. Fast and high accuracy multigrid solution of the three dimensional poisson equation. *Journal of Computational Physics*, v. 143, p. 449–461, 1998. Citado na página 24.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method: solid mechanics*. San Diego: Butterworth-heinemann, 2000. v. 2. Citado na página 37.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Differential equations*. São Paulo: Brooks/Cole, Cengage Learning., 2009. Citado na página 34.
- ZLOTNIK, A.; CIEGIS, R. On properties of compact 4th order finite-difference schemes for the variable coefficient wave equation. *arXiv preprint arXiv:2101.10575*, Cornell University, v. 35, n. 1, p. 1–25, 2021. Citado na página 27.