

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

**MICHELY LAÍS DE OLIVEIRA**

**UM COMPARATIVO DOS FATORES DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA DOS  
SUAVIZADORES DO TIPO LINHA NO MÉTODO *MULTIGRID***

**CURITIBA**

**2018**

**MICHELY LAÍS DE OLIVEIRA**

**UM COMPARATIVO DOS FATORES DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA DOS  
SUAVIZADORES DO TIPO LINHA NO MÉTODO *MULTIGRID***

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia do Setor de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto

Coorientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves

CURITIBA

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR  
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

---

OL48c

Oliveira, Michely Laís de

Um comparativo dos fatores de convergência assintótica dos suavizadores do tipo linha no método multigrid / Michely Laís de Oliveira. – Curitiba, 2018.  
78 p. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2018.

Orientador: Marcio Augusto Villela Pinto.

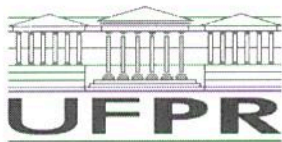
Coorientadora: Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves.

1. Anisotropia física. 2. Método de diferenças finitas. 3. Multigrid. 4. Análise de Fourier local.  
5. Gauss-Seidel zebra. I. Universidade Federal do Paraná. II. Pinto, Marcio Augusto Villela.  
III. Gonçalves, Simone de Fátima Tomazzoni. IV. Título.

CDD: 515.35

---

Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS  
EM ENGENHARIA

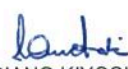
## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **MICHELY LAIS DE OLIVEIRA** intitulada: **UM COMPARATIVO DOS FATORES DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA DOS SUAVIZADORES DO TIPO LINHA NO MÉTODO MULTIGRID**, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 19 de Fevereiro de 2018.

  
SIMONE DE FATIMA TOMAZZONI GONÇALVES  
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

  
LUCIANO KIYOSHILARAKI  
Avaliador Interno (UFPR)

  
RUDIMAR LUIZ NOS  
Avaliador Externo (UFPR)

  
MARCIO ANDRÉ MARTINS  
Avaliador Externo ()

*A Deus, por tudo.  
Aos meus pais e irmãs.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto, por ter aceitado me orientar neste trabalho, pelo apoio, pela paciência, didática e por todo o conhecimento recebido.

A minha co-orientadora, Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves, pela disposição em me auxiliar, pela dedicação e pelo conhecimento recebido.

Agradeço aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Márcio André Martins, Prof. Dr. Rudimar Luiz Nos e o Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki pelo tempo dispensado à leitura deste trabalho.

Aos meus pais Waldemir e Eliane por serem dois anjos na minha vida e que incansavelmente me apoiam em todas as minhas decisões. As minhas irmãs Sabrina e Steffany, minhas pupilas, por todo amor, apoio e orgulho.

Aos meus amigos matemáticos, Grazielli, Bruno, Mauren, Nicole, Lucas, Ivan, Maicon, Inajara, pelo companherismo, pela constante ajuda, pelas contribuições, e principalmente pelo carinho e amizade que foram extremamente importante na minha vida neste período.

A Morgana, Sandriele e Suelem, que se tornaram minha segunda família, obrigada pela amizade e principalmente por alegrarem meus dias, juntas construímos um lar.

Às minhas amigas maravilhosas que a vida trouxe para mim: Samily, Laís, Kariza, Luziana, Maria Marta, Andressa, Vanessa, Jéssica, Pamela, Cleonice, Juliane, Alice, Ariele, que sempre me escutaram, apoiaram e incentivaram.

A toda minha família e amigos pela credibilidade e amor em mim depositados.

Agradeço a cada professor que de alguma forma contriubuiu para que eu escolhesse essa linda profissão e alcançasse minhas metas até aqui.

Ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos (PPGMNE) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela oportunidade de cursar o mestrado.

## RESUMO

Estudos de problemas que envolvem anisotropia física são aplicados nas Ciências e nas Engenharias, Como por exemplo, quando a condutividade térmica depende da direção. Estes problemas podem ser representados por modelos matemáticos e resolvidos numericamente pelos métodos iterativos. Neste trabalho, o método *multigrid* foi utilizado para acelerar a convergência destes métodos. O fator de convergência assintótica do *multigrid* foi determinado pela Análise de Fourier Local (*Local Fourier Analysis*, LFA) e empiricamente (com o auxílio do computador). O modelo matemático estudado foi a equação de difusão 2D anisotrópica, com  $\varepsilon$  coeficiente de anisotropia. A discretização da equação foi obtida através do Método de Diferenças Finitas (MDF) e o esquema central de segunda ordem (*Central Differencing Scheme*, CDS). O Esquema de Correção (*Correction Scheme*, CS), os métodos Gauss-Seidel ponto-a-ponto (ordenação lexicográfica e *Red-Black*), os métodos Gauss-Seidel linha-a-linha (Gauss-Seidel linha nas direções  $x$  e  $y$ , zebra nas direções  $x$  e  $y$ ) foram usados na construção do *multigrid*. O melhor fator de convergência assintótica foi obtido mediante os métodos Gauss-Seidel zebra na direção  $x$  para  $0 < \varepsilon \ll 1$  e Gauss-Seidel zebra na direção  $y$  para  $\varepsilon \gg 1$ . Assim, foi proposto um método  $xy$ -zebra-GS, que se mostrou eficiente e robusto para os diferentes coeficientes de anisotropia. Também foi possível confirmar que os fatores de convergência calculados via LFA e empiricamente, estão em concordância.

**Palavras-chaves:** Anisotropia física. Problema difusivo. Método de Diferenças Finitas. *Multigrid*. Análise de Fourier Local. Gauss-Seidel zebra.

## ABSTRACT

Studies of problems involving physical anisotropy are applied in Science and Engineering, for example, when the thermal conductivity depends on the direction. These problems can be represented by mathematical models and solved numerically by iterative methods. In this work, the multigrid method was used to accelerate the convergence of these methods. The asymptotic convergence factor of the multigrid was determined by Local Fourier Analysis (LFA) and empirically (by computer). The mathematical model studied was the anisotropic 2D diffusion equation, with  $\varepsilon$  anisotropy coefficient. For discretization of the equation was performed by the Finite Differences Method and Central Differencing Scheme (CDS). Correction Scheme (CS), pointwise Gauss-Seidel methods (lexicographic and Red-Black ordering), linewise Gauss-Seidel methods ( $x$ - and  $y$ -line Gauss-Seidel,  $x$ - and  $y$ -zebra) was used in the multigrid. The better convergence factor was zebra Gauss-Seidel method in direction  $x$  for  $0 < \varepsilon \ll 1$  e and  $y$ -zebra-GS for  $\varepsilon \gg 1$ . Therefore,  $xy$ -zebra-GS method, developed in this study, showed efficient and robust for the different anisotropy coefficients. The convergence factors analyzed by LFA and empirically, are in agreement.

**Key-words:** Physical anisotropy. Diffusion problem. Finite Difference Method. Multigrid. Local Fourier Analysis. Zebra Gauss-Seidel.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 –	Transformação do domínio contínuo $\Omega$ em domínio discreto $\Omega^h$ . . .	30
FIGURA 2 –	Cinco pontos em uma malha bidimensional uniforme. . . . .	33
FIGURA 3 –	Ordenação dos pontos de $\Omega^h$ para o emprego do método Gauss-Seidel ponto a ponto: (a) lexicográfica; (b) <i>red-black</i> . . . . .	34
FIGURA 4 –	Ordenação dos pontos de $\Omega^h$ para o emprego do método Gauss-Seidel por blocos: (a) na direção $x$ e (b) na direção $y$ . . . . .	34
FIGURA 5 –	Ordenação dos pontos de $\Omega^h$ para o emprego do método Gauss-Seidel por blocos: (a) zebra na direção $x$ e (b) zebra na direção $y$ . . . . .	34
FIGURA 6 –	Modos de Fourier (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000). . .	35
FIGURA 7 –	Restrição por injeção. . . . .	37
FIGURA 8 –	Operador de prolongação. . . . .	39
FIGURA 9 –	Diagramas dos ciclos(a) F e (b) V, aplicados a 5 malhas. . . . .	39
FIGURA 10 –	Semiengrossamento na direção $x$ da (a) malha fina original para a (b) malha grossa (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000). . .	44
FIGURA 11 –	Regiões de componentes de altas e baixas frequências (TROT- TENBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001) . . . . .	48
FIGURA 12 –	Domínio bidimensional contínuo. . . . .	57
FIGURA 13 –	Gráfico da solução analítica da Eq. (4.4). . . . .	58
FIGURA 14 –	Erro numérico do <i>multigrid</i> e para os diversos suavizadores com coeficiente de anisotropia $\varepsilon = 10^{-3}$ . . . . .	62
FIGURA 15 –	Erro numérico do <i>multigrid</i> para o suavizador $x$ -zebra-GS com os diversos coeficiente de anisotropia. . . . .	62
FIGURA 16 –	Ordens aparente e efetiva <i>versus</i> $h$ para a norma infinito do erro, com o suavizador $x$ -zebra-GS e os coeficientes de anisotropia $\varepsilon = 1, 10^{-3}$ e $10^3$ . . . . .	64
FIGURA 17 –	Fator de convergência assintótica via LFA ( $\rho_{2g}$ ) <i>versus</i> coeficiente de anisotropia ( $\varepsilon$ ). . . . .	66
FIGURA 18 –	Fatores de convergência assintótica ( $\rho_{2g}$ ) e empírico ( $\rho_h$ ) para $N = 1025 \times 1025$ <i>versus</i> coeficiente de anisotropia ( $\varepsilon$ ) . . . . .	68
FIGURA 19 –	Fator de convergência assintótica via LFA ( $\rho_{2g}$ ) e empírico ( $\rho_h$ ) para as malhas de $N = 5 \times 5$ à $2049 \times 2049$ <i>versus</i> coeficiente de anisotropia ( $\varepsilon$ ). . . . .	68

FIGURA 20 – Número de ciclos $V$ <i>versus</i> número de nós $N$ para diversos valores de $\varepsilon$ . . . . .	69
FIGURA 21 – $t_{CPU}(s)$ <i>versus</i> número de nós ( $N$ ) para diversos valores de $\varepsilon$ . . .	70

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Norma infinito do erro numérico com os diversos suavizadores para os coeficientes de anisotropia $\varepsilon = 1, \varepsilon = 10^{-3}$ e $\varepsilon = 10^3$ , em uma malha $N = 513 \times 513$ . . . . .	61
TABELA 2 – Ordem de complexidade $p$ e o coeficiente $c$ , em relação ao coeficiente de anisotropia $\varepsilon$ . . . . .	70

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

x-linha-GS	Gauss-Seidel linha na direção $x$
x-zebra-GS	Gauss-Seidel zebra na direção $x$
xy-zebra-GS	Gauss-Seidel zebra $xy$
y-linha-GS	Gauss-Seidel linha na direção $y$
y-zebra-GS	Gauss-Seidel zebra na direção $y$
BCMM	<i>Block Corrections Multigrid Method</i>
BLIMM	<i>Block Implicit Multigrid Method</i>
CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CG	Gradiente Conjugado
CS	<i>Correction Scheme</i>
DDS	<i>Downstream Differencing Scheme</i>
EDPs	Equações Diferenciais Parciais
FAS	<i>Full Approximation Scheme</i>
FMG	<i>Full Multigrid</i>
FW	<i>Full Weighting</i>
GS	Gauss-Seidel
GS-LEX	Gauss-Seidel lexicográfico
GS-RB	Gauss-Seidel <i>Red-Black</i>
HW	<i>Half Weighting</i>
IC	<i>Incomplete Cholesky</i>
ILU	<i>Incomplete LU-relaxation</i>
LFA	<i>Local Fourier Analysis</i>
MDF	Método de Diferenças Finitas

MEF	Método de Elementos Finitos
MSI	<i>Modified Strongly Implicit</i>
MVF	Método de Volumes Finitos
SA	<i>Smoother Aggregation</i>
SCGS	<i>Symmetric Coupled Gauss-Seidel</i>
SOR	<i>Successive Over-Relaxation</i>
SPC	<i>SIMPLE Pressure Correction</i>
TDMA	<i>TriDiagonal Matrix Algorithm</i>
UDS	<i>Upwind Differencing Scheme</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Matriz de coeficientes
$c$	Constante
$D$	Matriz diagonal
$e$	Vetor dos erros numéricos
$E$	Erro numérico
$E_h$	Erro de discretização
$f$	Vetor independente
$h_x$	Tamanho da malha na direção $x$
$h_y$	Tamanho da malha na direção $y$
$I$	Operador identidade
$I_h^{2h}$	Operador de restrição
$I_{2h}^h$	Operador de prolongação
$k$	Número de ondas ou modos de Fourier
$K_h^{2h}$	Operador de correção da malha grossa
$L$	Matriz triangular inferior
$L_h$	Estêncil do operador diferencial Laplaciano em uma malha $h$
$\tilde{L}_h$	Autovalor de $L_h$
$L^+$	Termos já lido na iteração atual
$L^-$	Termos usados da iteração anterior
$L$	Número de níveis do <i>multigrid</i>
$L_{\max}$	Número máximo de níveis de malhas
$L_x$	Comprimento do domínio bidimensional: direção $x$
$L_y$	Comprimento do domínio bidimensional: direção $y$
$M_h^{2h}$	Operador de duas malhas

$N$	Número total de nós
$N_x$	Número de pontos na direção $x$
$N_y$	Número de pontos na direção $y$
$p$	Ordem de complexidade
$p_E$	Ordem efetiva
$p_L$	Ordem assintótica
$p_U$	Ordem aparente
$r$	Vetor dos resíduos
$\ \cdot\ _\infty$	Norma do máximo (ou norma-infinito)
$\ r^0\ _\infty$	Norma infinito do resíduo com a estimativa inicial
$\ r^{it}\ _\infty$	Norma infinito do resíduo na iterada atual
$re$	Razão de engrossamento
$S$	Termo fonte
$S_h$	Estêncil do suavizador em uma malha $h$
$\tilde{S}_h$	Autovalor de $S_h$
$tol$	Tolerância
$T$	Temperatura
$T^{low}$	Região de baixas frequências
$T^{high}$	Região de altas frequências
$U$	Matriz triangular superior
$u$	Vetor das incógnitas
$v$	Aproximação da variável de interesse $u$
$w_j$	Modos de Fourier
$w_h$	Nova aproximação da variável $u_h$ (usada em LFA)
$\bar{w}_h$	Aproximação anterior de $u_h$ (usada em LFA)

## Letras Gregas

$\Delta_h$	Operador Laplaciano na malha $h$
$\varepsilon$	Coeficiente de anisotropia
$\kappa$	Posição no estêncil
$\mu_{loc}$	Fator de suavização obtido com LFA
$\nu$	Número total de suavizações
$\nu_1$	Número de pré-suavizações
$\nu_2$	Número de pós-suavizações
$\Omega^h$	Malha fina
$\Omega^{2h}$	Malha grossa com engrossamento padrão
$\rho_{2g}$	Fator de convergência obtido com LFA
$\rho_h$	Fator de convergência obtido empiricamente
$\Phi$	Solução analítica
$\phi$	Solução numérica
$\varphi$	Função de malha
$\theta$	Frequência da função de malha $\varphi$

## índices

$E$	Ponto localizado ao leste do ponto geral nodal
$i$	Posição do nó na direção $x$
$j$	Posição do nó na direção $y$
$h$	Malha fina
$2h$	Malha grossa
$x$	Derivada com relação a $x$
$N$	Ponto localizado ao norte do ponto geral nodal
$P$	Ponto geral nodal
$S$	Ponto localizado ao sul do ponto geral nodal
$W$	Ponto localizado ao oeste do ponto geral nodal



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
1.1	MOTIVAÇÃO	21
1.2	OBJETIVOS	23
1.2.1	Objetivo geral	23
1.2.2	Objetivos específicos	23
1.3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
1.3.1	Método <i>multigrid</i>	23
1.3.2	Análise de Fourier Local	25
1.3.3	Problemas anisotrópicos	25
1.4	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	27
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>29</b>
2.1	MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS	29
2.2	MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	31
2.2.1	Métodos de Gauss-Seidel	32
2.3	MÉTODO <i>MULTIGRID</i>	35
2.3.1	Filosofia do método <i>multigrid</i>	35
2.3.2	Equação residual	36
2.3.3	Operadores de restrição e ponderação	37
2.3.4	Ciclos <i>multigrid</i> e algoritmos	39
2.4	NOTAÇÃO ESTÊNCIL	40
2.5	PROBLEMAS ANISOTRÓPICOS	42
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DE FOURIER LOCAL</b>	<b>45</b>
3.1	CONCEITOS GERAIS	45
3.2	TERMINOLOGIA	46
3.3	ANÁLISE DE SUAVIZAÇÃO	47
3.4	ANÁLISE DE DUAS MALHAS	49
3.5	ANÁLISE DE FOURIER LOCAL PARA OS SUAVIZADORES	53
<b>4</b>	<b>MODELOS MATEMÁTICO E NUMÉRICO</b>	<b>57</b>
4.1	MODELO MATEMÁTICO	57
4.2	MODELO NUMÉRICO	58
<b>5</b>	<b>VERIFICAÇÃO DO CÓDIGO</b>	<b>60</b>

5.1	VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO . . . . .	60
5.2	ERRO DE DISCRETIZAÇÃO . . . . .	60
5.3	ORDEM APARENTE E EFETIVA . . . . .	63
<b>6</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>65</b>
6.1	DETALHES COMPUTACIONAIS . . . . .	65
6.2	FATOR DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA . . . . .	65
6.3	NÚMERO DE CICLOS V . . . . .	67
6.4	CUSTO COMPUTACIONAL . . . . .	69
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>71</b>
7.1	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	71
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>73</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Problemas e aplicações em Engenharia são destaques na área da pesquisa e no desenvolvimento da Tecnologia. Estes problemas podem ser resolvidos por métodos experimentais ou teóricos; estes últimos podem ser abordados por métodos analíticos ou numéricos. O método experimental, por sua vez refere-se a um problema real resolvido com um experimento físico realizado em laboratório e/ou campo.

Com o advento dos computadores e um custo financeiro acessível, o papel dos métodos numéricos na solução de problemas de Engenharia e de Ciência, aumentou significativamente. Estes métodos aumentam muito a capacidade de resolver problemas, considerando-se que permitem lidar com um grande número de equações, não linearidades e geometrias complicadas, frequentemente presentes na prática de Engenharia e que, em geral, são difíceis ou até mesmo impossíveis de se resolver de forma analítica.

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics*, CFD) é a área que trata dos métodos computacionais para simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento com ou sem troca de calor (FORTUNA, 2000). Para bons resultados em CFD é necessário diminuir o erro numérico. Isto implica no uso de malhas mais refinadas, o que aumenta o custo computacional. Este aumento ocorre devido ao fato de que os problemas que se deseja resolver geralmente envolvem muitas incógnitas, devido ao refinamento da malha. Outro fator que aumenta o tempo de CPU ( $t_{CPU}$ ) é que a discretização destes problemas resulta em sistemas lineares ou não lineares nos quais as matrizes dos coeficientes possuem alto grau de esparsidade (FORTUNA, 2000).

Os métodos computacionais em CFD são baseados em métodos numéricos nos quais as equações diferenciais que modelam analiticamente os fenômenos são aproximadas por sistemas de equações algébricas, lineares, geralmente do tipo

$$Au = f, \quad (1.1)$$

sendo  $A$  a matriz dos coeficientes,  $u$  o vetor das incógnitas e  $f$  o vetor dos termos independentes, ou termo fonte. O sistema (1.1) surge após o processo de discretização do domínio e do modelo matemático.

Os métodos tradicionais empregados na discretização das equações são: Método de Diferenças Finitas (MDF) (FERZIGER; PERIC, 2002), Método de Elementos Finitos (MEF) (HUGHES, 2000) e Método de Volumes Finitos (MVF) (MALISKA, 2004; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Após a obtenção das equações algébricas, o sistema linear é então resolvido por algum método de resolução de sistemas lineares. Os métodos podem ser classificados em duas categorias principais: diretos e iterativos. Neste trabalho, os métodos iterativos, serão designados como suavizadores.

Os métodos diretos, após um número finito de operações, conduzem à solução exata do problema, exceto por erros de arredondamento. São exemplos de métodos diretos o método de eliminação de Gauss e o método *TriDiagonal Matrix Algorithm* (TDMA) para o caso unidimensional (BURDEN; FAIRES, 2008). Porém, métodos diretos não são recomendados para obter soluções em malhas muito refinadas, devido ao alto custo computacional (FORTUNA, 2000; BURDEN; FAIRES, 2008).

Para malhas refinadas, são recomendados os suavizadores. Nestes suavizadores, uma estimativa inicial é o ponto de partida para gerar uma sequência de aproximações que, satisfeitas certas condições, converge para a solução exata. São exemplos de suavizadores os métodos de Jacobi, Gauss-Seidel lexicográfico (GS-LEX) e Gauss-Seidel *Red-Black* (GS-RB).

No início do processo de solução do sistema linear, a taxa de convergência dos suavizadores é relativamente alta e o erro da solução cai rapidamente, mas com o passar das iterações esta taxa cai e o erro tende a diminuir muito lentamente ou, ainda, a estabilizar (WESSELING, 1992; BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000; TROTTERBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001).

Dado que o erro pode ser decomposto em modos de Fourier e considerando-se o espectro de frequências formado pelas suas componentes, pode-se mostrar que as componentes de alta frequência, ditas oscilatórias, são reduzidas com rapidez pelos suavizadores, ao passo que as componentes de baixa frequência, ditas suaves, são reduzidas com dificuldade por estes suavizadores (TROTTERBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001). Assim, a alta taxa de redução do erro que ocorre no início do processo iterativo se deve à rápida eliminação das componentes oscilatórias e a diminuição desta taxa com o passar das iterações se dá pela permanência das componentes suaves do erro.

O método *multigrid* é um método eficiente para acelerar a taxa de convergência dos suavizadores. Foi desenvolvido com a finalidade de superar a dificuldade dos métodos iterativos de eliminar as componentes suaves do erro. Considerando-se que as componentes suaves em uma determinada malha tornam-se oscilatórias na perspectiva de uma malha menos refinada, o *multigrid* emprega um conjunto de malhas, com diferentes graus de refinamento, as quais são percorridas ao longo do processo iterativo, reduzindo eficientemente todo o espectro de frequências do erro.

A transferência entre as malhas é realizada por meio de dois operadores de

transferência: restrição e prolongação. O operador de restrição consiste em transferir informações da malha fina para a malha imediatamente mais grossa; já o operador de prolongação transfere da malha mais grossa para a malha imediatamente mais fina.

A sequência em que as malhas são visitadas caracteriza um ciclo, nomeado por V, W, F, dentre outros. A suavização consiste no uso de um suavizador. A correção na malha grossa envolve a equação residual, determinando uma aproximação para o erro. Esta informação é transferida para a próxima malha fina até chegar à malha inicial, onde o problema é resolvido e a solução inicial corrigida.

O método *multigrid* pode ser dividido em geométrico ou algébrico. Quando *a priori* se conhece a hierarquia das malhas, tem-se o *multigrid* geométrico, mais adequado a problemas em uma malha estruturada (WESSELING; OOSTERLEE, 2001). Caso contrário, ou seja, quando não se conhece a hierarquia das malhas e usa-se apenas a informação da matriz dos coeficientes, o método *multigrid* recomendado é o algébrico, mais adequado a problemas em uma malha não estruturada (STÜBEN, 2001).

O algoritmo do *multigrid* pode ser construído segundo alguns esquemas, os quais se distinguem pelas informações necessárias e como as mesmas são tratadas, dentre eles: o esquema de correção (*Correction Scheme*, CS) e o esquema de aproximação completa (*Full Approximation Scheme*, FAS) (WESSELING, 1992; BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000; TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001). No esquema CS, a Eq. (1.1) é resolvida apenas na malha mais fina, pois nas malhas grossas resolve-se a equação residual. Já no esquema FAS, a Eq. (1.1) é resolvida em todas as malhas. O esquema CS é mais recomendado para problemas lineares e o esquema FAS para problemas não lineares (BRANDT, 1977).

De acordo com Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001), experiências mostram que o desempenho do *multigrid* está diretamente relacionado com os componentes escolhidos na construção de seu algoritmo, tais como: suavizador, número de iterações do suavizador em cada malha, tipo de ciclo, operadores de restrição e prolongação, etc. Tais escolhas podem ser difíceis, uma vez que pequenas alterações influenciam na taxa de convergência do método.

A Análise de Fourier Local (*Local Fourier Analysis*, LFA) fornece estimativas *a priori* para as taxas de convergência de seus parâmetros, antecipando o desempenho do *multigrid*. Além destas taxas serem muito precisas, os resultados exigem um tempo muito menor do que encontrar estas taxas algebricamente ou empiricamente, ou seja, sem o uso da LFA. Esta análise é realizada por Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001) em malhas retangulares e por Zhou e Fulton (2009) em malhas uniformes hexagonais.

Wienands e Joppich (2005) calcularam por meio da LFA o fator de convergência

do *multigrid* em diversos problemas, incluindo os problemas anisotrópicos, variando os suavizadores e os operadores de transferência.

O *multigrid* é um método robusto, podendo ser empregado na resolução de problemas lineares, não lineares, isotrópicos, anisotrópicos, dentre outros. Porém, para problemas com fortes anisotropias, o *multigrid* não tem sido muito eficiente. Segundo Briggs, Henson e McCormick (2000), Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001), Karaa e Zhang (2002), Cordazzo (2006), Oliveira, Pinto e Marchi (2012) e Vassoler-Rutz e Pinto (2016) com o uso de métodos iterativos básicos, a medida que se têm fortes anisotropias, o *multigrid* se degrada.

Problemas anisotrópicos (anisotropia física ou geométrica) são comuns na Engenharia. A anisotropia geométrica pode surgir a partir da discretização das malhas, nas quais as distâncias entre os nós são constantes,  $h_x$  e  $h_y$ , mas distintas nas direções coordenadas.

A anisotropia física se caracteriza pela variação de uma propriedade com relação a uma direção, o que se manifesta nos coeficientes das equações diferenciais. A anisotropia física (ou dos coeficientes) ocorre, por exemplo, quando a equação diferencial possui os coeficientes constantes nas derivadas parciais, mas distintos nas direções coordenadas, ou seja, em uma das direções tem-se o coeficiente de anisotropia ( $\varepsilon$ ) distinto da unidade. Um exemplo de anisotropia física ocorre no estudo que envolve um material no qual a condução de calor depende da direção.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Para obter resultados precisos em CFD é necessário diminuir o erro de discretização usando malhas muito refinadas. Entretanto, esses problemas produzem matrizes de grande porte e esparsas, aumentando o custo computacional, o que evoca o uso de técnicas mais sofisticadas. Assim, o método *multigrid* vêm se mostrando presente nas pesquisas e na literatura, com foco na aceleração de convergência dos métodos iterativos.

De acordo com Brandt (1977) e Wesseling e Oosterlee (2001), o *multigrid* ainda não possui a eficiência ideal para todos os problemas em CFD. Ferziger e Peric (2002) dizem que no *multigrid* em geral, muitos parâmetros podem ser escolhidos aleatoriamente, mas estas escolhas interferem na convergência do método.

Segundo Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001), a eficiência do *multigrid* depende das escolhas de seus componentes, como tipo de ciclo, suavizador, número de iterações do suavizador em cada ciclo, operadores de restrição e prolongação. Wallis (2008) afirma que a escolha do suavizador, estimativa inicial, número de malhas, dentre outras escolhas, são elementos importantes a serem analisados no uso do *multigrid*.

Portanto, uma boa combinação dos parâmetros deste método resulta na redução do  $t_{CPU}$ , justificando e motivando o estudo e a identificação de parâmetros ótimos para o *multigrid*.

A escolha de parâmetros ótimos do *multigrid* com relação à aceleração da convergência dos métodos iterativos têm provocado um aumento no número de trabalhos com o foco no estudo destes parâmetros do *multigrid* em problemas de CFD. O grupo de pesquisa em *multigrid*, da Universidade Federal do Paraná, tem se dedicado nesta área, sendo os principais resultados encontrados em Santiago (2010), Suero, Pinto, Marchi et al. (2012), Gonçalves (2013), Pinto, Rodrigo et al. (2016), Franco (2017) e Franco et al. (2018). Outras análises podem ser encontradas em Wesseling (1992), Briggs, Henson e McCormick (2000), Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001), Ferziger e Peric (2002), Mesquita e De-Lemos (2004), Wienands e Joppich (2005), Souza et al. (2006), Thekale et al. (2010) e Hackbusch (2013).

Na busca dos parâmetros ótimos do *multigrid* geralmente são realizadas diversos testes, variando os componentes e sendo necessário muito tempo para tais testes. Neste sentido, a LFA tem como objetivo prever o desempenho do *multigrid*, pois fornece os fatores de convergência *a priori* para cada componente que se deseja utilizar (WIENANDS; JOPPICH, 2005).

Os resultados apresentados pela LFA são muito precisos (HACKBUSCH, 2013). Assim, pode-se prever quais componentes do *multigrid* apresentarão o melhor desempenho do método. A LFA realiza uma análise para todos os componentes do *multigrid* e, conseqüentemente, as taxas de convergências são encontradas rapidamente se comparadas com o problema resolvido algebricamente ou empiricamente, em que, é necessário realizar diversos testes, variando-se uma componente por vez. Portanto, com o uso da LFA, a pesquisa torna-se mais prática e rápida.

Problemas com fortes anisotropias frequentemente causam deteriorização na eficiência do *multigrid*, resultando em maior  $t_{CPU}$ . Quanto mais distante o coeficiente de anisotropia está da unidade, ou seja,  $0 < \varepsilon \ll 1$  ou  $\varepsilon \gg 1$ , pior é a taxa de convergência do *multigrid* (WESSELING; OOSTERLEE, 2001), em alguns casos podendo até divergir (LARSSON; LIEN; YEE, 2005). Este tipo de anisotropia é frequente em problemas práticos da Engenharia. Por isso, buscam-se algoritmos eficientes e robustos, com o uso da LFA, para a equação de difusão bidimensional com fortes anisotropias físicas. A escolha da equação à ser estudada ocorreu devido ao fato de representar um problema elíptico em que o *multigrid* é eficiente. No entanto, quando o problema possui fortes anisotropias os suavizadores ponto-a-ponto divergem. Portanto, neste trabalho busca-se suavizadores eficientes para os casos anisotrópicos.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo geral

Propor um suavizador eficiente e robusto para um problema de difusão com anisotropia física, usando a LFA.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Analisar a influência da anisotropia física sobre o  $t_{CPU}$  variando o número de incógnitas e o suavizador, utilizando o método *multigrid*;
- Calcular e comparar a convergência de diferentes métodos de resolução de sistemas de equações algébricas para problemas anisotrópicos por meio de uma LFA;
- Calcular e comparar o fator de convergência assintótica pela LFA e empiricamente;
- Comprovar a importância e a confiabilidade da LFA em suas previsões do desempenho do *multigrid*.

## 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção é detalhada uma revisão bibliográfica sobre *multigrid* de uma forma geral, sobre a LFA e sobre problemas anisotrópicos.

### 1.3.1 Método *multigrid*

O *multigrid* é um dos métodos mais eficientes para resolução de sistemas lineares dado pela Eq. (1.1) que envolvem Equações Diferenciais Parciais (EDPs) elípticas, como a equação de Poisson (TROTTERBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001). Esse método consiste em usar um conjunto de malhas com diferentes graus de refinamento, percorridas ao longo de um processo iterativo.

Os estudos do método *multigrid* tiveram início na década de 1960 por Ferorenko (1964) e Bakhvalov (1966). Mas, apenas na década de 70 o *multigrid* foi reconhecido através dos trabalhos de Brandt (1977), que realizou estudos com problemas de transferência de calor e de escoamentos uni e bidimensionais de fluidos, lineares e não lineares. Nesse trabalho, Brandt (1977) mostrou que a razão de engrossamento (mais detalhes na seção 2.3) recomendável é  $re = 2$  e que o esquema CS é melhor que o esquema FAS para o caso de problemas lineares.

Na década de 80, foram publicados muitos artigos, tornando o *multigrid* um método padrão em diversas áreas de aplicação (CRAIG, 1996). Aplicações do *multi-*



*grid* podem ser encontrados em Tannehill, Anderson e Pletcher (1997), Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001) e Ferziger e Peric (2002).

Kelkar (1990), Sathiyamurthy e Patankar (1994) e Karki, Sathiyamurthy e Patankar (1996) discutiram o uso de métodos de correção por blocos e apresentaram o método *multigrid* por bloco (*Block Corrections Multigrid Method*, BCMM) para o caso de problemas com fortes anisotropias. Hortmann, Peric e Scheurer (1990) estenderam o *multigrid* para malhas co-localizadas e Smith, Cope e Vanka (1993) para malhas curvilíneas.

Em Brandt (1998) e Wesseling e Oosterlee (2001) são apresentadas diversas dificuldades computacionais do *multigrid*, tais como: suavizador, anisotropias, característica da malha, tipos de discretização, etc. Wesseling e Oosterlee (2001) realizaram também uma análise do método *multigrid* geométrico focado nas aplicações de CFD, apontando o *multigrid* como um dos mais importantes desenvolvimentos da análise numérica no século XX. Um estudo semelhante foi realizado por Stüben (2001) para o *multigrid* algébrico.

Hortmann, Peric e Scheurer (1990) e Ferziger e Peric (2002) apresentaram como propriedade do método *multigrid* que o número de iterações necessárias para a convergência na malha mais fina independe do número de nós da malha.

Larsson, Lien e Yee (2005) estudaram a equação de Poisson em malhas anisotrópicas, desenvolvendo um semiengrossamento condicional, que resultou em um algoritmo *multigrid* eficiente.

Jimack (2007) apresentou a combinação do *multigrid* com outras técnicas numéricas modernas, como malhas adaptativas, discretização de alta ordem, computação paralela, etc., em diversos problemas não lineares de CFD. Porém, ainda possuem obstáculos a serem superados quando essas técnicas são utilizadas em problemas em regime transiente.

A utilização do ciclo V no *multigrid* pode ser encontrada em: Briggs, Henson e McCormick (2000), Mesquita e De-Lemos (2004), Wesseling e Oosterlee (2001) e Yan, Thiele e Xue (2007); já o ciclo W, em: Chisholm (1997) e Manzano (1999).

Uma maneira de acelerar a convergência do *multigrid* é iniciar na malha mais grossa, chamado de *Multigrid Completo* (*Full Multigrid*, FMG). Alguns trabalhos que utilizam esse processo são: Chisholm (1997), Hortmann, Peric e Scheurer (1990), Manzano (1999) e Gonçalves (2013).

Uma introdução ao método *multigrid*, com detalhes na Análise de Fourier, os esquemas CS e FAS, FMG, suavizador, operadores de transferência entre malhas, complexidade, tipos de ciclos, análise espectral, aplicações, etc., podem ser encontrados nos livros de Wesseling (1992), Briggs, Henson e McCormick (2000) e Trottenberg,

Oosterlee e Schuller (2001).

### 1.3.2 Análise de Fourier Local

O desempenho do *multigrid* está diretamente ligado aos componentes escolhidos, como: níveis de malhas, suavizador, número de iterações do suavizador, ciclo, operadores de restrição e prolongação, etc. Porém, esta escolha geralmente é difícil, uma vez que pequenas alterações no método influenciam diretamente na taxa de convergência do método. A LFA fornece estimativas *a priori* para os fatores de suavização ou convergência dos parâmetros do *multigrid*, permitindo antecipar qual será o desempenho desse método para uma certa combinação de componentes.

Uma introdução sobre LFA pode ser encontrada em Stüben e Trottenberg (1982) e uma abordagem mais completa em Wesseling (1992), Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001) e Wienands e Joppich (2005).

Wienands e Joppich (2005) calcularam o fator de convergência do *multigrid* usando LFA por meio de um *software* para diversos problemas, em particular para problemas com difusão anisotrópica. Fizeram esta análise com diferentes suavizadores e operadores de restrição e prolongação, observando a taxa de convergência do *multigrid* para cada escolha dos componentes.

Swanson, Turkel e Rosson (2007) utilizaram a LFA para comparar as propriedades de suavização do esquema Runge-Kutta implícito com as de um esquema Runge-Kutta padrão para resolver as equações de Euler e Navier-Stokes.

Oosterlee e Gaspar (2008) aplicaram LFA às equações de poroelasticidade, um sistema de equações diferenciais parciais em regime transiente. Gaspar e Rodrigo (2017) utilizaram a LFA a fim de estudar a convergência do *multigrid* geométrico em um problema de poroelasticidade utilizando malhas triangulares.

Um estudo recente de LFA em problemas transientes foi feita em Franco et al. (2018). Nesse trabalho, tal análise foi empregada para obter o valor crítico do parâmetro que representa o grau de anisotropia espaço/tempo para a equação de Fourier 1D e 2D.

### 1.3.3 Problemas anisotrópicos

Problemas com anisotropia física foram estudados por Hutchinson e Raithby (1986) propondo o uso do *multigrid* baseado no método de correção aditiva de Settari e Aziz (1973), melhorando a convergência em problemas bi e tridimensionais quando há coeficientes fortemente anisotrópicos.

Como a convergência do *multigrid* está relacionada com os componentes utilizados, no caso de problemas anisotrópicos, os suavizadores do tipo relaxação por

ponto falham ou se degeneram (TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001). Então, outros suavizadores são estudados na literatura para se obter boa razão de convergência. Em Sivaloganathan (1991) são comparados os métodos Gauss-Seidel simétrico (*Symmetric Coupled Gauss-Seidel*, SCGS) e SIMPLE (*SIMPLE Pressure Correction*, SPC) no *multigrid* com bloco implícito (*Block Implicit Multigrid Method*, BLIMM). Oosterlee e Wesseling (1993) descrevem as versões linha de SCGS. Sockol (1993) compara o SIMPLE com uma versão linha do SCGS, que se mostrou superior na presença de malhas alongadas. Uma análise de suavização com engrossamento direcional e o uso de pré-condicionadores foi realizada por Pierce e Alonso (1998).

Para uma boa convergência do *multigrid* em problemas anisotrópicos, Briggs, Henson e McCormick (2000) apresentaram duas abordagens. Na primeira abordagem foi feita a relaxação (suavização) por pontos em apenas uma das direções dos eixos das coordenadas. Já na outra abordagem, a relaxação foi aplicada por linhas, com engrossamento padrão nas duas direções. Montero, Llorense e Salas (2001) compararam dois métodos *multigrid* robustos aplicados às equações de Navier-Stokes 3D para escoamento compressível: suavizadores alternados com engrossamento padrão e suavizadores implícitos com semiengrossamento.

Larsson, Lien e Yee (2005) desenvolveram um algoritmo do *multigrid* eficiente e simples de implementar com o uso de semiengrossamento condicional para a equação de Poisson em malhas anisotrópicas. Segundo Cordazzo (2006), em problemas anisotrópicos os métodos iterativos básicos suavizam os erros em apenas uma das direções coordenadas prejudicando a convergência do método.

Pinto e Marchi (2006) analisaram problemas com anisotropia geométrica, empregando a equação de Laplace bidimensional aplicada a algoritmos com diferentes tipos de engrossamento. Constataram que o algoritmo “semiengrossamento seguido de engrossamento padrão” com suavizador GS-LEX é eficiente para as anisotropias estudadas.

Suero, Pinto e Marchi (2008) estudaram o efeito da anisotropia física no *multigrid* em uma equação de advecção-difusão bidimensional com o coeficiente de anisotropia nos termos advectivos. Utilizaram o esquema de correção FAS, ciclo V e o suavizador *Modified Strongly Implicit* (MSI). Consideraram diversos campos de velocidade e analisaram a influência do número de iterações internas do suavizador, número de incógnitas e quantidade de malhas. Concluíram que quanto maior o número de pontos da malha, mais os problemas anisotrópicos se aproximam do isotrópico.

Lew et al. (2009) compararam a eficiência dos pré-condicionadores Jacobi, Cholesky Incompleto (*Incomplete Cholesky*, IC) e o *multigrid* algébrico para o método dos gradientes conjugados (CG) com a finalidade de resolver iterativamente o problema anisotrópico aplicado à eletroencefalografia. Os resultados com o *multigrid* alcançaram

um  $t_{CPU}$  de ordem de grandeza superior à do CG com pré-condicionadores padrão.

Gee, Hu e Tumnaro (2009) estudaram problemas anisotrópicos e apresentaram uma nova proposta de prolongação com o uso do *multigrid* algébrico. Tal proposta é realizada pelo novo suavizador chamado de Suavizador por Agregação (*Smoother Aggregation*, SA), usado para imitar o semiengrossamento apenas nas direções de forte acoplamento dos problemas anisotrópicos.

Oliveira, Pinto e Marchi (2012) apresentaram um estudo sobre anisotropia geométrica envolvendo diversas malhas e razões de aspecto. Também estudaram alguns parâmetros do *multigrid* tais como: suavizadores, restrição, número de níveis e número de iterações internas, além de diversos algoritmos de engrossamento. Nesse estudo, os autores propuseram o semiengrossamento parcial, que teve um bom desempenho.

Peherstorfer e Bungartz (2012) apresentaram um estudo do *multigrid* na resolução de problemas com anisotropia geométrica. Concluíram que, com o semiengrossamento no espaço e tempo, foi possível obter resultados eficientes.

Dedner, Muller e Scheichl (2014) estudaram o *multigrid* geométrico pré-condicionado para resolver problemas anisotrópicos em modelos da geofísica. Concluíram que o *multigrid* foi altamente eficiente para resolver a equação de correção da pressão, encontrada em modelos de previsão numérica do tempo.

Vassoler-Rutz, Pinto e Suero (2015) estudaram o resultado da anisotropia física com o uso do *multigrid* para dois problemas de difusão anisotrópica. Empregaram o esquema de correção FAS, ciclo V, os suavizadores MSI e Gauss-Seidel (GS). Com essa análise concluíram que, para fortes anisotropias, a ordem de complexidade do *multigrid* torna-se ruim. Vassoler-Rutz e Pinto (2016) analisaram o efeito da anisotropia física sobre o método *multigrid* no problema com anisotropia difusiva. Calcularam o fator de convergência assintótica e o fator de suavização via LFA e apresentaram uma análise de complexidade. Empregaram os suavizadores GS-RB e GS-LEX e concluíram que, para fortes anisotropias, a ordem de complexidade do *multigrid* torna-se ruim em ambos os suavizadores analisados.

Pinto, Rodrigo et al. (2016) mostraram a robustez do suavizador ILU (decomposição LU incompleta) em alguns problemas, incluindo um problema de difusão anisotrópico em malhas triangulares.

#### 1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Além deste primeiro capítulo introdutório, este texto está organizado em mais 6 capítulos, como segue. No Capítulo 2, apresentam-se os fundamentos teóricos sobre o MDF para a discretização de equações diferenciais, alguns métodos de resolução para sistemas de equações lineares e o método *multigrid*, além da anisotropia física.

No Capítulo 3, encontra-se a LFA detalhada para os suavizadores estudados. O modelo matemático e o detalhamento do modelo numérico, assim como o processo de discretização da equação e as condições de contorno empregadas são apresentados no Capítulo 4. No Capítulo 5, são apresentadas a validação do código utilizado e os detalhes computacionais. No Capítulo 6, encontram-se os resultados e sua discussão, enquanto as conclusões constam no Capítulo 7.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados os fundamentos teóricos para o desenvolvimento do presente estudo. São descritos o método de discretização, os métodos de resolução de sistemas lineares: Gauss-Seidel ponto-a-ponto e Gauss-Seidel por bloco, os fundamentos do *multigrid* e detalhes sobre os problemas anisotrópicos.

### 2.1 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

Os problemas de interesse em CFD podem ser modelados matematicamente por meio de equações ou sistemas de equações diferenciais. Para resolver numericamente essas equações é necessário discretizar o domínio de cálculo, gerando assim uma malha de pontos nas quais os termos da equação diferencial são aproximados e o sistema de equações algébricas é solucionado.

Um dos métodos mais utilizados para discretizar estas equações diferenciais é o precursor dos métodos numéricos, o MDF (FERZIGER; PERIC, 2002). Tal método tem como objetivo aproximar, por meio de expressões algébricas, cada termo do modelo matemático para cada ponto da malha (FERZIGER; PERIC, 2002).

Em problemas bidimensionais, com domínio retangular  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L_x; 0 \leq y \leq L_y\}$  admite-se um conjunto de  $N = N_x N_y$ , em que  $N_x$  e  $N_y$  representam o número de pontos nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, gerando uma malha, denotada por  $\Omega^h$ , determinada pelos pontos

$$(x_i, y_j) = ((i - 1)h_x, (j - 1)h_y), \quad (2.1)$$

com  $h_x = L_x/(N_x - 1)$  e  $h_y = L_y/(N_y - 1)$  onde  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$  e  $h_x$  e  $h_y$  indicam a distância entre dois nós consecutivos, nas direções coordenadas  $x$  e  $y$ , respectivamente. Neste trabalho, admitiu-se  $L_x = L_y = 1$  e  $h_x = h_y = h$ . A Fig. 1 representa o domínio quadrado com esta restrição.

Na Fig. 1 pode-se observar à esquerda a representação de um domínio contínuo,  $\Omega$ , e, à direita, um conjunto de pontos discretos (malha),  $\Omega^h$ , utilizado na obtenção da solução numérica.

Apesar desta dissertação tratar apenas de problemas bidimensionais, por questões didáticas apresenta-se primeiramente o caso unidimensional. A derivada de uma função contínua  $f(x)$  é obtida por:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \quad (2.2)$$

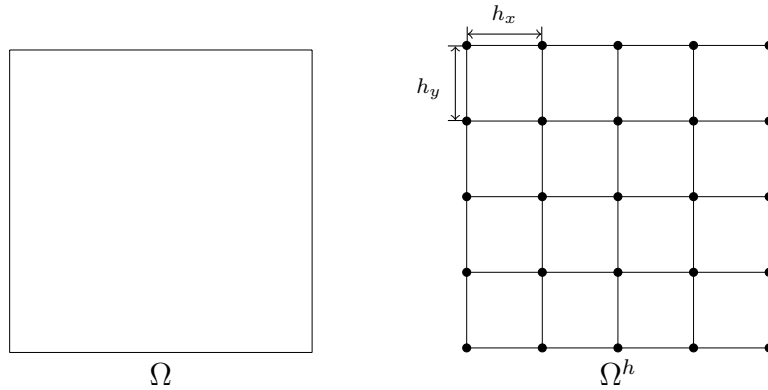


FIGURA 1 – Transformação do domínio contínuo  $\Omega$  em domínio discreto  $\Omega^h$ .

No MDF, a aproximação dos termos envolvendo derivadas pode ser feita de diversas formas, sendo a mais empregada a expansão em série de Taylor, a qual permite aproximar o valor da função  $f(x)$  conhecendo-se o valor de  $f(x_0)$ . Seja  $f(x)$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  e que possua derivadas contínuas até ordem  $n$  nesse intervalo. Assim, tem-se que:

$$f(x) = f(x_0) + h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_0} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x_0} + \cdots + R_n, \quad (2.3)$$

onde,  $R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left. \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}} \right|_{\xi}$  e  $x_0 \leq \xi \leq x$ .

A expansão em série de Taylor do valor de  $f$  em  $x = x_i + h$  em torno do valor de  $f$  em  $x = x_i$  é

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_i} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=x_i} + \cdots + R_n. \quad (2.4)$$

A Eq. (2.4) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_i} - \frac{h^2}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=x_i} - \cdots - \frac{R_n}{h}. \quad (2.5)$$

Para simplificar a notação da Eq. (2.5), utiliza-se  $u$  para a variável dependente e  $x$  para a variável independente.

A aproximação dada pela Eq. (2.6) é o método de 1ª ordem, que utiliza um ponto a jusante (*Downwind Differencing Scheme*, DDS).

$$\left( \frac{du}{dx} \right)_i \approx (u_{DDS}^i)_i = \frac{(u_{i+1} - u_i)}{h}. \quad (2.6)$$

A Eq. (2.7) representa o método de 1ª ordem, o qual utiliza um ponto a montante (*Upwind Differencing Scheme*, UDS).

$$\left( \frac{du}{dx} \right)_i \approx (u_{UDS}^i)_i = \frac{(u_i - u_{i-1})}{h}. \quad (2.7)$$

A Eq. (2.8) apresenta o método de 2ª ordem, chamado diferença central de dois pontos (*Central Differencing Scheme*, CDS).

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \approx (u_{CDS_2}^i)_i = \frac{(u_{i+1} - u_{i-1}))}{2h}. \quad (2.8)$$

Apresenta-se agora o caso bidimensional e já considerando a sua aplicação à equação de Poisson, dada por

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = S(x, y). \quad (2.9)$$

A aproximação da Eq. (2.9) em relação a  $x$  obtida pelo esquema CDS é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2}. \quad (2.10)$$

Já a aproximação em relação a  $y$  da Eq. (2.9) é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2}. \quad (2.11)$$

Substituindo as Eqs. (2.10) e (2.11) na Eq. (2.9), obtém-se:

$$\left(\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2}\right) + \left(\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2}\right) = S(x_i, y_j). \quad (2.12)$$

Variando-se os índices  $i$  e  $j$  na Eq. (2.12), obtém-se um sistema de equações do tipo da Eq. (1.1), o qual pode ser resolvido por métodos diretos ou iterativos.

## 2.2 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A partir de um sistema de equações do tipo dado pela Eq. (1.1). Para resolver este sistema linear recorre-se aos métodos numéricos, os quais são divididos em: diretos e iterativos.

Os métodos diretos fornecem a solução exata do sistema, caso ela existir, com exceção aos erros de arredondamento (CUNHA, 2003). No entanto, estes métodos possuem algumas desvantagens: são sensíveis aos erros de arredondamento, provocam o preenchimento de matrizes esparsas, possuem um tempo de processamento alto. Assim, são indicados apenas para a resolução de sistemas lineares de pequeno porte (BURDEN; FAIRES, 2008).

Técnicas iterativas são pouco utilizadas em sistemas lineares de pequena dimensão, pois o tempo de CPU ( $t_{CPU}$ ) excede o tempo gasto por técnicas diretas (BURDEN; FAIRES, 2008). Contudo, os métodos iterativos são bastante robustos,



sendo eficientes tanto em cálculos, como em armazenamento no computador. O número de operações necessárias para resolver um sistema de  $n$  incógnitas por meio de métodos diretos geralmente é da ordem  $O(n^3)$  e, por meio de suavizadores, é da ordem  $O(n^2/2)$  (FERZIGER; PERIC, 2002).

Os sistemas lineares gerados mediante a discretização pelo MDF, na maioria das vezes, apresentam matrizes dos coeficientes tri ou pentadiagonais, para os respectivos modelos uni ou bidimensionais. Assim, os métodos iterativos são mais adequados para obter a solução.

Dentre os diversos métodos iterativos básicos (Jacobi, Jacobi ponderado, Gauss-Seidel, SOR (*Successive Over-Relaxation*), etc), a seguir descreve-se o método GS-LEX.

Pode-se reescrever a matriz  $A$  da Eq. (1.1) da seguinte maneira:

$$A = D - L - U, \quad (2.13)$$

onde  $D$  é matriz que contém os elementos da diagonal de  $A$ ,  $L$  guarda a parte inferior de  $A$  e  $U$  a parte superior. Substituindo a Eq. (2.13) na Eq. (1.1), tem-se que:

$$Au = f \Rightarrow (D - L - U)u = f \Rightarrow (D - L)u = Uu + f \Rightarrow u = (D - L)^{-1}Uu + (D - L)^{-1}f. \quad (2.14)$$

Pode-se expressar o método Gauss-Seidel como

$$u \leftarrow S_G u + (D - L)^{-1}f, \quad (2.15)$$

com

$$S_G = (D - L)^{-1}U. \quad (2.16)$$

Portanto, esse método resolve cada uma das variáveis do sistema de equações e utiliza os valores das variáveis mais atualizadas no processo iterativo.

Em Burden e Faires (2008) e Cunha (2003) são encontrados detalhes sobre os métodos diretos e outros métodos iterativos.

A seguir, apresenta-se o método de Gauss-Seidel para o caso específico bidimensional onde se tem matrizes pentadiagonais, as classes deste método por pontos e por blocos, e outras ordenações além da clássica ordenação lexicográfica.

### 2.2.1 Métodos de Gauss-Seidel

A Fig. 2 mostra o recorte de uma malha bidimensional com 5 pontos para resolver cada equação do sistema de equações.

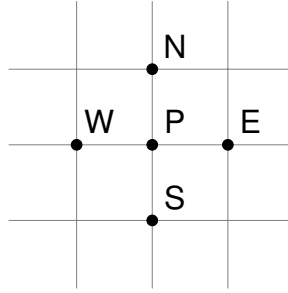


FIGURA 2 – Cinco pontos em uma malha bidimensional uniforme.

Os pontos P (central), W (oeste), E (leste), N (Norte) e S (Sul) mostrados na Fig. 2 correspondem aos pontos  $(i, j)$ ,  $(i - 1, j)$ ,  $(i + 1, j)$ ,  $(i, j + 1)$ ,  $(i, j - 1)$ . Assim, um exemplo para o esquema de cinco pontos, utilizando MDF, é apresentado na Eq. (2.17).

$$a_{i,j}u_{i,j} + a_{i-1,j}u_{i-1,j} + a_{i+1,j}u_{i+1,j} + a_{i,j-1}u_{i,j-1} + a_{i,j+1}u_{i,j+1} = f_{i,j}. \quad (2.17)$$

Pela representação da Fig. 2 considera-se:

$$a_P = a_{i,j}, a_W = a_{i-1,j}, a_E = a_{i+1,j}, a_S = a_{i,j-1}, a_N = a_{i,j+1} \quad (2.18)$$

e

$$u_P = u_{i,j}, u_W = u_{i-1,j}, u_E = u_{i+1,j}, u_S = u_{i,j-1}, u_N = u_{i,j+1}, f_P = f_{i,j}. \quad (2.19)$$

Um conjunto de equações do tipo da Eq. (2.17) escrita para cada par  $(i, j)$  do domínio acarreta em um sistema de equações, que pode ser resolvido iterativamente por Gauss-Seidel. Pode-se reescrever a Eq. (2.17) da seguinte maneira:

$$u_P^{k+1} = -(a_W u_W^{k+1} + a_E u_E^k + a_S u_S^{k+1} + a_N u_N^k - f_P) / a_P, \quad (2.20)$$

onde o superíndice  $k$  representa a  $k$ -ésima iteração e o subíndice a posição na malha.

Na Eq. (2.20), para aproximar  $u_P$  são necessários os quatro vizinhos mais próximos.

O método de Gauss-Seidel pode ser classificado como suavizador ponto-a-ponto e por blocos (por exemplo linha-a-linha). A diferença entre cada suavizador é a maneira como as incógnitas são atualizadas.

Nos métodos ponto-a-ponto, cada variável é atualizada individualmente. Pode-se ver na Fig. 3 são ilustradas duas possíveis ordenações para Gauss-Seidel ponto-a-ponto: (a) a ordenação lexicográfica; (b) a ordenação *red-black*.

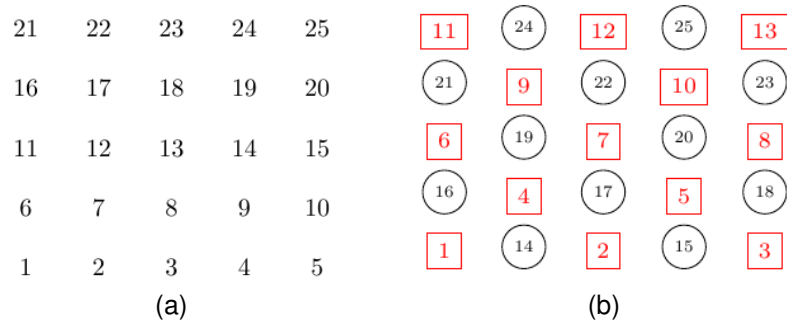


FIGURA 3 – Ordenação dos pontos de  $\Omega^h$  para o emprego do método Gauss-Seidel ponto a ponto: (a) lexicográfica; (b) *red-black*.

Na ordenação *red-black*, ilustrada a Fig. 3b, a atualização das incógnitas pode ser realizada simultaneamente nos pontos definidos como vermelhos (quadrados) e pretos (circunferências).

Nos métodos por blocos, cada bloco pode conter as informações, por exemplo, de uma coluna ou linha inteiras, dos pontos da malha a ser resolvida. Cada bloco é atualizado de uma única vez. Na Fig. 4 são apresentadas duas ordenações para o Gauss-Seidel por blocos: (a) *x*-linha-GS e (b) *y*-linha-GS; na Fig. 5: (a) *x*-zebra-GS e (b) *y*-zebra-GS.

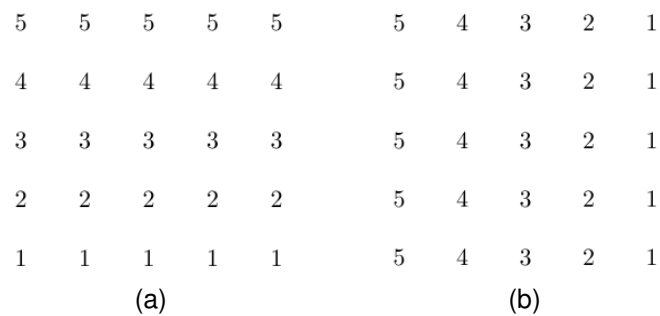


FIGURA 4 – Ordenação dos pontos de  $\Omega^h$  para o emprego do método Gauss-Seidel por blocos: (a) na direção *x* e (b) na direção *y*.

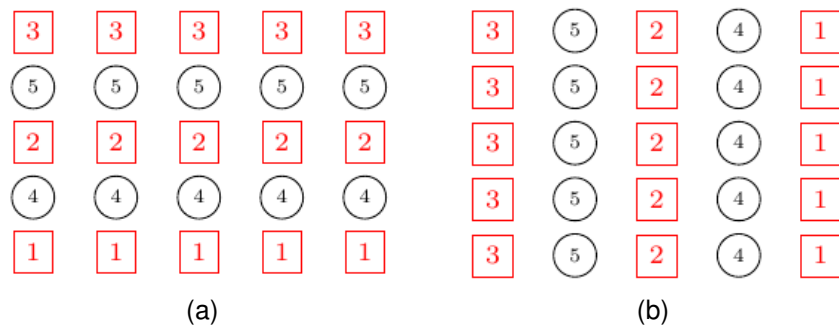


FIGURA 5 – Ordenação dos pontos de  $\Omega^h$  para o emprego do método Gauss-Seidel por blocos: (a) zebra na direção *x* e (b) zebra na direção *y*.

## 2.3 MÉTODO *MULTIGRID*

### 2.3.1 Filosofia do método *multigrid*

Apesar desta dissertação tratar de problemas bidimensionais, por questão didática pretende-se inserir conceitos básico em um contexto unidimensional. Primeiramente define-se modos de Fourier suaves e oscilatórios.

Os modos de Fourier são dados por

$$w_j^h = \sin\left(\frac{jk\pi}{N}\right), \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad 0 \leq j \leq N, \quad (2.21)$$

em que  $w_j$  é uma aproximação da solução  $u$ ,  $k$  é o número de ondas ou modos de Fourier e  $N$  é o número de pontos.

A Fig.6 ilustra alguns modos de Fourier para  $k = 1$ ,  $k = 3$  e  $k = 6$ . Percebe-se que os valores de  $k$  pequenos representam ondas longas e suaves, enquanto valores de  $k$  grandes correspondem a ondas curtas e oscilatórias.

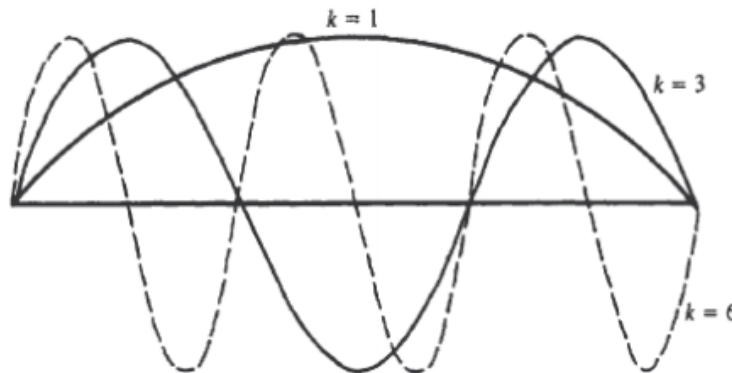


FIGURA 6 – Modos de Fourier (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000).

Sabe-se que alguns métodos iterativos básicos (como Jacobi ponderado, Gauss-Seidel, etc) possuem a propriedade de suavização, ou seja, a propriedade de rápida redução dos modos oscilatórios do erro, restando apenas os modos suaves. Sabe-se também que os modos suaves tornam-se mais oscilatórios em malhas mais grossas (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000; TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001).

A grande vantagem do método *multigrid*, em relação aos métodos iterativos básicos é que as informações são levadas para diferentes malhas, acelerando a taxa de convergência do método, pois usa como princípios básicos a propriedade de suavização e a correção de malha grossa (resolução da equação residual em malhas mais grossas).

Portanto, o *multigrid* é uma técnica que envolve a transferência de informações de um modelo numérico para várias malhas, geralmente desde a mais fina até a mais grossa para que dessa forma todas as frequências do erro sejam suavizadas. Logo, é necessário de um conjunto de malhas, um suavizador com boas propriedades e os operadores de transferência entre as malhas (restrição e prolongação).

### 2.3.2 Equação residual

Sejam  $v$  uma solução aproximada e  $u$  a solução exata da Eq. (1.1), ou seja, de um sistema de equações algébricas. Então o erro é calculado da seguinte maneira:

$$e = u - v. \quad (2.22)$$

A magnitude do erro é calculada por alguma norma vetorial, como a norma euclidiana ou a norma infinito (BURDEN; FAIRES, 2008), definidas, respectivamente, por:

$$\| e \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_i^2}, \quad (2.23)$$

$$\| e \|_\infty = \max_i |e_i|, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (2.24)$$

em que  $e_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor erro e  $N$  é o tamanho do vetor  $e$ .

Na maioria dos casos,  $u$  não é conhecida, não sendo possível calcular  $e$ , segundo a Eq. (2.22). No entanto, pode-se calcular o quanto a solução aproximada  $v$  não satisfaz o sistema dado pela Eq. (1.1), a partir do resíduo, dado por:

$$r = f - Av. \quad (2.25)$$

Substituindo-se a Eq. (2.22) na Eq. (1.1), obtém-se  $Ae = f - Av$ . Utilizando-se da Eq. (2.25), obtém-se a equação

$$Ae = r. \quad (2.26)$$

A Eq. (2.26) é chamada de equação residual, sendo de fundamental importância para o *multigrid*, pois indica que o erro representado pela Eq. (2.22) satisfaz o mesmo conjunto de equações que a solução  $u$  quando  $f$  é substituído pelo resíduo  $r$ .

Supondo que foi obtida uma aproximação  $v$  para a solução do sistema linear dado pela Eq. (1.1), através de um método iterativo, calcula-se o resíduo pela Eq. (2.25). Para que a aproximação  $v$  seja mais refinada, determina-se o erro pela Eq. (2.26) e posteriormente se corrige a solução atual, obtendo uma nova aproximação por meio da equação

$$u = v + e. \quad (2.27)$$

Portando, na solução atualizada é adicionado o erro. Esse procedimento chama-se “refinamento iterativo”.

### 2.3.3 Operadores de restrição e ponderação

As informações da malha mais fina ( $\Omega^h$ ) são transferidas para a malha mais grossa ( $\Omega^{2h}$ ) por meio de um operador, denominado operador de restrição e representado por  $I_h^{2h}$ . Na literatura são encontrados vários operadores de restrição, tais como: injeção, ponderação completa (*Full Weighting*, FW) e meia ponderação (*Half Weighting*, HW) (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000; TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001). O operador de injeção é um dos mais utilizados nos casos de discretização da malha pelo MDF. Nesse caso, as informações referentes aos pontos da malha fina são transferidos para pontos coincidentes na malha grossa, definidos por

$$v_{i,j}^{2h} = I_h^{2h} v_{2i,2j}^h, \quad 1 \leq i \leq \frac{N_x}{2} - 1, 1 \leq j \leq \frac{N_y}{2} - 1, \quad (2.28)$$

onde  $N_x$  e  $N_y$  são a quantidade de nós na malha fina nas direções coordenadas  $x$  e  $y$ , respectivamente.

A Fig. 7 ilustra como o operador de restrição por injeção transfere os pontos da malha fina para a malha imediatamente mais grossa para o caso bidimensional.

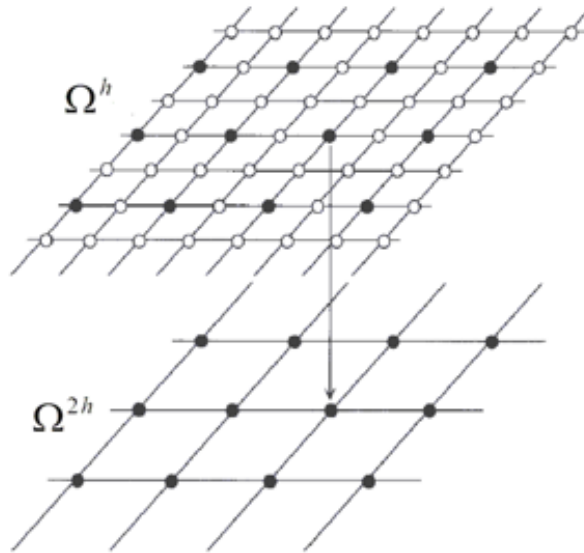


FIGURA 7 – Restrição por injeção.

O operador de restrição FW é dado por:

$$v_{i,j}^{2h} = \frac{1}{16} [v_{2i-1,2j-1}^h + v_{2i-1,2j+1}^h + v_{2i+1,2j-1}^h + v_{2i+1,2j+1}^h + 2(v_{2i,2j-1}^h + v_{2i-1,2j}^h + v_{2i+1,2j}^h + v_{2i,2j+1}^h) + 4v_{2i,2j}^h]. \quad (2.29)$$

O operador HW é definido como:

$$v_{i,j}^{2h} = \frac{1}{8} [v_{2i,2j-1}^h + v_{2i,2j+1}^h + v_{2i+1,2j}^h + v_{2i-1,2j}^h + 4v_{2i,2j}^h]. \quad (2.30)$$

As propriedades espectrais estabelecidas a seguir, pelo operador de ponderação completa, mostram como o operador age sobre os modos de Fourier do operador original  $A^h$ , dado pela Eq. (2.21).

Tem-se que (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000)

$$I_h^{2h} w_k^h = \cos^2 \left( \frac{k\pi}{2N} \right) w_k^{2h}, \quad 1 \leq k \leq \frac{N}{2}. \quad (2.31)$$

De acordo com a Eq. (2.31), pode-se perceber que o operador de restrição age nos  $k$ -ésimos modos suaves de  $A^h$ , gerando os  $k$ -ésimo modos de  $A^{2h}$ , não alterando o número de ondas após a ação do operador nos modos de Fourier suaves (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000). Como o número de pontos, após o processo de restrição, é menor que a quantidade de pontos da malha anterior, os modos se tornam mais oscilatórios na malha atual.

As informações da malha grossa ( $\Omega^{2h}$ ) para a malha imediatamente mais fina ( $\Omega^h$ ) são transferidas pelo operador de prolongação, denotado por  $I_{2h}^h$  (WESSELING, 1992). Para problemas bidimensionais o operador de prolongação mais comum é o interpolador bilinear, dado por

$$v^h = I_{2h}^h v^{2h}, \quad (2.32)$$

ou ainda

$$v_{2i,2j}^h = v_{i,j}^{2h} \quad (2.33)$$

$$v_{2i+1,2j}^h = \frac{1}{2} (v_{i,j}^{2h} + v_{i+1,j}^{2h}) \quad (2.34)$$

$$v_{2i,2j+1}^h = \frac{1}{2} (v_{i,j}^{2h} + v_{i,j+1}^{2h}) \quad (2.35)$$

$$v_{2i+1,2j+1}^h = \frac{1}{4} (v_{i,j}^{2h} + v_{i+1,j}^{2h} + v_{i,j+1}^{2h} + v_{i+1,j+1}^{2h}), \quad (2.36)$$

com,  $1 \leq i \leq \frac{N_x}{2} - 1, 1 \leq j \leq \frac{N_y}{2} - 1$ .

A Fig. 8 ilustra como as informações contidas nos pontos da malha grossa são transferidas para a malha imediatamente mais fina, mediante interpolação bilinear.

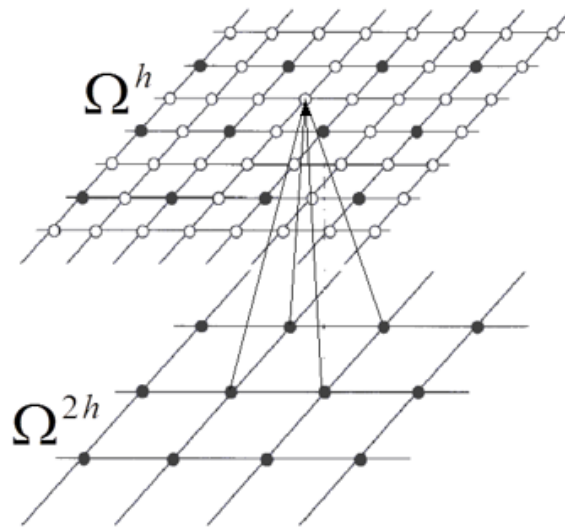


FIGURA 8 – Operador de prolongação.

#### 2.3.4 Ciclos *multigrid* e algoritmos

A forma com que as diferentes malhas são percorridas durante a execução do *multigrid* é chamada ciclo *multigrid*, sendo que diversos ciclos (V, W, F, etc.) podem ser executados até que um critério de parada seja satisfeito. Os ciclos F e V são ilustrados na Fig. 9, sendo o ciclo V o mais comum.

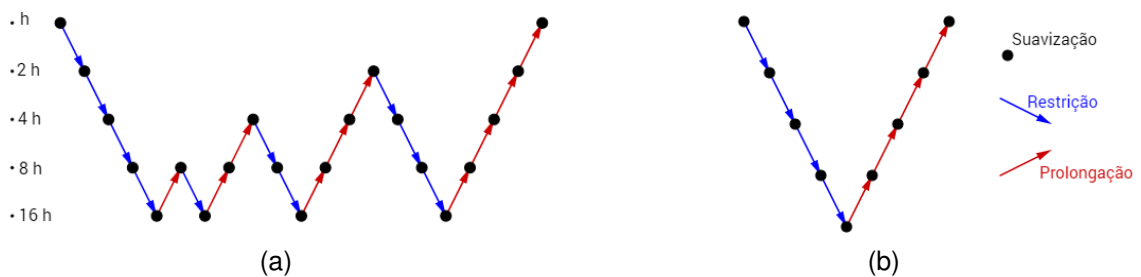


FIGURA 9 – Diagramas dos ciclos(a) F e (b) V, aplicados a 5 malhas.

Existe uma generalização do ciclo V conhecida como ciclo  $\mu$  (WESSELING, 1992). Assim,  $\mu = 1$  e  $\mu = 2$  correspondem aos ciclos V e W, respectivamente.

O algoritmo do *multigrid* pode ser construído segundo os esquemas CS ou FAS. O que difere o esquema FAS do CS é que neste esquema, além do resíduo, a aproximação da solução também é transferida para a malha mais grossa subsequente. Depois, na malha mais grossa, o erro é transferido para a malha imediatamente mais fina para aproximar a solução. Isso quer dizer que, no FAS não se resolve a equação residual explicitamente e sim a equação discretizada na malha mais grossa.



O esquema CS consiste em resolver apenas na malha mais fina a Eq. (1.1) e nas demais malhas grossas a equação residual, Eq. (2.26). De acordo com essas informações, para problemas lineares e não lineares indicam-se os esquemas CS e FAS, respectivamente (BRANDT, 1977).

Mais detalhes sobre o CS e o FAS podem ser encontrados em Wesseling (1992), Briggs, Henson e McCormick (2000) e Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001).

Como nesta dissertação será tratado de um problema de difusão, ou seja, um problema linear, então somente o esquema CS será usado. Assim, apresentam-se os passos para a implementação do esquema CS para um ciclo V no Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1:** Ciclo V com esquema CS para várias malhas

---

**Entrada:**  $v_0, v, f, h, \nu_1, \nu_2$

**início**

Suavizar  $A^h u^h = f^h$   $\nu_1$  vezes em  $\Omega^h$  com estimativa inicial  $v_0^h$ ;

Calcular o resíduo  $R^h = f^h - A^h v^h$ ;

Restringir o resíduo da malha  $\Omega^h$  para a malha  $\Omega^{2h}$  :  $f^{2h} = I_h^{2h} R^h$ ;

a. Suavizar  $A^{2h} u^{2h} = f^{2h}$   $\nu_1$  vezes em  $\Omega^{2h}$  com estimativa inicial  $v_0^{2h} = 0$ ;

b. Calcular o resíduo  $R^{2h} = f^{2h} - A^{2h} v^{2h}$ ;

c. Restringir o resíduo da malha  $\Omega^{2h}$  para a malha  $\Omega^{4h}$  :  $f^{4h} = I_{2h}^{4h} R^{2h}$ ;

i. Suavizar  $A^{4h} u^{4h} = f^{4h}$   $\nu_1$  vezes em  $\Omega^{4h}$  com estimativa inicial  $v_0^{4h} = 0$ ;

ii. Calcular o resíduo  $R^{4h} = f^{4h} - A^{4h} v^{4h}$ ;

iii. Restringir o resíduo da malha  $\Omega^{4h}$  para a malha  $\Omega^{8h}$  :  $f^{8h} = I_{4h}^{8h} R^{4h}$ ;

$\vdots$   
 Resolver  $A^{Kh} u^{Kh} = f^{Kh}$ ;  
 $\vdots$

iv. Corrigir  $v^{4h} \leftarrow v^{4h} + I_{8h}^{4h} v^{8h}$ ;

v. Suavizar  $A^{4h} u^{4h} = f^{4h}$   $\nu_2$  vezes em  $\Omega^{4h}$  com estimativa inicial  $v^{4h}$ ;

d. Corrigir  $v^{2h} \leftarrow v^{2h} + I_{4h}^{2h} v^{4h}$ ;

e. Suavizar  $A^{2h} u^{2h} = f^{2h}$   $\nu_2$  vezes em  $\Omega^{2h}$  com estimativa inicial  $v^{2h}$ ;

Corrigir  $v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h v^{2h}$ ;

Suavizar  $A^h u^h = f^h$   $\nu_2$  vezes em  $\Omega^h$  com estimativa inicial  $v^h$ ;

**fim**

---

## 2.4 NOTAÇÃO ESTÊNCIL

A notação estêncil é apropriada para definir um operador diferencial discreto  $L_h$  em uma malha cartesiana retangular  $\Omega^h$ . Segundo Trottenberg, Oosterlee e Schuller

(2001) e Wienands e Joppich (2005) é conveniente usar a terminologia estêncil para descrever funções de malhas do tipo  $w_h : \Omega^h \rightarrow \mathbb{R}$  e também para facilitar o uso da LFA. Portanto, considera-se a função de malha

$$\begin{aligned} w_h : \Omega^h &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto w_h(x, y). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Um estêncil geral  $[s_{\kappa_1 \kappa_2}]_h$  é dado por

$$[s_{\kappa_1 \kappa_2}]_h = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & s_{-1,1} & s_{0,1} & s_{1,1} & \cdots \\ \cdots & s_{-1,0} & s_{0,0} & s_{1,0} & \cdots \\ \cdots & s_{-1,-1} & s_{0,-1} & s_{1,-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_h \quad (s_{\kappa_1 \kappa_2} \in \mathbb{R}), \quad (2.38)$$

em que  $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}$  indicam as posições no estêncil e define um conjunto de funções de malha dadas por

$$[s_{\kappa_1 \kappa_2}]_h w_h(x, y) = \sum_{(\kappa_1, \kappa_2)} s_{\kappa_1 \kappa_2} w_h(x + \kappa_1 h_x, y + \kappa_2 h_y), \quad (2.39)$$

em que  $h_x$  e  $h_y$  indicam as distâncias entre os nós espaciais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Assume-se que somente um número finito de coeficientes  $s_{\kappa_1 \kappa_2}$  não são zeros.

Os estêncis mais utilizados são os compactos de cinco pontos e de nove pontos, dados respectivamente por

$$\begin{bmatrix} & s_{0,1} & \\ s_{-1,0} & s_{0,0} & s_{1,0} \\ & s_{0,-1} & \end{bmatrix}_h \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} s_{-1,1} & s_{0,1} & s_{1,1} \\ s_{-1,0} & s_{0,0} & s_{1,0} \\ s_{-1,-1} & s_{0,-1} & s_{1,-1} \end{bmatrix}_h. \quad (2.40)$$

Para mostrar este procedimento, considera-se o operador Laplaciano  $L_u = -\Delta u = -(u_{xx} + u_{yy})$ . A discretização em uma malha  $\Omega^h : [0, 1] \times [0, 1]$  pelo MDF e a aproximação de segunda ordem CDS conduzem a

$$\begin{aligned} L_h u_h(x, y) &= -\Delta_h u_h(x, y) \\ &= \frac{1}{h^2} [4u_h(x, y) - u_h(x - h, y) - u_h(x + h, y) - u_h(x, y - h) - u_h(x, y + h)] \\ &= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}_h u_h(x, y). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Assim,

$$L_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}_h \quad (2.42)$$

representa o estêncil de cinco ponto do operador Laplaciano discreto  $\Delta_h$ .

## 2.5 PROBLEMAS ANISOTRÓPICOS

A anisotropia pode ser classificada em duas categorias: anisotropia física e anisotropia geométrica.

A anisotropia física é o caso em que a equação diferencial tem coeficientes constantes para as derivadas parciais, porém distintos nas direções coordenadas (PINTO, 2006). Neste caso, quando algum coeficiente é relativamente muito maior, em módulo, tem-se forte acoplamento na direção correspondente a este coeficiente. Já a anisotropia geométrica é caracterizada quando a malha discretizada possui tamanhos constantes, porém, distintos nas direções coordenadas.

Segundo Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001), uma generalização para o problema difusivo bidimensional para anisotropia física e geométrica é dado por:

$$-|g^2 + \varepsilon w^2| u_{xx} + 2(1 - \varepsilon) g w u_{xy} - |w^2 + \varepsilon g^2| u_{yy} = f, \quad (2.43)$$

em que  $g = \cos \alpha$ ,  $w = \sin \alpha$ ,  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  e  $0 < \varepsilon \ll 1$  ou  $\varepsilon \gg 1$ , ou seja,  $\varepsilon$  distinto da unidade.

Para  $\alpha = 0$ , a expressão dada pela Eq. (2.43) torna o coeficiente de anisotropia alinhado ao eixo  $x$ :

$$-u_{xx} - \varepsilon u_{yy} = f. \quad (2.44)$$

Para o caso  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , a expressão da Eq. (2.43) torna-se alinhada ao eixo  $y$ :

$$-\varepsilon u_{xx} - u_{yy} = f. \quad (2.45)$$

Neste trabalho será usada a anisotropia alinhada ao eixo  $x$ , ou seja,  $\alpha = 0$  e dada pela Eq. (2.44). De acordo com a seção 2.1, considera-se a notação estêncil da matriz  $A$  da Eq. (1.1) (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000), como segue:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} & -\varepsilon & \\ -1 & 2(\varepsilon + 1) & -1 \\ & -\varepsilon & \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Para maiores detalhes sobre este modelo para a anisotropia geométrica podem ser vistos em Briggs, Henson e McCormick (2000) e Oliveira, Pinto e Marchi (2012). Para o caso da anisotropia física tem-se, por exemplo, a discretização da Eq. (2.44) em uma malha com  $h$  constante em ambas as direções  $h_x = h_y = h$  e  $\varepsilon \neq 1$ . Assim, considera-se:

- Caso 1: Para  $0 < \varepsilon \ll 1$  o forte acoplamento está na direção  $x$ ;

- Caso 2: Para  $\varepsilon \gg 1$  o forte acoplamento está em  $y$ ;
- Caso 3: Para  $\varepsilon = 1$  o problema é isotrópico.

Quando  $\varepsilon \approx 0$ , o *multigrid* possui desempenho ruim, pois, considerando-se o caso limite em que  $\varepsilon = 0$ , a Eq. (2.44) torna-se

$$-u_{xx} = f, \quad (2.47)$$

e na notação estêncil tem-se que

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 0 & & \\ -1 & 2 & -1 \\ & 0 & \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Nota-se que o problema se torna um conjunto de equações de Poisson unidimensionais na direção  $x$ , sem ligação com o eixo  $y$ . Isso significa que o erro na direção  $y$  será aleatório, sem qualquer tipo de controle e o engrossamento padrão (engrossamento igual em ambas as direções coordenadas) geralmente não funcionará bem.

Para malhas uniformes, a razão de engrossamento das malhas é definida como  $re = p/q$ , em que  $q$  mede o espaçamento entre os nós da malha fina ( $\Omega^h$ ) e  $p$  mede o espaçamento entre os nós da malha imediatamente mais grossa ( $\Omega^{2h}$ ).

Como já apresentado, o engrossamento padrão no caso bidimensional refere-se ao engrossamento igual em ambas as direções coordenadas. Já o semiengrossamento refere-se ao engrossamento em apenas uma das direções coordenadas.

Briggs, Henson e McCormick (2000) apontam duas abordagens para garantir uma boa convergência do *multigrid* no caso de anisotropia:

1. empregar um suavizador por pontos (suavização ponto-a-ponto), com engrossamento da malha em apenas uma das direções dos eixos coordenados (semiengrossamento), ou
2. empregar um suavizador por blocos (suavização linha-a-linha) e engrossamento padrão da malha (engrossamento nas duas direções).

A primeira abordagem consiste em um semiengrossamento, como pode ser observado na Fig. 10, em que a malha grossa tem o mesmo espaçamento que a malha fina em  $y$  e o dobro em  $x$ .

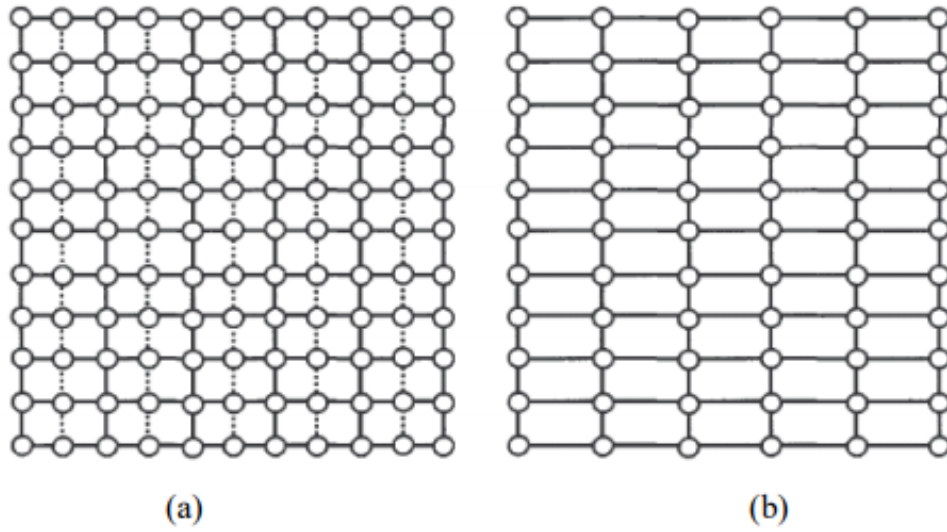


FIGURA 10 – Semiengrossamento na direção  $x$  da (a) malha fina original para a (b) malha grossa (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000).

Dentre os diversos trabalhos que resolveram a equação de difusão anisotrópica usando a estratégia 1 (semiengrossamento), tem-se Zhang (2002), Larsson, Lien e Yee (2005), Cordazzo (2006), Pinto e Marchi (2006), Gee, Hu e Tumnaro (2009) e Oliveira, Pinto e Marchi (2012). Neste trabalho, optou-se pela estratégia 2, ou seja, a suavização por blocos.

No processo de suavização por linhas o sistema de equações é escrito na forma de blocos, em que cada bloco é associado a uma linha. No caso do problema dado pela Eq. (2.44) a matriz da Eq. (1.1) é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} D & -cI & \dots & \\ -cI & D & -cI & \dots \\ \vdots & -cI & D & -cI \\ & \vdots & \vdots & \vdots & -cI \\ & & \dots & -cI & D \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

com  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $c = \varepsilon/h^2$  e  $I \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$  sendo a matriz identidade. Neste modelo, cada bloco  $D \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$  na diagonal principal na Eq.(2.49) é tridiagonal, idêntico e tem estêncil  $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 + 2\varepsilon & -1 \end{pmatrix}$ .

### 3 ANÁLISE DE FOURIER LOCAL

A LFA é uma ferramenta muito poderosa para realizar um estudo quantitativo e de planejamento do *multigrid* para problemas em geral (TROTTEMBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001), que estima o comportamento da convergência assintótica do *multigrid*.

O principal objetivo da LFA é estimar o raio espectral do operador *multigrid*, que é uma medida de verificar a taxa de redução do erro (WIENANDS; JOPPICH, 2005).

Neste capítulo são apresentados os conceitos gerais e terminologia da LFA, bem como uma análise de duas malhas para o fator de convergência usando as ordenações lexicográfica, *red-black*, linha e zebra.

#### 3.1 CONCEITOS GERAIS

Para este trabalho foram seguidos Stüben e Trottenberg (1982), Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001) e Wienands e Joppich (2005). Tais autores afirmam que qualquer operador discreto, não linear, com coeficientes não constantes, pode ser linearizado localmente e pode ser substituído localmente por um operador com coeficientes constantes.

Todas as considerações no contexto da LFA são baseadas em funções de malha da forma

$$\varphi(\theta, x) = e^{i\theta x/h}, \quad (3.1)$$

em que  $x$  varia em uma malha infinita dada  $\Omega^h$  e  $\theta$  é um parâmetro contínuo que representa a frequência da função de malha.

O objetivo da LFA é estimar o fator de suavização de  $S_h$  e os fatores de convergência de duas malhas, assim como os fatores de redução do erro para  $M_h^{2h}$ . Denota-se essas medições por

$$\mu_{loc}(S_h), \quad \rho_{loc}(M_h^{2h}), \quad \sigma_{loc}(M_h^{2h}). \quad (3.2)$$

O fator de suavização  $\mu_{loc}(S_h)$  é o raio espectral do operador de suavização, estimando o quanto são reduzidas as componentes de altas frequências do erro. O raio espectral  $\rho_{loc}(M_h^{2h})$  fornece uma ideia do comportamento da convergência assintótica e  $\sigma_{loc}(M_h^{2h})$  refere-se à redução do erro em um passo de iteração medido em uma norma apropriada.

### 3.2 TERMINOLOGIA

Para formalizar os elementos da LFA, utiliza-se o caso 2D e engrossamento padrão. Tem-se  $x = (x_1, x_2)$  e uma malha de comprimento fixo

$$h = (h_1, h_2). \quad (3.3)$$

A malha fina é dada por

$$\Omega^h = \{x = jh := (j_1 h_1, j_2 h_2)\}, j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad (3.4)$$

e a malha imediatamente mais grossa é representada por

$$\Omega^{2h} = \{x = j2h := (j_1 2h_1, j_2 2h_2)\}, j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2. \quad (3.5)$$

Considerando-se o operador discreto  $L_h$  correspondente ao estêncil (ver seção 2.4)

$$L_h \hat{=} [s_\kappa]_h, \quad (\kappa = (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{Z}^2), \quad (3.6)$$

isto é,

$$L_h w_h(x) = \sum_{\kappa \in V} s_\kappa w_h(x + \kappa h), \quad (3.7)$$

em que  $\kappa$  representa os índices do estêncil, e os coeficientes constantes  $s_\kappa \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  são valores de  $L_h$  em relação às posições  $\kappa$ .

As funções de malha são, então, escritas como

$$\varphi(\theta, x) = e^{i\theta x/h} := e^{i\theta_1 x_1/h_1} e^{i\theta_2 x_2/h_2}, \quad x \in \Omega^h. \quad (3.8)$$

Assume-se que  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  é um parâmetro contínuo que caracteriza a frequência da função de malha. Tem-se que

$$\varphi(\theta, x) \equiv \varphi(\theta', x) \text{ para } x \in \Omega^h, \quad (3.9)$$

se, e somente se,

$$\theta_1 = \theta'_1 \pmod{2\pi} \text{ e } \theta_2 = \theta'_2 \pmod{2\pi}. \quad (3.10)$$

Portanto, é suficiente considerar  $\varphi(\theta, x)$  com  $\theta \in [-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi) = [-\pi, \pi)^2$  ou  $-\pi \leq \theta < \pi$ .

**Lema 3.1.** Para  $-\pi \leq \theta < \pi$ , todas as funções de malha  $\varphi(\theta, x)$  são autofunções de qualquer operador discreto que pode ser descrito por um estêncil diferencial. A relação

$$L_h \varphi(\theta, x) = \tilde{L}_h(\theta) \varphi(\theta, x) \quad (x \in \Omega^h) \quad (3.11)$$

é válida, e

$$\tilde{L}_h(\theta) = \sum_{\kappa} s_{\kappa} e^{i\theta\kappa}. \quad (3.12)$$

Denomina-se  $\tilde{L}_h(\theta)$  de autovalor.

A demonstração do Lema 3.1 pode ser encontrada em Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001).

Para a análise de suavização e de duas malhas deve-se distinguir as componentes de alta e baixa frequência de  $\Omega^h$  com respeito a  $\Omega^{2h}$ . A definição é baseada no fenômeno de que somente as frequências

$$\varphi(\theta, \cdot), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (3.13)$$

são distinguíveis em  $\Omega^{2h}$ . Para cada  $\theta' \in [-\pi/2, \pi/2]^2$ , três outras frequências  $\varphi(\theta, \cdot)$  com  $\theta \in [-\pi, \pi)^2$  coincidem em  $\Omega^{2h}$  com  $\varphi(\theta', \cdot)$  e não são distinguíveis (não são "visíveis") em  $\Omega^{2h}$ . Assim, tem-se que

$$\varphi(\theta, x) = \varphi(\theta', x) \text{ para } x \in \Omega^{2h} \text{ se, e somente se, } \theta = \theta' \pmod{\pi}. \quad (3.14)$$

De acordo com Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001) pode-se definir componentes de altas e baixas frequências para engrossamento padrão. Considera-se  $\varphi$  uma componente de baixa frequência se, e somente se  $\theta \in T^{low} := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^2$  e  $\varphi$  uma componente de alta frequência se, e somente se  $\theta \in T^{high} := [-\pi, \pi)^2 \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^2$

Essas componentes são ilustradas na Fig. 11, retirada de Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001). A região em branco representa as baixas frequências, com as componentes representadas por  $(\circ)$ , e a região hachurada representa as altas frequências, com as componentes representadas por  $(\bullet)$ .

### 3.3 ANÁLISE DE SUAUIZAÇÃO

Usa-se a equação diferencial discretizada

$$L_h u_h = f_h, \quad (3.15)$$

e assume-se que o método de relaxação pode ser escrito localmente como

$$L_h^+ \bar{w}_h + L_h^- w_h = f_h, \quad (3.16)$$

sendo,  $w_h$  a aproximação de  $u_h$  na iteração anterior e  $\bar{w}_h$  a aproximação da iteração atual (TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001; WIENANDS; JOPPICH, 2005). Assim, a relaxação pode ser caracterizada pela separação

$$L_h = L_h^+ + L_h^-. \quad (3.17)$$



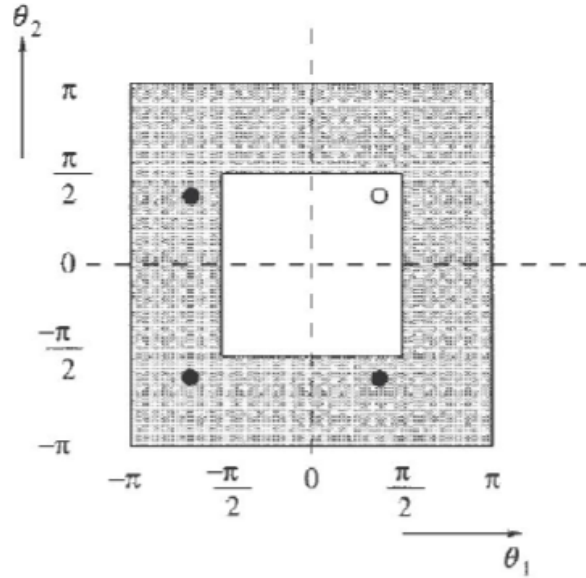


FIGURA 11 – Regiões de componentes de altas e baixas frequências (TROTTEMBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001)

Subtraindo a Eq. (3.16) da Eq. (3.15), obtém-se

$$\bar{v}_h = S_h v_h, \quad (3.18)$$

sendo os erros  $\bar{v}_h = u_h - \bar{w}_h$  e  $v_h = u_h - w_h$ , em que  $S_h$  é o operador de suavização resultante.

Aplicando  $L_h^-$  e  $L_h^+$  nas autofunções  $\varphi(\theta, x)$ , tem-se que

$$\begin{aligned} L_h^- e^{i\theta x/h} &= \tilde{L}_h^-(\theta) e^{i\theta x/h} \\ L_h^+ e^{i\theta x/h} &= \tilde{L}_h^+(\theta) e^{i\theta x/h}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

em que  $\tilde{L}_h^-$  e  $\tilde{L}_h^+$  representam os autovalores dos operadores  $L_h^-$  e  $L_h^+$ , respectivamente.

**Lema 3.2.** *Com as hipóteses das Eqs. (3.16) e (3.17), todas as funções  $\varphi(\theta, \cdot)$  com  $\tilde{L}_h^+ \neq 0$  são autofunções de  $S_h$ :*

$$S_h \varphi(\theta, x) = \tilde{S}_h(\theta) \varphi(\theta, x) \quad (-\pi \leq \theta < \pi), \quad (3.20)$$

com fator de amplificação

$$\tilde{S}_h(\theta) := -\frac{\tilde{L}_h^-(\theta)}{\tilde{L}_h^+(\theta)}. \quad (3.21)$$

A demonstração do Lema 3.2 pode ser encontrada em Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001).

Desta forma, o fator de suavização é definido por

$$\mu_{loc} = \mu_{loc}(S_h) := \sup\{|\tilde{S}_h(\theta)| : \theta \in T^{high}\}. \quad (3.22)$$

### 3.4 ANÁLISE DE DUAS MALHAS

Agora será aplicado o operador de duas malhas

$$M_h^{2h} = S_h^{\nu_1} K_h^{2h} S_h^{\nu_2}, \quad (3.23)$$

onde,  $S_h$  é o operador de suavização,  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são o número de pré e pós suavizações, respectivamente, e  $K_h^{2h} = I_h - I_{2h}^h (L_{2h})^{-1} I_h^{2h} L_h$  é o operador de correção na malha grossa,  $I_h$  é o estêncil do operador identidade.

Para calcular o fator de convergência deve-se analisar como os operadores  $L_h$ ,  $I_h^{2h}$ ,  $L_{2h}$ ,  $I_{2h}^h$  e  $S_h$  agem nos componentes de Fourier  $\varphi(\theta, \cdot)$ . Utiliza-se o fato de que os quádruplos de  $\varphi(\theta, \cdot)$  coincidem em  $\Omega^{2h}$  (TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001). Para algumas baixas frequências  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in T^{low} = [\pi/2, \pi/2)^2$ , consideram-se as frequências

$$\begin{aligned} \theta^{(0,0)} &:= (\theta_1, \theta_2), & \theta^{(1,1)} &:= (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2), \\ \theta^{(1,0)} &:= (\bar{\theta}_1, \theta_2), & \theta^{(0,1)} &:= (\theta_1, \bar{\theta}_2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

em que

$$\bar{\theta}_i := \begin{cases} \theta_i + \pi & \text{se } \theta_i < 0 \\ \theta_i - \pi & \text{se } \theta_i \geq 0 \end{cases}. \quad (3.25)$$

**Lema 3.3. :**

1. Para qualquer baixa frequência  $\theta^{(0,0)} \in T^{low}$  tem-se:

$$\varphi(\theta^{(0,0)}, x) \equiv \varphi(\theta^{(1,1)}, x) \equiv \varphi(\theta^{(1,0)}, x) \equiv \varphi(\theta^{(0,1)}, x), \quad x \in \Omega^{2h}. \quad (3.26)$$

2. Cada um dos componentes de Fourier  $\varphi(\theta^\alpha, \cdot) = \varphi_h(\theta^\alpha, \cdot)$ , com  $\alpha \in \{(0,0), (1,1), (1,0), (0,1)\}$ , coincide em  $\Omega^{2h}$  com  $\varphi_{2h}(2\theta^{(0,0)}, \cdot)$ :

$$\varphi_h(\theta^\alpha, x) \equiv \varphi_{2h}(2\theta^{(0,0)}, x). \quad (3.27)$$

A demonstração do Lema 3.3 pode ser encontrada em Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001).

Todas  $\varphi(\theta, \cdot)$  são autofunções de  $L_h$  e  $S_h$ .

**Definição 3.1.** O conjunto de funções de malhas de  $\Omega^{2h}$  obtido através de funções de malha em  $\Omega^h$  é chamado de harmônico. O espaço gerado (*span*) por esse harmônico quadrimensional é segundo Steinbruch e Winterle (1997),

$$E_h^\theta := \text{span}[\varphi(\theta^\alpha, \cdot) : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \{(0,0), (1,1), (0,1), (1,0)\}]. \quad (3.28)$$

Observa-se que o espaço  $E_h^\theta$  é invariante sob o operador de duas malhas  $M_h^{2h}$ .

Considerando arbitrariamente  $\Psi \in E_h^\theta$ , escreve-se

$$\Psi = A^{(0,0)}\varphi(\theta^{(0,0)}, \cdot) + A^{(1,1)}\varphi(\theta^{(1,1)}, \cdot) + A^{(1,0)}\varphi(\theta^{(1,0)}, \cdot) + A^{(0,1)}\varphi(\theta^{(0,1)}, \cdot), \quad (3.29)$$

com coeficientes  $A^\alpha$  unicamente definidos.

Para o Teorema 3.1, assume-se que  $L_h, I_h^{2h}, L_{2h}$  e  $I_{2h}^h$  são representados por estêncis em  $\Omega^h$  e  $\Omega^{2h}$  e que existe  $(L_{2h})^{-1}$ .

**Teorema 3.1.** *O operador de correção da malha grossa  $K_h^{2h}$  é representado em  $E_h^\theta$  pela matriz de ordem  $4 \times 4$ ,*

$$\hat{K}_h^{2h}(\theta) = \hat{I}_h - \hat{I}_{2h}^h(\theta)(\hat{L}_{2h}(2\theta))^{-1}\hat{I}_{2h}^{2h}(\theta)\hat{L}_h(\theta), \quad (3.30)$$

para cada  $\theta \in T^{low}$ , sendo que,  $\hat{I}_h$  e  $L_h(\theta)$  são matrizes de ordem  $4 \times 4$ ,  $\hat{I}_{2h}^{2h}(\theta)$  é uma matriz de ordem  $1 \times 4$ ,  $\hat{L}_{2h}(2\theta)$  é uma matriz de ordem  $1 \times 1$  e  $\hat{I}_{2h}^h(\theta)$  é uma matriz de ordem  $4 \times 1$ .

A demonstração do Teorema 3.1 pode ser encontrada em Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001) e Wienands e Joppich (2005).

Caso se aplique  $K_h^{2h}$  em qualquer  $\Psi \in E_h^\theta$ , os coeficientes correspondentes  $A^\alpha$ , dados na Eq. (3.29), são transformados em:

$$\begin{bmatrix} A^{(0,0)} \\ A^{(1,1)} \\ A^{(1,0)} \\ A^{(0,1)} \end{bmatrix} \Leftarrow \hat{K}_h^{2h}(\theta) \begin{bmatrix} A^{(0,0)} \\ A^{(1,1)} \\ A^{(1,0)} \\ A^{(0,1)} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

**Teorema 3.2.** *Se  $S_h : E_h^\theta \rightarrow E_h^\theta \ \forall \theta \in T^{low}$ , então pode-se obter uma representação para  $M_h^{2h}$  no espaço  $E_h^\theta$  por uma matriz de ordem  $4 \times 4$  da forma  $\hat{M}_h^{2h}(\theta)$  dada por*

$$\hat{M}_h^{2h}(\theta) = \hat{S}_h(\theta)^{\nu_2} \hat{K}_h^{2h}(\theta) \hat{S}_h(\theta)^{\nu_1}, \quad (3.32)$$

em que  $\hat{S}_h$  representa a matriz do estêncil do suavizador  $S_h$  e  $\hat{K}_h^{2h}(\theta)$  dado pela Eq. (3.30).

A demonstração do Teorema 3.2 pode ser encontrada em Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001) e Wienands e Joppich (2005).

Assim,  $M_h^{2h}\Psi$  pode ser escrita como:

$$M_h^{2h}\Psi = B^{(0,0)}\varphi(\theta(0,0), \cdot) + B^{(1,1)}\varphi(\theta(1,1), \cdot) + B^{(1,0)}\varphi(\theta(1,0), \cdot) + B^{(0,1)}\varphi(\theta(0,1), \cdot), \quad (3.33)$$

em que

$$\begin{bmatrix} B^{(0,0)} \\ B^{(1,1)} \\ B^{(1,0)} \\ B^{(0,1)} \end{bmatrix} = \hat{M}_h^{2h}(\theta) \begin{bmatrix} B^{(0,0)} \\ B^{(1,1)} \\ B^{(1,0)} \\ B^{(0,1)} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Para garantir a existência de  $M_h^{2h}$ , deve-se excluir todos os parâmetros  $\theta$  cujos autovalores  $\tilde{L}_h(\theta) = \tilde{L}_{2h}(\theta) = 0$ , ou seja, exclui-se o conjunto

$$\Lambda = \left\{ \theta \in T^{low} : \tilde{L}_h(\theta) = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{L}_{2h}(\theta) = 0 \right\}. \quad (3.35)$$

Com base no Teorema 3.2 serão desenvolvidos os componentes da matriz  $\hat{M}_h^{2h}$ .

1. **Operadores**  $L_h, I_h$  -  $\tilde{L}_h$  é representado pela matriz identidade de ordem  $4 \times 4$  em  $E_h^\theta$ . Pelo Lema 3.1 tem-se que

$$\begin{bmatrix} A^{(0,0)} \\ A^{(1,1)} \\ A^{(1,0)} \\ A^{(0,1)} \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{L}_h(\theta^{(0,0)}) & & & \\ & \tilde{L}_h(\theta^{(1,1)}) & & \\ & & \tilde{L}_h(\theta^{(1,0)}) & \\ & & & \tilde{L}_h(\theta^{(0,1)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(0,0)} \\ A^{(1,1)} \\ A^{(1,0)} \\ A^{(0,1)} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

A matriz de ordem  $4 \times 4$  é o operador  $\hat{L}_h(\theta)$ .

2. **Operador de Restrição**  $I_h^{2h}$  - Agora para os coeficientes  $A^\alpha$  obtém-se a transformação:

$$A_{2h} \Leftarrow \hat{I}_h^{2h}(\theta) \begin{bmatrix} A^{(0,0)} \\ A^{(1,1)} \\ A^{(1,0)} \\ A^{(0,1)} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

em que  $A_{2h}$  é coeficiente resultante dos componentes de Fourier  $\varphi(2\theta(0,0), \cdot)$  e  $\hat{I}_h^{2h}(\theta)$  é a matriz de ordem  $1 \times 4$

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_h^{2h}\theta^{(0,0)} \\ \tilde{I}_h^{2h}\theta^{(1,1)} \\ \tilde{I}_h^{2h}\theta^{(1,0)} \\ \tilde{I}_h^{2h}\theta^{(0,1)} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

**Exemplo 3.1** (Injeção e FW). Para injeção tem-se

$$\tilde{I}_h^{2h}(\theta)^\alpha = 1, \quad (3.39)$$

e para FW

$$\tilde{I}_h^{2h}(\theta)^\alpha = \frac{1}{4}(1 + \cos \bar{\theta}_1)(1 + \cos \bar{\theta}_2), \quad (3.40)$$

a partir de (3.25) e (3.37).

3. **Solução na malha  $\Omega^{2h}$**  - Para  $\theta = \theta(0, 0)$  e  $\theta \in T^{low}$ , tem-se que:

$$\tilde{L}_{2h}(2\theta) = \sum_{\kappa \in V} s_{\kappa, 2h} e^{i2\theta\kappa}. \quad (3.41)$$

4. **Operador de Interpolação  $I_{2h}^h$**  - Para  $I_{2h}^h$  aplicado a  $\varphi_{2h}(2\theta^{(0,0)}, \cdot)$ , o operador de interpolação é dado por

$$\begin{bmatrix} A^{(0,0)} \\ A^{(1,1)} \\ A^{(1,0)} \\ A^{(0,1)} \end{bmatrix} \Leftarrow \hat{I}_{2h}^h(\theta^{(0,0)}) A_{2h}, \quad (3.42)$$

em que

$$\hat{I}_{2h}^h(\theta^{(0,0)}) = \begin{bmatrix} \tilde{I}_h^{2h}\theta^{(0,0)} \\ \tilde{I}_h^{2h}\theta^{(1,1)} \\ \tilde{I}_h^{2h}\theta^{(1,0)} \\ \tilde{I}_h^{2h}\theta^{(0,1)} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

**Exemplo 3.2.** Para o operador de prolongação por interpolação bilinear obtém-se

$$\tilde{I}_{2h}^h(\theta^\alpha) = \frac{1}{4}(1 + \cos \bar{\theta}_1)(1 + \cos \bar{\theta}_2). \quad (3.44)$$

5. **Operador de Suavização** - Todos os componente de Fourier são autofunções de  $S_h$ , sendo que  $S_h$  pode ser representada pela matriz diagonal de ordem  $4 \times 4$

$$\begin{bmatrix} A^{(0,0)} \\ A^{(1,1)} \\ A^{(1,0)} \\ A^{(0,1)} \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{S}_h(\theta^{(0,0)}) & & & \\ & \tilde{S}_h(\theta^{(1,1)}) & & \\ & & \tilde{S}_h(\theta^{(1,0)}) & \\ & & & \tilde{S}_h(\theta^{(0,1)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(0,0)} \\ A^{(1,1)} \\ A^{(1,0)} \\ A^{(0,1)} \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

para cada  $\theta \in T^{low}$ .

**Definição 3.2.** Com base na representação de  $M_h^{2h}$  pela matriz  $4 \times 4$   $\hat{M}_h^{2h}(\theta)$ , pode-se calcular o fator de convergência assintótica

$$\rho_{loc}(M_h^{2h}) = \sup \left\{ \rho_{loc}(\hat{M}_h^{2h}(\theta)) : \theta \in T^{low}, \theta \notin \Lambda \right\}. \quad (3.46)$$

O fator de convergência é o raio espectral de  $\hat{M}_h^{2h}$ , denotado também por  $\rho_{loc}(M_h^{2h}) = \rho_{2g}$ .

O Algoritmo 2, descrito em Franco (2017), apresenta o procedimento adotado para encontrar o fator de convergência de um operador de duas malhas de um método

*multigrid* com esquema CS e engrossamento padrão.

---

**Algoritmo 2:** LFA para o fator de convergência em duas malhas

---

**Entrada:**  $h, \nu_1, \nu_2$ .

Escolher o suavizador, os operadores de restrição e prolongação.

**para** Cada um dos modos suaves, exceto  $(0, 0)$  **faça**

Calcular  $\theta^\alpha$  usando a Eq. (3.24).

Criar a matriz diagonal de ordem  $4 \times 4$ ,  $\hat{L}_h$  com os autovalores de  $L_h$ .

Calcular a matriz de ordem  $1 \times 4$ ,  $\hat{I}_h^{2h}$  do operador de restrição  $I_h^{2h}$ .

Calcular a matriz de ordem  $1 \times 1$ ,  $\hat{L}_{2h}$  na malha  $\Omega^{2h}$ .

Calcular a matriz de ordem  $4 \times 1$ ,  $\hat{I}_{2h}^h$  do operador de prolongação  $I_{2h}^h$ .

Calcular a matriz  $\hat{K}_h^{2h}(\theta) = \hat{I}_h - \hat{I}_{2h}^h(\theta)[\hat{L}_{2h}(2\theta)]^{-1}\hat{I}_h^{2h}(\theta)\hat{L}_h(\theta)$ .

Calcular a matriz diagonal de ordem  $4 \times 4$ ,  $\hat{S}_h$  com os autovalores de  $S_h$ .

Calcular os autovalores da matriz  $\hat{M}_h^{2h}$  e escolha seu valor máximo em módulo.

Guardar o autovalor máximo em cada modo de Fourier suave.

**fim**

Escolher o máximo dos autovalores,  $\rho$  (este representa o pior fator de convergência).

---

### 3.5 ANÁLISE DE FOURIER LOCAL PARA OS SUAVIZADORES

Para que a definição do fator de suavização seja generalizada para todos os suavizadores que tenham a propriedade da invariância, tem-se que

$$S_h : E_h^\theta \rightarrow E_h^\theta \quad \forall \theta \in T^{low}. \quad (3.47)$$

Se um suavizador possui a propriedade da invariância (3.47), as altas e baixas frequências podem ser misturadas por  $S_h$ . Assim, para que seja possível medir as propriedades de suavização de  $S_h$ , assume-se um operador de malha grossa “ideal”  $Q_h^{2h}$  (ao invés do operador de malha grossa real  $K_h^{2h}$ ), que aniquila os componentes de erro de baixa frequência e deixa inalterados os componentes de alta frequência. Mais precisamente,  $Q_h^{2h}$  é um operador de projeção, definido em  $E_h^\theta$  por

$$Q_h^{2h}\varphi(\theta, \cdot) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \theta = \theta^{(0,0)} \in T^{low} \\ \varphi(\theta, \cdot) & , \text{ se } \theta \in \{\theta^{(1,0)}, \theta^{(0,1)}, \theta^{(1,1)}\} \end{cases} \quad (3.48)$$

Como consequência, a matriz  $\hat{K}_h^{2h}(\theta)$  dada pela Eq. (3.30) é substituída pela

matriz de ordem  $4 \times 4$  de projeção

$$\hat{Q}_h^{2h}(\theta) = \hat{Q}_h^{2h} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ para } \theta \in T^{low}, \quad (3.49)$$

para a análise de suavização. Portanto, substitui-se

$$M_h^{2h} = S_h^{\nu_2} K_h^{2h} S_h^{\nu_1}, \quad (3.50)$$

por  $S_h^{\nu_2} Q_h^{2h} S_h^{\nu_1}$  e  $\rho_{loc}(M_h^{2h})$  é dado por

$$\rho_{loc}(S_h^{\nu_2} Q_h^{2h} S_h^{\nu_1}) := \sup \{ \rho(\hat{S}_h(\theta)^{\nu_2} \hat{Q}_h^{2h} \hat{S}_h(\theta)^{\nu_1}) : \theta \in T^{low} \}. \quad (3.51)$$

O valor de  $\rho_{loc}(S_h^{\nu_2} Q_h^{2h} S_h^{\nu_1})$  é uma boa medida para o efeito de suavização total resultante de  $\nu = \nu_1 + \nu_2$  vezes suavizadas. Logo,

$$\rho(\hat{S}_h(\theta)^{\nu_2} \hat{Q}_h^{2h} \hat{S}_h(\theta)^{\nu_1}) = \rho(\hat{Q}_h^{2h} \hat{S}_h(\theta)^\nu).$$

**Definição 3.3.** Assumindo que  $S_h$  possui a propriedade da invariância (3.47), define-se o fator de suavização  $\mu_{loc}(S_h, \nu)$  de  $S_h$  por

$$\mu_{loc}(S_h, \nu) := \sup \left\{ \sqrt[\nu]{\rho(\hat{Q}_h^{2h} \hat{S}_h(\theta)^\nu)}, \theta \in T^{low} \right\}. \quad (3.52)$$

Com o intuito de generalizar as hipóteses da análise para suavizadores do tipo *red-black* ou que seguem um "padrão" para atualizar as incógnitas, como os suavizadores linha e zebra. Por isso, chama-se de  $S_h^{Partial}$  o operador dado por:

$$S_h^{Partial} v_h(x) = \begin{cases} -(L_h^+)^{-1} L_h^- v_h(x) & , \text{ para } x \in \tilde{\Omega}_h \\ v_h(x) & , \text{ para } x \in \Omega_h \setminus \tilde{\Omega}_h \end{cases}, \quad (3.53)$$

sendo que  $(L_h^+)^{-1}$  existe e  $\tilde{\Omega}_h$  é um subconjunto de  $\Omega_h$ . Somente os pontos de  $\tilde{\Omega}_h$  são atualizados no passo de suavização dado pelo esquema (3.53), os pontos restantes são atualizados em outro processo parcial de suavização.

Por exemplo, no caso do suavizador GS-RB,  $S_h^{RED}$  e  $S_h^{BLACK}$  possuem a forma da Eq. (3.53), com  $\tilde{\Omega}_h$  começando a leitura pelos pontos *red* e posteriormente pelos pontos *black*. Logo, o operador de suavização para GS-RB é o produto

$$S_h^{RB} = S_h^{BLACK} S_h^{RED}. \quad (3.54)$$

O operador de suavização representado na Eq. (3.45) pode ser reescrito com a Eq. (3.25) da seguinte maneira:

$$S_h = \begin{bmatrix} \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

em que, para o suavizador GS-LEX,  $\tilde{S}(x, y) = (\varepsilon e^{ix} + e^{iy})/(-2 - 2\varepsilon + \varepsilon e^{-ix} + e^{-iy})$  (TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001).

Para o GS-RB, dado pela Eq. (3.54) e pela Eq. (3.55), tem-se que:

$$S_h^{RED} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) + 1 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) - 1 & 0 & 0 \\ \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) - 1 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \theta_2) + 1 & \tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) - 1 \\ 0 & 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \theta_2) + 1 & \tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) + 1 \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

$$S_h^{BLACK} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) + 1 & -\tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 & 0 \\ -\tilde{S}(\theta_1, \theta_2) + 1 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \theta_2) + 1 & -\tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) + 1 \\ 0 & 0 & -\tilde{S}(\bar{\theta}_1, \theta_2) + 1 & \tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) + 1 \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

com  $\tilde{S}(x, y) = (1 - \omega(1 + \varepsilon - \varepsilon \cos x - \cos y))/4$  e  $\omega = 1$ .

Para GS-linha o operador é dado pela Eq.(3.55), com  $\tilde{S}(x, y) = (e^{iy})/(-2 - 2\varepsilon + \varepsilon e^{-ix} + e^{-iy} + \varepsilon e^{ix})$  para a direção  $x$  e  $\tilde{S}(x, y) = (e^{ix})/(-2 - 2\varepsilon + \varepsilon e^{-ix} + e^{-iy} + \varepsilon e^{iy})$  para a direção  $y$  (WIENANDS; JOPICH, 2005).

Para o suavizador zebra-GS, o operador de suavização é análogo ao produto do GS-RB, dado pela Eq. (3.54). Para o suavizador  $x$ -zebra-GS, tem-se que:

$$S_h^{RED} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) + 1 & 0 & 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) - 1 \\ 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 & \tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) - 1 & 0 \\ 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) - 1 & \tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 \\ \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) - 1 & 0 & 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

$$S_h^{BLACK} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) + 1 & 0 & 0 & -\tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 \\ 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 & -\tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 \\ 0 & -\tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 & \tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 \\ -\tilde{S}(\theta_1, \theta_2) + 1 & 0 & 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

em que  $\tilde{S}(x, y) = \cos y/(1 + \varepsilon - \varepsilon \cos x)$  (WIENANDS; JOPICH, 2005). Para  $y$ -zebra-GS, tem-se que:

$$S_h^{RED} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) + 1 & 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) - 1 & 0 \\ 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 & \tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) - 1 \\ \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) - 1 & 0 & \tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 \\ 0 & \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) - 1 & 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$



$$S_h^{BLACK} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) + 1 & 0 & -\tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 \\ 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 & -\tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) + 1 \\ -\tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 & \tilde{S}(\theta_1, \bar{\theta}_2) + 1 & 0 \\ 0 & -\tilde{S}(\theta_1, \theta_2) + 1 & 0 & \tilde{S}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) + 1 \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

em que  $\tilde{S}(x, y) = \varepsilon \cos x / (1 + \varepsilon - \cos y)$  (WIENANDS; JOPPICH, 2005).

## 4 MODELOS MATEMÁTICO E NUMÉRICO

Neste capítulo são apresentados o modelo matemático, o domínio de cálculo, as condições de contorno, a solução analítica e o modelo numérico, que abrange os métodos, esquemas e procedimentos adotados no desenvolvimento do presente estudo computacional. São apresentados também detalhes sobre a discretização, o tipo de malha, as aproximações numéricas, o critério de convergência e os suavizadores empregados.

### 4.1 MODELO MATEMÁTICO

Considera-se o problema linear anisotrópico de difusão de calor em regime permanente no domínio bidimensional  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , ilustrado na Fig. 12, modelado por

$$-T_{xx} - \varepsilon T_{yy} = S, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (4.1)$$

em que,  $T$  é a variável dependente que representa a temperatura,  $S$  é o termo fonte e  $\varepsilon > 0$ .

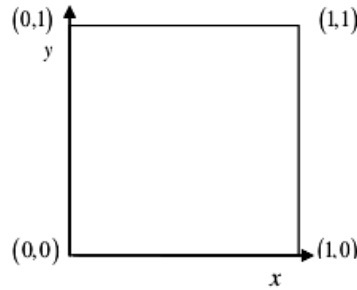


FIGURA 12 – Domínio bidimensional contínuo.

As condições de contorno adotadas são do tipo Dirichlet, dadas por

$$T(0, y) = T(x, 0) = T(x, 1) = T(1, y) = 0. \quad (4.2)$$

O termo fonte  $S$  e a solução analítica  $T$  considerados, são apresentados na Fig. 13 e dados por:

$$S = 2[(1 - 6x^2)y^2(1 - y^2) + \varepsilon(1 - 6y^2)x^2(1 - x^2)]; \quad (4.3)$$

$$T(x, y) = (x^2 - x^4)(y^4 - y^2). \quad (4.4)$$

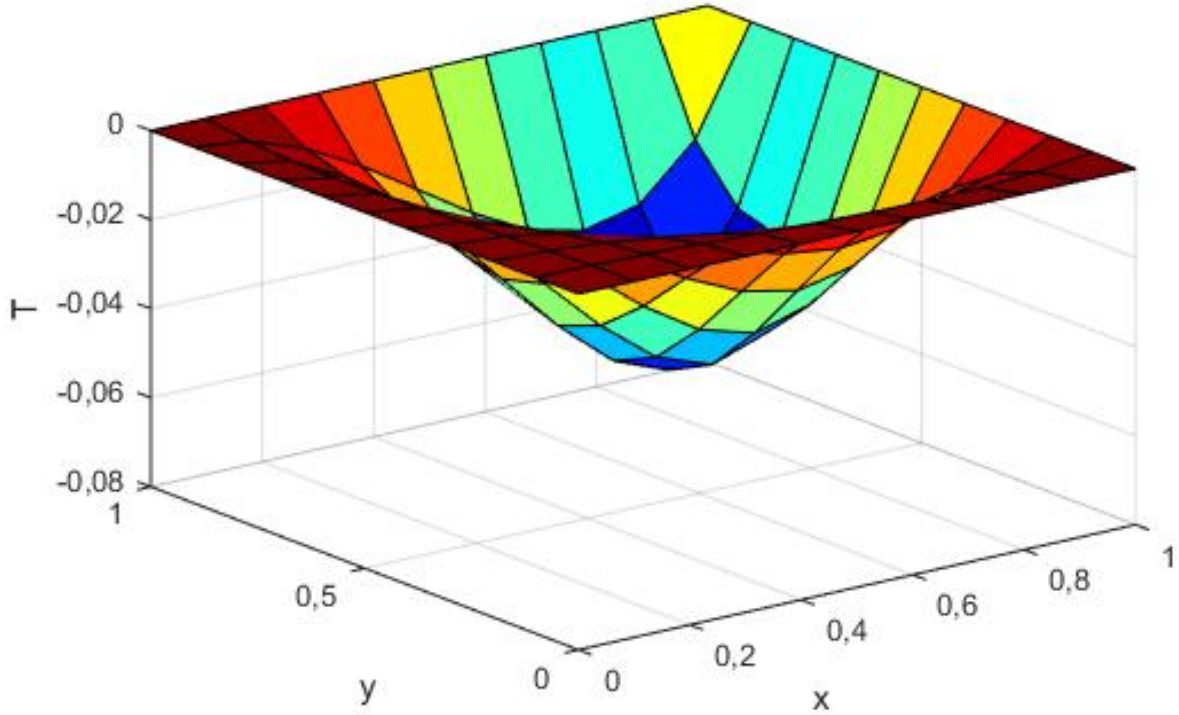


FIGURA 13 – Gráfico da solução analítica da Eq. (4.4).

## 4.2 MODELO NUMÉRICO

Emprega-se o MDF para obter as equações algébricas. A discretização é realizada sobre malhas quadrangulares e uniformes por direção, onde o número de nós  $N$  é dado por  $N = N_x \cdot N_y$ , sendo  $N_x$  e  $N_y$  o número de nós nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Os termos difusivos são aproximados pelo esquema CDS de segunda ordem. A discretização da Eq.(4.1) resulta em:

$$-\left(\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h_x^2}\right) - \varepsilon \left(\frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{h_y^2}\right) = S_{i,j}. \quad (4.5)$$

Para cada nó interno tem-se a equação algébrica

$$a_P T_P + a_W T_W + a_N T_N + a_E T_E + a_S T_S = b_p, \quad (4.6)$$

com

$$a_P = \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2\varepsilon}{h_y^2}\right), a_W = a_E = -\frac{1}{h_x^2}, a_N = a_S = -\frac{\varepsilon}{h_y^2}, b_P = S_P. \quad (4.7)$$

Neste trabalho, adotou-se  $N_x = N_y$  e conseqüentemente,  $h_x = h_y$ . Portanto, este problema tem o mesmo estêncil dado na Eq. (2.46).

Para os contornos, tem-se  $a_P = 1, a_W = a_S = a_N = a_E = 0$ .

O sistema de equações lineares dado pela Eq. (4.6), obtido da discretização da Eq. (4.1) mediante o MDF, foi resolvido por métodos iterativos ponto-a-ponto (GS-LEX e

GS-RB) e por bloco ( $x$ -linha-GS,  $y$ -linha-GS,  $x$ -zebra-GS e  $y$ -zebra-GS), como descritos na Seção 2.2.1. Em todos os casos foi adotada uma estimativa inicial nula.

## 5 VERIFICAÇÃO DO CÓDIGO

Neste capítulo são apresentados os resultados dos testes de verificação dos códigos computacionais desenvolvidos. Estes testes foram realizados mediante a análise do comportamento do erro de discretização de algumas variáveis de interesse. Foram considerados o comportamento do erro, mediante o refino da malha computacional, bem como o monitoramento de suas ordens efetiva e aparente.

### 5.1 VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO

A validação e a verificação são processos que apresentam o nível de confiabilidade das soluções numéricas.

A validação proporciona o grau de fidelidade com que um modelo representa um fenômeno físico específico.

A verificação se divide em: verificação do código e da solução. A verificação do código deve confirmar que não existem erros ou inconsistências no algoritmo implementado. A verificação da solução se refere ao processo de quantificação dos erros consequentes da simulação numérica (ARAKI, 2007).

A convergência de um método depende da sua consistência e estabilidade. O método é dito consistente quando o erro de truncamento tende a zero com o refino da malha. Já a estabilidade do método é obtida quando o erro numérico tende a zero quando o número de iterações tende ao infinito. Segundo Maliska (2004), a solução numérica converge se é estável e se aproxima da solução das equações diferenciais à medida que a malha é refinada.

Neste trabalho, será tratada apenas a verificação, tanto do código como da solução, dado que a validação diz respeito ao erro na modelagem, e que aqui não será considerado.

### 5.2 ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

Para a verificação do código computacional foi calculado o erro numérico  $E$ , definido por (FERZIGER; PERIC, 2002) como

$$E(\phi) = \Phi - \phi, \quad (5.1)$$

em que  $\Phi$  é a solução analítica de uma variável de interesse e  $\phi$  é a solução numérica.

No caso em que os erros de programação, arredondamento e de iteração são controlados e praticamente desprezíveis, o erro que permanece é o erro de truncamento.

Portanto, o erro numérico é chamado de erro de discretização  $E_h$  (FERZIGER; PERIC, 2002), representado como

$$E_h(\phi) = b_1 h^{p_L} + b_2 h^{p_2} + b_3 h^{p_3} + \dots, \quad (5.2)$$

em que  $b_i$  são os coeficientes independentes do espaçamento da malha ( $h$ ) e  $p_v$  ( $p_L, p_2, p_3, \dots$ ) são as ordens verdadeiras do erro. As ordens verdadeiras são representadas pelo expoente de  $h$  dos termos não nulos. O menor expoente de  $h$  é chamado de ordem assintótica,  $p_L$ , em que  $p_L \geq 1$ .

Uma das análises na verificação da consistência da solução consiste na observação do comportamento do erro de discretização com o refino da malha. Neste caso, espera-se que o erro de discretização diminua quando o espaçamento da malha  $h \rightarrow 0$ , isto é, o erro de discretização deve diminuir com o aumento dos pontos da malha.

Para o cálculo do erro numérico utilizou-se a norma  $l_\infty$ , uma malha com  $N = 513 \times 513$ , considerando algumas anisotropias e todos os suavizadores estudados. As simulações foram executadas até que o erro de iteração, baseado no resíduo, atingisse o nível do erro de máquina (erro de arredondamento), evidenciando assim, o erro de discretização (FERZIGER; PERIC, 2002). Na Tabela 1 são apresentados os resultados encontrados com essas simulações utilizando precisão dupla. Percebe-se que, indiferente do método utilizado, a norma infinito do erro numérico tem valor aproximado para cada coeficiente de anisotropia.

$\varepsilon$	$\ E\ _\infty$					
	GS-LEX	GS-RB	x-line-GS	y-line-GS	x-zebra-GS	y-zebra-GS
$10^0$	$1,9207 \times 10^{-7}$	$1,9207 \times 10^{-7}$	$1,9207 \times 10^{-7}$	$1,9207 \times 10^{-7}$	$1,9207 \times 10^{-7}$	$1,9207 \times 10^{-7}$
$10^{-3}$	$2,3817 \times 10^{-7}$	$2,3817 \times 10^{-7}$	$2,3817 \times 10^{-7}$	$2,3817 \times 10^{-7}$	$2,3817 \times 10^{-7}$	$2,3817 \times 10^{-7}$
$10^3$	$2,3817 \times 10^{-7}$	$2,3817 \times 10^{-7}$	$2,3817 \times 10^{-7}$	$2,3817 \times 10^{-7}$	$2,3817 \times 10^{-7}$	$2,3817 \times 10^{-7}$

TABELA 1 – Norma infinito do erro numérico com os diversos suavizadores para os coeficientes de anisotropia  $\varepsilon = 1, \varepsilon = 10^{-3}$  e  $\varepsilon = 10^3$ , em uma malha  $N = 513 \times 513$ .

A Fig. 14 apresenta o erro numérico *versus*  $N$  ( $5 \times 5$  a  $2049 \times 2049$ ) relativo a todos os suavizadores estudados, fixando um fator de anisotropia ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ) e com critério de parada  $tol = 10^{-9}$ , uma tolerância representativa para o tipo de variável e verificação que se deseja nesta análise. Nota-se que, independente do suavizador utilizado, os erros foram praticamente os mesmos e diminuem com o refino da malha (de acordo com o esperado). A Fig. 15 apresenta o erro numérico em relação aos coeficientes de anisotropia estudado com  $N = 5 \times 5$  a  $N = 2049 \times 2049$ , fixando um suavizador (x-zebra-GS) e com critério de parada  $tol = 10^{-9}$ . Nota-se que, independente do coeficiente de anisotropia utilizado, os erros também praticamente coincidiram e diminuiriam com o refino da malha.

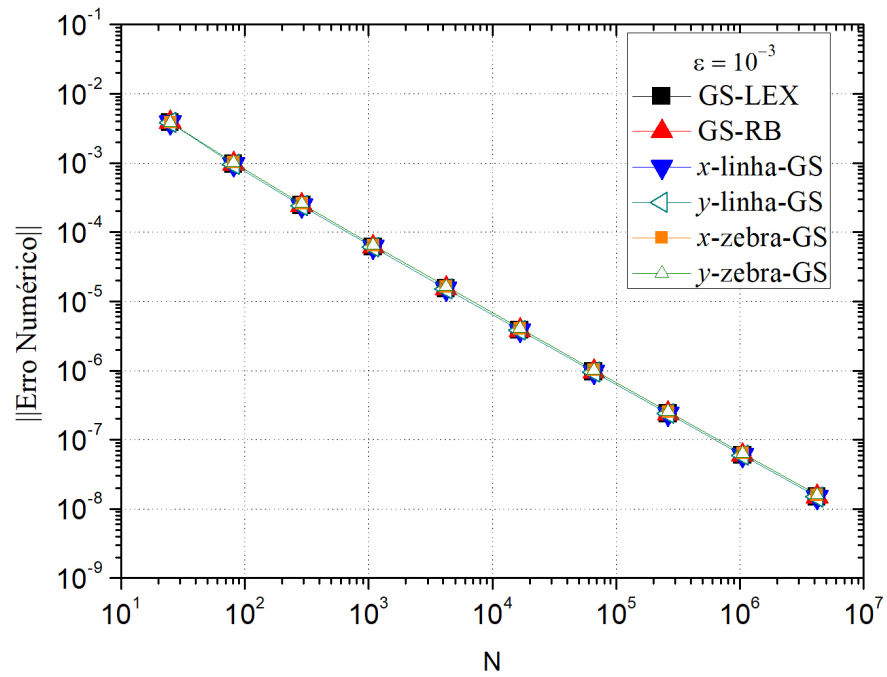


FIGURA 14 – Erro numérico do *multigrid* e para os diversos suavizadores com coeficiente de anisotropia  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

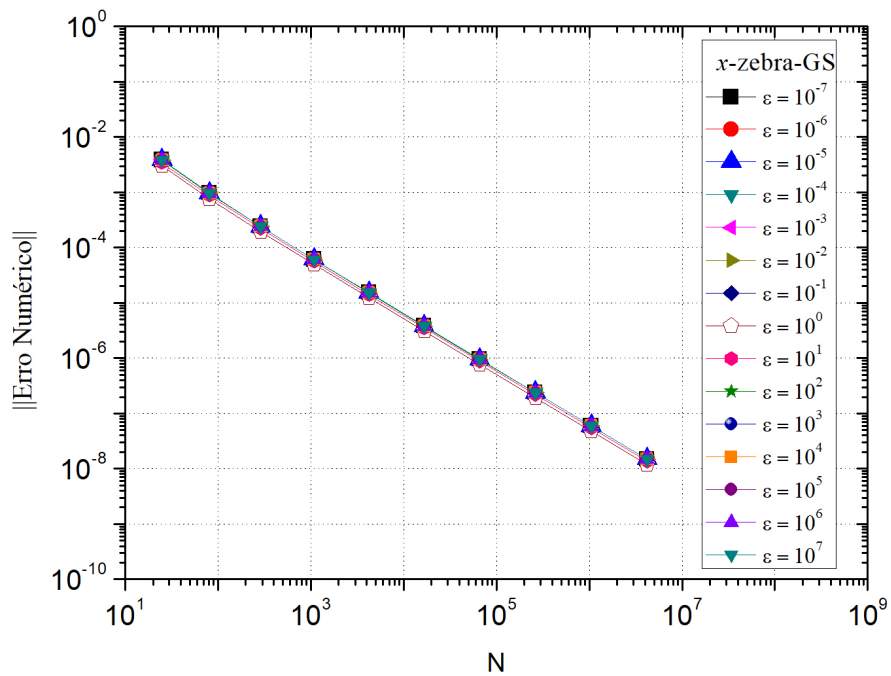


FIGURA 15 – Erro numérico do *multigrid* para o suavizador  $x$ -zebra-GS com os diversos coeficiente de anisotropia.

### 5.3 ORDEM APARENTE E EFETIVA

Para a maioria dos problemas de interesse, cuja solução analítica não é conhecida, o erro numérico não pode ser obtido. Neste caso, a solução pode ser verificada mediante estimador de erro, baseado em sua ordem aparente. No caso em que a solução analítica é conhecida, pode-se calcular a ordem efetiva. Estas ordens, encontradas em Marchi (2001), são dadas, respectivamente, por

$$p_U = \frac{\log(\frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2})}{\log(q)} \quad e \quad p_E = \frac{\log(\frac{\Phi - \phi_2}{\Phi - \phi_1})}{\log(q)}, \quad (5.3)$$

em que  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  representam três soluções em três malhas distintas com elementos de tamanho  $h_1, h_2$  e  $h_3$ , malhas fina, grossa e super grossa, respectivamente,  $\Phi$  é a solução analítica e  $q = h_2/h_1 = h_3/h_2$  é a razão de refino.

Considerando-se a norma infinito do erro numérico como variável de interesse, busca-se verificar se as ordens efetiva ( $p_E$ ) e aparente ( $p_U$ ) do erro de discretização tendem à ordem assintótica, mediante o refino da malha. Para o problema considerado, em que foram empregadas aproximações CDS para os termos difusivos, cuja ordem assintótica é  $p_L = 2$ .

A Fig. 16 apresenta um gráfico com os resultados obtidos com o suavizador  $x$ -zebra-GS e os coeficientes de anisotropia  $\varepsilon = 1, 10^{-3}$  e  $10^3$ . Conforme pode-se observar na figura,  $p_U$  e  $p_E$  tendem ao valor da ordem assintótica,  $p_L = 2$ . Para os problemas com diferentes coeficientes de anisotropia e os demais suavizadores, os resultados obtidos apresentaram comportamento similar ao apresentado na Fig. 16.



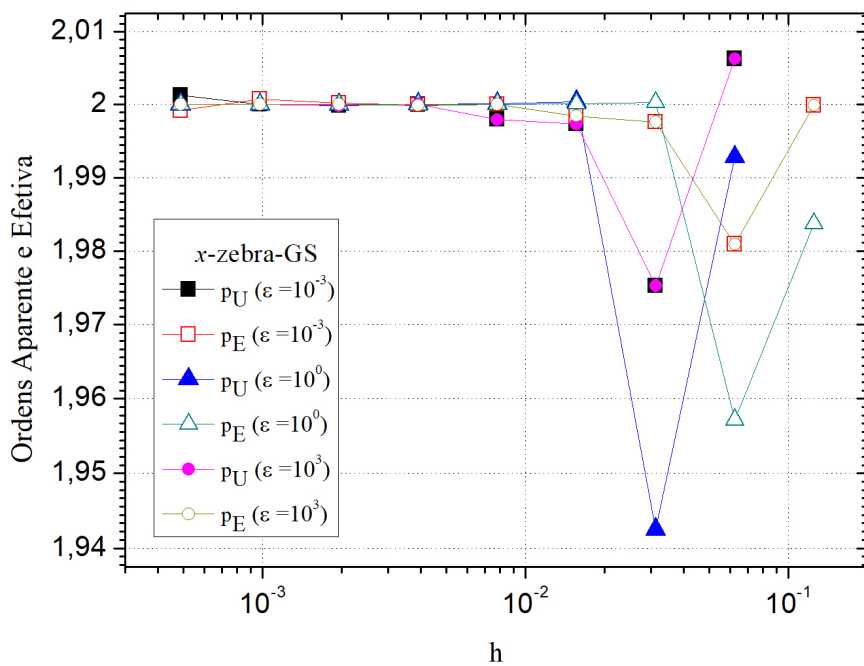


FIGURA 16 – Ordens aparente e efetiva *versus*  $h$  para a norma infinito do erro, com o suavizador  $x\text{-zebra-GS}$  e os coeficientes de anisotropia  $\epsilon = 1, 10^{-3}$  e  $10^3$ .

## 6 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos neste estudo, bem como sua análise.

### 6.1 DETALHES COMPUTACIONAIS

Para acelerar a convergência dos métodos iterativos foi empregado o *multigrid* geométrico, com estimativa inicial nula, ciclo V e número de iterações internas  $\nu_1 = \nu_2 = 1$  e  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ . Dado que o problema investigado é linear, o *multigrid* foi implementado com o esquema CS, recomendado neste caso (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000). O operador de restrição empregado foi injeção dada pela Eq. (2.28) e o operador de prolongação, interpolação bilinear dado pela Eq. (2.36).

Como critério de parada do processo iterativo foi utilizada a norma infinito do resíduo adimensionalizada pela estimativa inicial, isto é,  $\|r^n\|_\infty / \|r^0\|_\infty \leq tol$ , em que  $r^n$  é o resíduo na iteração  $n$  e  $r^0$  é o resíduo na estimativa inicial, dado pela Eq. (2.25) e  $tol = 10^{-9}$  é a tolerância adotada. Para todos os tamanhos de problema, ou seja, malha a ser resolvida, o número de níveis  $L$  empregado foi  $L_{max}$ , onde  $L_{max}$  denota o maior número possível de níveis que podem ser empregados para um determinado problema, considerando-se  $N = 3 \times 3$  pontos na malha mais grossa e razão de engrossamento  $re = 2$ . Por exemplo, se  $N = 33 \times 33$  e  $re = 2$ , tem-se o seguinte conjunto de malhas:  $33 \times 33, 17 \times 17, 9 \times 9, 5 \times 5$  e  $3 \times 3$ , ou seja,  $L_{max} = 5$ .

Os algoritmos deste trabalho relacionais às simulações, foram implementados na linguagem Fortran 2003 utilizando o aplicativo Intel 9.1 Visual Fortran. Entretanto, os algoritmos destinados à LFA foram implementados na linguagem MATLAB R2015a. Todos os algoritmos foram realizadas em uma máquina com processador Intel Core i7 2.6 GHz, 8 GB de RAM, usando aritmética de dupla precisão em sistema operacional Windows 10, de 64 bits.

O  $t_{CPU}$  foi medido a partir da função *CPUtime* do Fortran, em que o  $t_{CPU}$  é definido como o tempo necessário para gerar malhas, estabelecer estimativa inicial, calcular os coeficientes e resolver o sistema linear representado na Eq.(1.1) até atingir o critério de parada estabelecido (OLIVEIRA, 2010).

### 6.2 FATOR DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA

Segundo Wienands e Joppich (2005) quando se tem problemas anisotrópicos a convergência de métodos comuns, como os suavizadores ponto-a-ponto, piora. Assim,

uma possível solução para esses problemas é utilizar suavizadores por blocos, em que as incógnitas do forte acoplamento são atualizadas coletivamente, tornando o erro suave. Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001) afirmam que dentre os suavizadores por bloco, o suavizador GS-zebra é o mais eficiente, pois possui melhor fator de convergência.

Na Fig. 17, mostra-se o fator de convergência de duas malhas  $\rho_{2g}$  calculado via LFA para todos os suavizadores estudados para um problema com  $N = 1025 \times 1025$ . Esse dado é apresentado para diferentes coeficientes de anisotropia  $\varepsilon$ . Pode-se observar que, para os problemas anisotrópicos, no caso em que  $\varepsilon \gg 1$ , apenas os suavizadores  $y$ -linha-GS e  $y$ -zebra-GS possuem um bom fator de convergência, ou seja,  $\rho_{2g} \approx 0$ . Porém, para  $0 < \varepsilon \ll 1$ , os métodos  $x$ -linha-GS e  $x$ -zebra-GS têm melhores fatores de convergência se comparados com os outros suavizadores, o que confirma que os suavizadores por bloco são mais eficientes que por ponto-a-ponto. Nota-se ainda que, para  $\varepsilon \gg 1$  tem-se forte acoplamento na direção  $y$ , portanto os suavizadores linha nesta direção são os mais eficientes; para  $\varepsilon \ll 1$ , o forte acoplamento acontece na direção  $x$  e consequentemente, os suavizadores na direção  $x$  são os mais eficientes para essa direção (TROTTEMBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001).

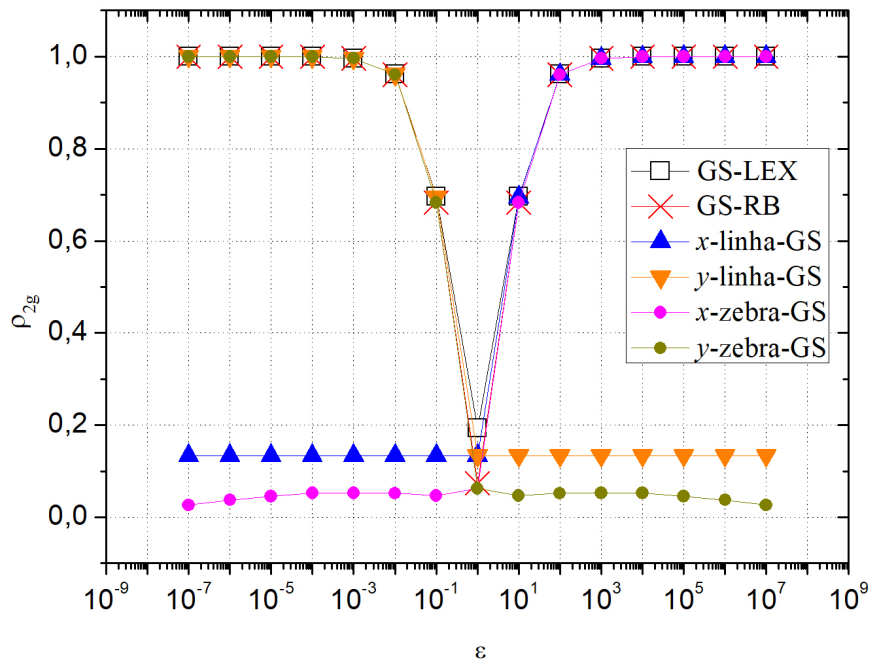


FIGURA 17 – Fator de convergência assintótica via LFA ( $\rho_{2g}$ ) versus coeficiente de anisotropia ( $\varepsilon$ ).

Segundo Trottenberg, Oosterlee e Schuller (2001) o custo computacional (complexidade) dos suavizadores GS-linha e GS-zebra é praticamente o mesmo. Mas, uma vantagem ao se usar o GS-zebra é que o fator de convergência do *multigrid* é melhor

que o GS-linha. De acordo com esses autores e com a análise descrita anteriormente, o suavizador GS-zebra mostrou-se mais eficiente para os diferentes coeficientes de anisotropia, em cada direção, quando comparado aos demais suavizadores estudados.

Considerando-se estes resultados e com o intuito de desenvolver um algoritmo robusto e eficiente para a solução do problema em questão, propõe-se neste trabalho uma variação do suavizador zebra, a qual designou-se *xy-zebra GS*. Neste caso, para  $\varepsilon \ll 1$  é empregado o *x-zebra-GS* e para  $\varepsilon \gg 1$  é empregado o *y-zebra-GS*, conforme o Algoritmo 3.

---

**Algoritmo 3:** *xy-zebra-GS*

---

```

início
  se  $\varepsilon \geq 1$  então
    Aplicar o suavizador y-zebra-GS;
  senão
    Aplicar o suavizador x-zebra-GS;
  fim
fim

```

---

Para o suavizador proposto, *xy-zebra-GS*, foi feita uma comparação do fator de convergência assintótica de duas malhas ( $\rho_{2g}$ ), previsto pela LFA com o fator de convergência empírico ( $\rho_h$ ), calculado para uma malha fina, obtida com 10 níveis de refino ( $N = 1025 \times 1025$ ) e para diferentes valores para o coeficiente de anisotropia  $\varepsilon$ . Os resultados na Fig. 18 evidenciam que a LFA fornece previsões precisas (da ordem de  $0,3 \times 10^{-1}$ ) para os fatores de convergência, confirmando sua importância como ferramenta de análise prévia.

A robustez do suavizador proposto *xy-zebra-GS* pode ser observada na Fig. 19, em que o fator de convergência assintótico,  $\rho_{2g}$  obtido pela LFA, é comparado com o valor  $\rho_h$  obtido empiricamente para diferentes coeficientes de anisotropia em diversas malhas ( $N = 5 \times 5$  a  $2049 \times 2049$ ). Nota-se que para diferentes valores de  $\varepsilon$  tem-se bons resultados para o fator de convergência ( $\rho_h \approx 0,1$ ).

### 6.3 NÚMERO DE CICLOS V

O número de ciclos V, para cada tamanho de problema ( $N = 5 \times 5$  a  $2049 \times 2049$ ) é apresentado na Fig. 20 para o suavizador *xy-zebra-GS* proposto neste trabalho. Na figura são apresentados resultados apenas para  $\varepsilon = 10^a$ ,  $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Os resultados para  $\varepsilon = 10^{-a}$  são idênticos aos encontrados para  $\varepsilon = 10^a$ . Apesar de não se poder concluir nada para  $\varepsilon = 10^6$  e  $10^7$ , nota-se na Fig. 20 que, o número de ciclos V é grosseiramente constante à medida que  $N$  cresce, concordando com a literatura (TROTTERBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001). Percebe-se ainda que

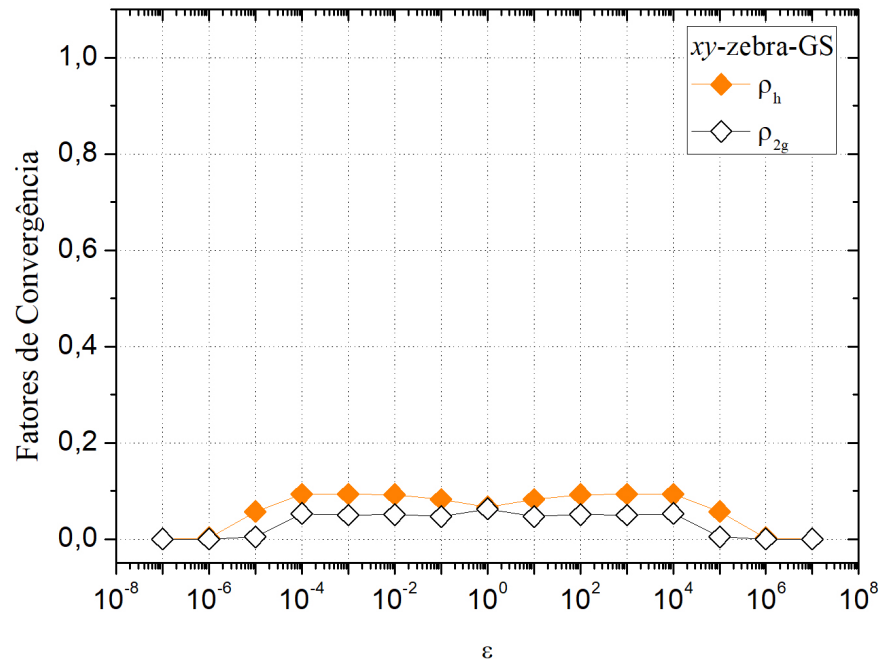


FIGURA 18 – Fatores de convergência assintótica ( $\rho_{2g}$ ) e empírico ( $\rho_h$ ) para  $N = 1025 \times 1025$  *versus* coeficiente de anisotropia ( $\varepsilon$ )

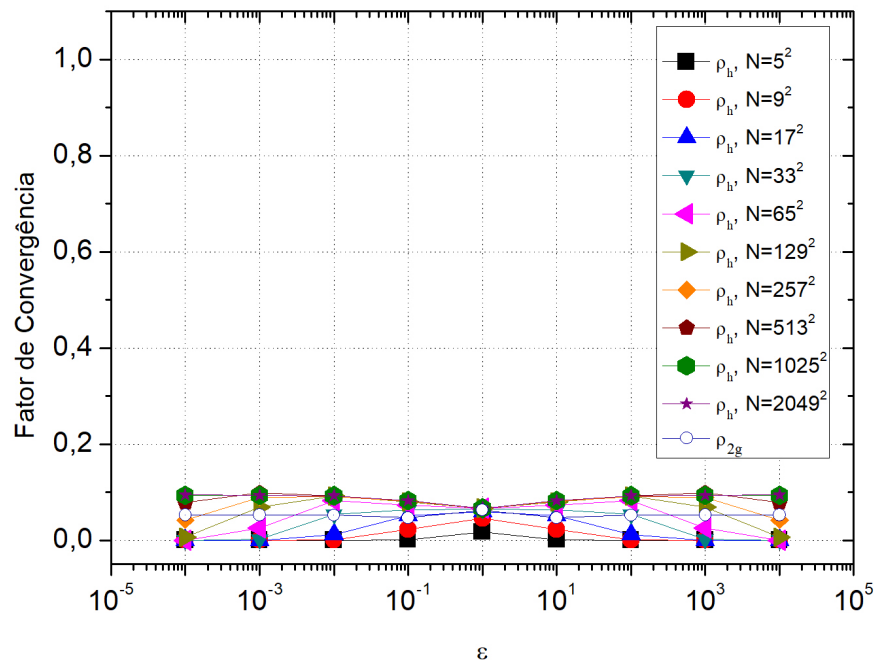


FIGURA 19 – Fator de convergência assintótica via LFA ( $\rho_{2g}$ ) e empírico ( $\rho_h$ ) para as malhas de  $N = 5 \times 5$  à  $2049 \times 2049$  *versus* coeficiente de anisotropia ( $\varepsilon$ ).

tal suavizador necessita de poucos ciclos  $V$  independente do números de nós  $N$ .

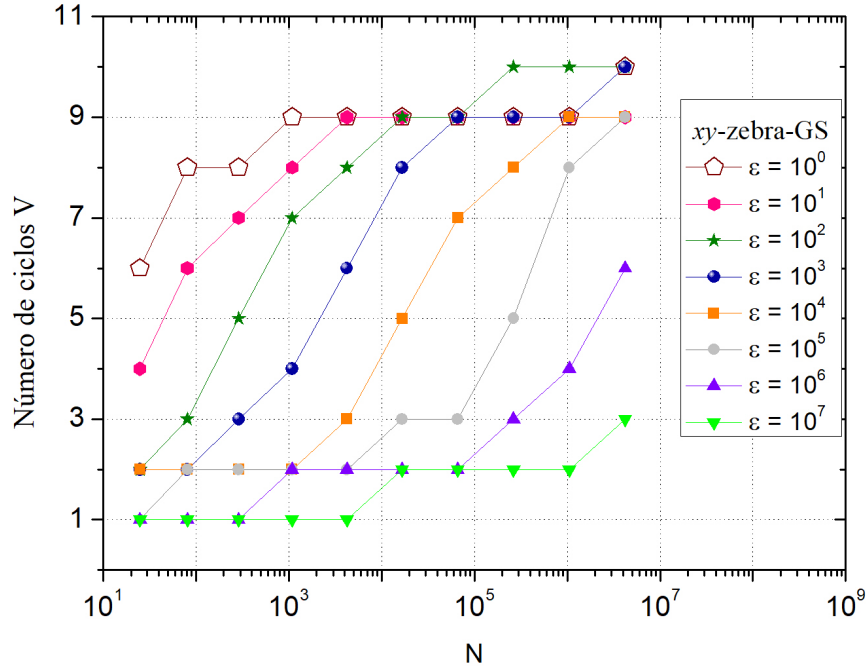


FIGURA 20 – Número de ciclos  $V$  versus número de nós  $N$  para diversos valores de  $\epsilon$ .

#### 6.4 CUSTO COMPUTACIONAL

Para avaliar o custo computacional do método *xy-zebra-GS*, inicialmente foi considerado o comportamento da curva  $t_{CPU}$  versus  $N$ , para os problemas isotrópico e anisotrópico ( $10^{-7} \leq \epsilon \leq 10^7$ ). Em seguida foi feito um ajuste geométrico do tipo  $t_{CPU} = cN^p$  para calcular o desempenho do *multigrid*, onde  $c$  é uma constante relativa ao método e  $p > 1$  representa a ordem do algoritmo, ou a inclinação da curva. Quanto menor o valor de  $p$ , melhor o desempenho do algoritmo. No caso ideal, o método *multigrid* apresenta  $p = 1$ , o que indica que o  $t_{CPU}$  aumenta proporcionalmente com o número de incógnitas  $N$  (TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001).

A Fig. 21 apresenta um gráfico com as curvas  $t_{CPU}$  versus  $N$  ( $5 \times 5$  a  $2049 \times 2049$ ) para os casos isotrópico e anisotrópico. Como os  $t_{CPU}$  obtidos para  $\epsilon = 10^{-a}$  são similares aos encontrados para  $\epsilon = 10^a$ , apenas estes últimos são representados na figura.

Com relação ao  $t_{CPU}$ , os resultados evidenciam a robustez do método com relação à variação do coeficiente de anisotropia  $\epsilon$ .

Os resultados do ajuste geométrico são apresentados na Tabela 2, onde constam os valores de  $c$  e  $p$  apenas para os coeficientes de anisotropia  $\epsilon = 10^a$ ,  $a \in$

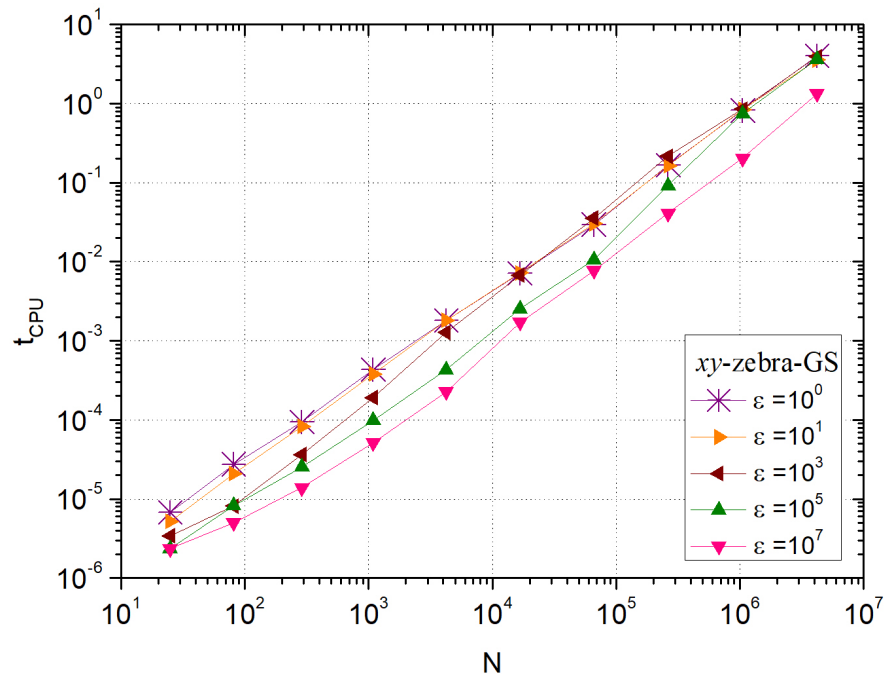


FIGURA 21 –  $t_{CPU}(s)$  versus número de nós ( $N$ ) para diversos valores de  $\varepsilon$ .

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Os resultados para  $\varepsilon = 10^{-a}$  são similares à  $\varepsilon = 10^a$ . Estes resultados confirmam que o  $t_{CPU}$  do *mutigrid* com o suavizador *xy-zebra-GS* cresce linearmente com o aumento do número de incógnitas  $N$ , pois  $p$  se aproxima da unidade.

$\varepsilon$	$p$	$c$
$10^0$	1,092	$2,183 \times 10^{-7}$
$10^1$	1,055	$3,646 \times 10^{-7}$
$10^2$	1,071	$3,255 \times 10^{-7}$
$10^3$	1,091	$6,017 \times 10^{-7}$
$10^4$	1,076	$2,674 \times 10^{-7}$
$10^5$	1,165	$6,996 \times 10^{-7}$
$10^6$	1,331	$3,685 \times 10^{-7}$
$10^7$	1,151	$2,187 \times 10^{-7}$

TABELA 2 – Ordem de complexidade  $p$  e o coeficiente  $c$ , em relação ao coeficiente de anisotropia  $\varepsilon$ .

## 7 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como principal objetivo propor um suavizador eficiente e robusto para um problema difusivo bidimensional com anisotropia física. Para alcançar tal objetivo foi necessário realizar um estudo do fator de convergência do método *multigrid* para alguns suavizadores via LFA. O método *multigrid* geométrico foi empregado com CS, ciclo V, restrição FW, interpolação bilinear, estimativa inicial nula e  $re = 2$ . Os suavizadores estudados foram os conhecidos ponto-a-ponto GS-RB e GS-LEX, por blocos  $x$ -linha-GS,  $y$ -linha-GS,  $x$ -zebra-GS e  $y$ -zebra-GS e propôs-se o suavizador  $xy$ -zebra-GS que é uma composição do suavizador  $x$ -zebra-GS com o suavizador  $y$ -zebra-GS. Foram analisados o fator de convergência assintótica e empírico, número de ciclos e custo computacional via ordem de complexidade do novo suavizador. Como resultado deste trabalho, verificou-se que:

- O fator de convergência calculado via LFA e empiricamente ficaram muito próximos, o que confirmou a importância e confiabilidade da LFA;
- Para os suavizadores estudados, os fatores de convergência dos suavizadores por blocos são melhores do que os dos suavizadores ponto-a-ponto;
- Para os suavizadores por bloco estudados, o método GS-zebra possui melhores fatores de convergência;
- Entre os suavizadores estudados, o  $x$ -zebra-GS e  $y$ -zebra-GS apresentam o melhor fator de convergência para  $0 < \varepsilon \ll 1$  e  $\varepsilon \gg 1$ , respectivamente;
- O número de ciclos V tende a ser constante à medida que  $N$  aumenta;
- A ordem  $p$  do algoritmo  $xy$ -zebra-GS está próxima da unidade independentemente do coeficiente de anisotropia, o que está de acordo com a eficiência teórica do *multigrid*;
- O suavizador  $xy$ -zebra-GS, proposto nesta dissertação, apresenta bons fatores de convergência e baixo custo computacional, independentemente do fator de anisotropia.

### 7.1 TRABALHOS FUTUROS

Com a finalidade de complementar e expandir os estudos deste trabalho, são sugeridos os seguintes temas:



- Comparar métodos descritos e o suavizador LU Incompleto (ILU);
- Testar a aplicação dos métodos descritos nesta dissertação em problemas não lineares;
- Aplicar a LFA em problemas de advecção-difusão anisotrópica nos métodos descritos.

## REFERÊNCIAS

- ARAKI, L. K. **Verificação de soluções numéricas de escoamentos reativos em motores-foguete**. 2007. Tese (Doutorado) – UFPR.
- BAKHVALOV, N. S. On the Convergence of Relaxation Method with Natural Constraints on the Elliptic operator. **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, Elsevier, v. 1, n. 5, p. 101–135, 1966.
- BRANDT, A. Barriers to achieving textbook multigrid efficiency (TME) in CFD, 1998.
- \_\_\_\_\_. Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems. **Mathematics of Computation**, v. 31, p. 333–390, 1977.
- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. **A Multigrid Tutorial**. Philadelphia: Society for Industrial e Applied Mathematics, 2000.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2008.
- CHISHOLM, T. **Multigrid Acceleration of an Approximately-Factored Algorithm for Steady Aerodynamic Flows**. 1997. Diss. (Mestrado) – University of Toronto.
- CORDAZZO, J. **Simulação de Reservatórios de Petróleo utilizando o método EbFVM e Multigrid Algébrico**. 2006. Tese (Doutorado) – UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.
- CRAIG, C. D. **Multigrid Methods in Science and Engineering**. Watson Research Center e Yale University, IEE: IBM T.F., 1996.
- CUNHA, C. **Métodos Numéricos**. 2. ed. Campina,SP: Editora da UNICAMP, 2003.
- DEDNER, A.; MULLER, E.; SCHEICHL. Efficient Multigrid Preconditioners for Anisotropic Problems in Geophysical Modelling. **arXiv preprint arXiv:1408.2981**, ago. 2014.
- FERORENKO, R. P. The speed of convergence of one iterative process. **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, Elsevier, v. 4, n. 3, p. 227–235, 1964.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. Berlin: Springer, 2002.
- FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- FRANCO, S. R. **Métodos multigris espaço-tempo para resolver as equações do calor e da poroelasticidade**. 2017. Tese (Doutorado) – UFPR, Curitiba, PR.

- FRANCO, S. R. et al. Multigrid method based on a space-time approach with standard coarsening for parabolic problems. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier, v. 317, p. 25–34, 2018. disponível on-line outubro/2017.
- GASPAR, F. J.; RODRIGO, C. On the fixed-stress split scheme as smoother in multigrid methods for coupling flow and geomechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 326, p. 526–540, 2017.
- GEE, W. M.; HU, J.; TUMNARO, S. R. A New Smoothed Aggregation Multigrid for Anisotropic Problems. **Numerical Linear Algebra with Applications**, Wiley Online Library, v. 16, n. 1, p. 19–37, 2009.
- GONÇALVES, S. F. T. **Estudo de parâmetros do método multigrid geométrico para equações 2D em CFD e volumes finitos**. 2013. Tese (Doutorado) – UFPR, Curitiba, PR.
- HACKBUSCH, W. **Multi-grid methods and applications**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013. v. 4.
- HORTMANN, M.; PERIC, M.; SCHEURER, G. Finite Volume Multigrid Prediction of Laminar Natural Convection: Bench-Mark solutions. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 11, n. 2, p. 189–207, 1990.
- HUGHES, T.J.R. **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamics Finite Element Analysis**. Boca Raton (USA): CRC Press, 2000.
- HUTCHINSON, B. R.; RAITHBY, G. D. A Multigrid Method based on the Additive Correction Strategy. **Numerical Heat Transfer**, Taylor & Francis, v. 9, n. 5, p. 511–537, 1986.
- JIMACK, P. K. Applications of multigrid techniques in CFD. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 1, p. 1–12, 2007.
- KARAA, S.; ZHANG, J. Convergence and performance of iterative methods for solving variable coefficient convection-diffusion equation with a fourth-order compact difference scheme. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 44, n. 3-4, p. 457–479, 2002.
- KARKI, K. C.; SATHYAMURTHY, P. S.; PATANKAR, S. V. Performance of a multigrid method with an improved discretization scheme for three-dimensional fluid flow calculations. **Numerical Heat Transfer**, Taylor & Francis, v. 29, n. 3, p. 275–288, 1996.
- KELKAR, K. M. Iterative method for the numerical prediction of heat transfer in problems involving large differences in thermal conductivities. **Numerical Heat Transfer, Part B Fundamentals**, Taylor & Francis, v. 18, n. 1, p. 113–128, 1990.
- LARSSON, J.; LIEN, F. S.; YEE, E. Conditional Semicoarsening Multigrid Algorithm for the Poisson Equation on Anisotropic Grids. **Journal of Computational Physics**, v. 208, n. 1, p. 368–383, 2005.

LEW, S. et al. Accuracy and run-time comparison for different potential approaches and iterative solvers in finite element method based EEG source analysis. **Applied Numerical Mathematics**, Elsevier, v. 59, n. 8, p. 1970–1988, 2009.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2004.

MANZANO, L. **Implementation of Multigrid for Aerodynamic Computations on MultiBlock Grids**. 1999. Diss. (Mestrado) – Department of aerospace science e engineering, University of Toronto.

MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos**. 2001. Tese (Doutorado) – UFSC, Florianópolis, SC.

MESQUITA, M. S.; DE-LEMO, M. J. S. Optimal Multigrid Solutions of Two-dimensional Convection-Conduction Problems. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier, v. 152, n. 3, p. 725–742, 2004.

MONTERO, R. S.; LLORENSE, I. M.; SALAS, M. D. Robust Multigrid Algorithm for the Navier-Stokes Equations. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 173, n. 2, p. 412–432, 2001.

OLIVEIRA, F. **Efeito de malhas anisotrópicas bidimensionais sobre o desempenho do método multigrid geométrico**. 2010. Tese (Doutorado) – UFPR, Curitiba, PR.

OLIVEIRA, F.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H. Optimized partial semicoarsening multigrid algorithm for heat diffusion problems and anisotropic grids. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 36, n. 10, p. 4665–4676, 2012.

OOSTERLEE, C. W.; GASPAR, F. J. Multigrid relaxation methods for systems of saddle point type. **Applied Numerical Mathematics**, Elsevier, v. 58, n. 12, p. 1933–1950, 2008.

OOSTERLEE, C. W.; WESSELING, P. A robust multigrid method for a discretization of the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates. **IMPACT of Computing in Science and Engineering**, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 128–151, 1993.

PEHERSTORFER, B.; BUNGARTZ, H. J. Semi-Coarsening in Space and Time for the Hierarchical Transformation Multigrid Method. **Procedia Computer Science**, Elsevier, v. 9, p. 2000–2003, 2012.

PIERCE, N. A.; ALONSO, J. J. Efficient computation of unsteady viscous flows by an implicit preconditioned multigrid method. **AIAA journal**, v. 36, n. 3, p. 401–408, 1998.

PINTO, M. A. V. **Comportamento do multigrid geométrico em problemas de transferência de calor**. 2006. Tese (Doutorado) – UFPR, Curitiba, PR.

PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H. Efeito dos Parâmetros do Método Multigrid CS e FAS sobre o tempo de CPU para a Equação de Laplace Bidimensional. **Proceedings of ENCIT**, 2006.

PINTO, M. A. V.; RODRIGO, C. et al. On the robustness of ILU smoothers on triangular grids. **Applied Numerical Mathematics**, Elsevier, v. 106, p. 37–52, 2016.

SANTIAGO, C. D. **Estudo de parâmetros do método Multigrid para sistemas de equações 2D em CFD**. 2010. Tese (Doutorado) – UFPR, Curitiba, PR.

SATHYAMURTHY, P. S.; PATANKAR, S. V. Block-correction-based multigrid method for fluid flow problems. **Numerical Heat Transfer, Part B Fundamentals**, Taylor & Francis, v. 25, n. 4, p. 375–394, 1994.

SETTARI, A.; AZIZ, K. A Generalization of the Additive Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Equations. **Journal on Numerical Analysis**, SIAM, v. 10, n. 3, p. 506–521, 1973.

SIVALOGANATHAN, S. The use of local mode analysis in the design and comparison of multigrid methods. **Computer Physics Communications**, Elsevier, v. 65, n. 1-3, p. 246–252, 1991.

SMITH, K. M.; COPE, W. K.; VANKA, S. P. A multigrid procedure for three-dimensional flows on non-orthogonal collocated grids. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 17, n. 10, p. 887–904, 1993.

SOCKOL, P. M. Multigrid solution of the Navier–Stokes equations on highly stretched grids. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 17, n. 7, p. 543–566, 1993.

SOUZA, L. F. et al. Comparison of Poisson solvers in a transient 2D fluid flow problem with Dirichlet boundary conditions. **Continuity**, v. 2, n. 2, p. 4, 2006.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Introdução à álgebra linear**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997.

STÜBEN, K. A Review of Algebraic Multigrid. **Journal of Computation and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 128, p. 281–309, 2001.

STÜBEN, K.; TROTTEBERG, U. Multigrid methods: fundamental algorithms, model problem analysis and applications. In: HACKBUSH, W.; TROTTEBERG, U. (Ed.). **Multigrid methods**. Berlim: Springer, 1982. p. 1–176.

SUERO, R.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H. Efeito da anisotropia física sobre o método multigrid na solução da equação de advecção-difusão 2D. **Proceedings of XXIX CILAMCE**, 2008.

- SUERO, R.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H. et al. Analysis of algebraic multigrid parameters for two-dimensional steady-state heat diffusion equations. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 36, n. 7, p. 2996–3006, 2012.
- SWANSON, R. C.; TURKEL, E.; ROSSON, C. C. Convergence acceleration of Runge-Kutta schemes for solving the Navier-Stoke equations. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 224, n. 1, p. 365–388, 2007.
- TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**. Philadelphia: Florence: Taylor e Francis, 1997.
- THEKALE, A. et al. Optimizing the number of multigrid cycles in the full multigrid algorithm. **Numerical Linear Algebra with Applications**, Wiley Online Library, v. 17, n. 2-3, p. 199–210, 2010.
- TROTTEBERG, U.; OOSTERLEE, C. W.; SCHULLER, A. **Multigrid**. San Diego: Academic press, 2001.
- VASSOLER-RUTZ, G.; PINTO, M. A. V. Análise de Fourier Local e otimização de parâmetros do método multigrid para a equação de difusão anisotrópica. **Proceedings of XXXVII CILAMCE**, 2016.
- VASSOLER-RUTZ, G.; PINTO, M. A. V.; SUERO, R. Comparison of the physical anisotropy of multigrid method for two-dimensional diffusion equation. **Proceedings of COBEM**, 2015.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to Computational Fluid Dynamics The Finite Volume Method**. London: Pearson Longman, 2007.
- WALLIS, J. T. Methods toward better Multigrid Solver Convergence. **Applied Mathematics Research Report**, Department of Mathematical Sciences, KAIST, Korea, 2008.
- WESSELING, P. **An Introduction to Multigrid Methods**. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- WESSELING, P.; OOSTERLEE, C. W. Geometric Multigrid with Applications to Computational Fluid Dynamics. **Journal of Computation and Applied Mathematics**, v. 128, p. 311–334, 2001.
- WIENANDS, R.; JOPPICH, W. **Practical Fourier Analysis for Multigrid Methods**. Washington, USA: Chapman e Hall/CRC Press, 2005.
- YAN, J.; THIELE, F.; XUE, L. A modified full multigrid algorithm for the Navier-Stokes equations. **Computers & fluids**, Elsevier, v. 36, n. 2, p. 445–454, 2007.
- ZHANG, J. Multigrid method and fourth-order compact scheme for 2D Poisson equation with unequal mesh-size discretization. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 179, n. 1, p. 170–179, 2002.

ZHOU, G.; FULTON, S. R. Fourier Analysis of Multigrid Methods on Hexagonal Grids. **SIAM Journal on Scientific Computing**, SIAM, v. 31, n. 2, p. 1518–1538, 2009.