Priscila Dombrovski Zen **Métodos Aproximados em Engenharia**

5º Trabalho da disciplina

Dado o funcional da energia potencial total para a flexão de uma viga

$$I_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - q\,w(x)\right] dx$$

Encontrar a solução aproximada para uma viga de vão L engastada em $x = 0$ e livre em $x = L$, com carregamento constante, uniformemente distribuído, igual a q, e utilizando um só parâmetro. Dados:

E: é o modo de elasticidade;

I: o momento de Inércia da secção transversal da viga;

$\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2$: Energia Potencial de Deformação;

q. w(x): Energia potencial da carga atuante.

Solução Analítica

Pela teoria de *Euler-Bernoulli,* a equação que governa o problema de flexão de vigas é:

$$EI\,\frac{d^4u}{dx^4} = q(x)$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de Inércia da secção transversal e q(x) é o carregamento.

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \left(\frac{q(x)}{EI}\right)$$

Resolvemos a equação diferencial de 4ª ordem, utilizando integrações por variáveis separáveis.

$$\int \left(\frac{d^4u}{dx^4}\right) dx = \int \left(\frac{q(x)}{EI}\right) dx$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \left(\frac{q(x)x}{EI}\right) + c_1$$

$$\int \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) dx = \int \left(\frac{q(x)}{EI} x + c_1\right) dx$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{q(x)}{EI} . \frac{x^2}{2}\right) + c_1 x + c_2$$

$$\int \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx = \int \left(\frac{q(x)}{EI}\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right) dx$$

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{q(x)}{EI} . \frac{x^3}{6}\right) + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$\int \left(\frac{du}{dx}\right) dx = \int \left(\frac{q(x)}{EI}\frac{x^3}{6} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3\right) dx$$

$$u(x) = \left(\frac{q(x)}{EI} . \frac{x^4}{24}\right) + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

Usando as seguintes condições de contorno:

Engastada: $\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$

Livre: $\begin{cases} u''(L) = 0 \\ u'''(L) = 0 \end{cases}$

Assim temos:

- $u(0) = 0$

$$u(0) = \left(\frac{q(0)}{EI} . \frac{0^4}{24}\right) + c_1 \frac{0^3}{6} + c_2 \frac{0^2}{2} + c_3 0 + c_4 = 0$$

$$c_4 = 0$$

- $u'(0) = 0$

$$u'(0) = \left(\frac{q(0)}{EI} . \frac{0^3}{6}\right) + c_1 \frac{0^2}{2} + c_2 0 + c_3 = 0$$

$$c_3 = 0$$

- $u''(L) = 0$

$$u''(L) = \left(\frac{q}{EI}.\frac{L^2}{2}\right) + c_1 L + c_2 = 0$$

$$c_2 = -\left(-\frac{q}{EI}L\right)L - \frac{q}{EI}.\frac{L^2}{2} = \frac{q}{EI}.l^2 - \frac{q}{EI}.\frac{L^2}{2} = \frac{q}{EI}.\frac{L^2}{2}$$

- $u'''(L) = 0$

$$u''(L) = \left(\frac{qL}{EI}\right) + c_1 = 0$$

$$c_1 = -\frac{q}{EI}L$$

Assim, a solução analítica para o referido problema é:

$$u(x) = \left(\frac{q}{EI}.\frac{x^4}{24}\right) - \frac{q}{EI}L\frac{x^3}{6} + \frac{q}{EI}.\frac{L^2}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6}L + \frac{x^2}{4}L^2\right)$$

Solução Aproximada

Usando o método de Rayleigh-Ritz para resolução do problema, temos:

1ª Tentativa:

Fazendo $\bar{w} = \alpha x(x-L)^2$, tem-se: $\frac{d\bar{w}}{dx} = 3x^2\alpha - 4x\alpha L + \alpha L^2$, $\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = 6x\alpha - 4\alpha L$.

Substituindo na expressão anterior:

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - q\,w\right]dx = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(6x\alpha - 4\alpha L)^2 - q\alpha x(x-L)^2\right]dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(36\alpha^2x^2 - 48\alpha^2 xL + 16\alpha^2L^2) - q\alpha(x^3 - 2x^2L + xL^2)\right]dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L [EI(18x^2 - 24xL + 8L^2)\alpha^2 - q\alpha(x^3 - 2x^2L + xL^2)]dx$$

Integrando, temos:

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{18}{3}x^3 - \frac{24}{2}x^2L + 8xL^2\right)\alpha^2 - q\alpha\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3L + \frac{1}{2}x^2L^2\right)\Big|_{x=0}^{x=L}$$

$$\bar{I}_p = EI(6x^3 - 12x^2L + 8xL^2)\alpha^2 - q\alpha(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3L + \frac{1}{2}x^2L^2)|_{x=0}^{x=L}$$

$$\bar{I}_p = EI(6L^3 - 12L^3 + 8L^3)\alpha^2 - q\alpha(\frac{1}{4}L^4 - \frac{2}{3}L^4 + \frac{1}{2}L^4)$$

$$\bar{I}_p = EI(2L^3)\alpha^2 - \frac{1}{12}q\alpha L^4$$

Usando a condição de extremização, $\frac{d\bar{I}_p}{d\alpha} = 0$, temos:

$$EI(4L^3)\alpha = \frac{1}{12}qL^4 \; \rightarrow \alpha = \frac{q}{EI}\frac{L}{48}$$

Substituindo $\alpha = \frac{q}{EI}\frac{L}{4}$ em $\bar{w} = \alpha x(x-L)^2$, temos:

$$\bar{w} = \frac{q}{EI}\frac{L}{4}(x(x-L)^2)$$

$$\bar{w} = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^3L - 2x^2L^2 + xL^3}{4}\right)$$

Que difere da solução analítica, pois:

$$\frac{\bar{w}}{u(x)} = \frac{\frac{q}{EI}\left(\frac{x^3L - 2x^2L^2 + xL^3}{4}\right)}{\frac{q}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6}L + \frac{x^2}{4}L^2\right)} = \frac{\left(\frac{x^3L - 2x^2L^2 + xL^3}{4}\right)}{\left(\frac{x^4 - 4x^3L + 6x^2L^2}{24}\right)} = \frac{6L(x-L)^2}{x(x^2 - 4xL + 6L^2)}$$

Substituindo $x = \frac{L}{2}$, teremos:

$$\frac{\bar{w}}{u(x)} = \frac{6L\left(\frac{L}{2} - L\right)^2}{\frac{L}{2}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{L}{2}\right)L + 6L^2\right)} = \frac{12}{17}$$

2ª Tentativa:

Fazendo $\bar{w} = \alpha x^3(x-L)^2$, tem-se:

$\frac{d\bar{w}}{dx} = 5x^4\alpha - 8x^3\alpha L + 3x^2\alpha L^2$,

$\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = 20x^3\alpha - 24x^2\alpha L + 6x\alpha L^2$.

Substituindo na expressão anterior:

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - q\,w\right]dx = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(20x^3\alpha - 24x^2\alpha L + 6x\alpha L^2)^2 - q\alpha x^3(x-L)^2\right]dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(400x^6\alpha^2 - 960\alpha^2x^5L + 816\alpha^2x^4L^2 - 288\alpha^2x^3L^3 + 36x^2\alpha^2L^4) - q\alpha x^3(x^2 - 2xL + L^2)\right]dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L [EI(200x^6\alpha^2 - 480\alpha^2x^5L + 408\alpha^2x^4L^2 - 144\alpha^2x^3L^3 + 18x^2\alpha^2L^4) - q\alpha x^5 + 2q\alpha x^4L - q\alpha x^3L^2]dx$$

Integrando, temos:

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{200}{7}x^7 - \frac{480}{6}x^6L + \frac{408}{5}x^5L^2 - \frac{144}{4}x^4L^3 + \frac{18}{3}x^3L^4\right)\alpha^2 - q\left(\frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{5}x^5L - \frac{1}{4}x^4L^2\right)\alpha\Big|_{x=0}^{x=L}$$

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{200}{7}L^7 - 80L^7 + \frac{408}{5}L^7 - 36L^7 + 6L^7\right)\alpha^2 - q\left(\frac{1}{6}L^6 - \frac{2}{5}L^6 + \frac{1}{4}L^6\right)\alpha$$

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{6}{35}L^7\right)\alpha^2 - \frac{1}{60}q\alpha L^6$$

Usando a condição de extremização, $\frac{d\bar{I}_p}{d\alpha} = 0$, temos:

$$EI\left(\frac{12}{35}L^7\right)\alpha = \frac{1}{60}qL^6 \rightarrow \alpha = \frac{7}{144L}\frac{q}{EI}$$

Substituindo $\alpha = \frac{7}{144L}\frac{q}{EI}$ em$\bar{w} = \alpha x^3(x-L)^2$, temos:

$$\bar{w} = \frac{7}{144L}\frac{q}{EI}x^3(x-L)^2$$

$$\bar{w} = \frac{q}{EI}\left(\frac{7}{144L}(x^5 - 2x^4L + x^3L^2)\right)$$

Que difere da solução analítica, pois:

$$\frac{\bar{w}}{u(x)} = \frac{\frac{q}{EI}\left(\frac{7}{144L}(x^5 - 2x^4L + x^3L^2)\right)}{\frac{q}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6}L + \frac{x^2}{4}L^2\right)} = \frac{\left(\frac{7(x^5 - 2x^4L + x^3L^2)}{144L}\right)}{\left(\frac{x^4 - 4x^3L + 6x^2L^2}{24}\right)} = \frac{7(x^5 - 2x^4L + x^3L^2)}{6L(\,x^4 - 4x^3L + 6x^2L^2)}$$

Substituindo $x = \frac{L}{2}$, teremos:

$$\frac{\bar{w}}{u(x)} = \frac{7\left(\left(\frac{L}{2}\right)^5 - 2\frac{L}{2}^4 L + \frac{L}{2}^3 L^2\right)}{6L(\frac{L}{2}^4 - 4\frac{L}{2}^3 L + 6\frac{L}{2}^2 L^2)} = \frac{\frac{7L^5}{32}}{\frac{102L^5}{16}} = \frac{7}{204}$$

3ª Tentativa:

Fazendo $\bar{w} = \alpha x(x-L)$, tem-se: $\frac{d\bar{w}}{dx} = \alpha(2x-L)$, $\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = 2\alpha$.

Substituindo na expressão anterior:

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - q\,w\right]dx = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(2\alpha)^2 - q\alpha x(x-L)\right]dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(4\alpha^2) - q\alpha(x^2 - xL)\right]dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L [EI2\alpha^2 - q\alpha(x^2 - xL)]dx$$

Integrando, temos:

$$\bar{I}_p = EI(2x)\alpha^2 - q\alpha(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2L)|_{x=0}^{x=L}$$

$$\bar{I}_p = EI(2L)\alpha^2 - q\alpha\left(\frac{1}{3}L^3 - \frac{1}{2}L^3\right)$$

$$\bar{I}_p = EI(2L)\alpha^2 - \frac{1}{6}q\alpha L^3$$

Usando a condição de extremização, $\frac{d\bar{I_p}}{d\alpha} = 0$, temos:

$$EI(4L)\alpha = \frac{1}{6}qL^3 \;\rightarrow \alpha = \frac{q}{EI}\frac{L^2}{24}$$

Substituindo $\alpha = \frac{q}{EI}\frac{L^2}{24}$ em $\bar{w} = \alpha x(x-L)$, temos:

$$\bar{w} = \frac{q}{EI}\frac{L^2}{24}x(x-L)$$

$$\bar{w} = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^2L^2 - xL^3}{24}\right)$$

Que difere da solução analítica, pois:

$$\frac{\bar{w}}{u(x)} = \frac{\frac{q}{EI}\left(\frac{x^2L^2 - xL^3}{24}\right)}{\frac{q}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6}L + \frac{x^2}{4}L^2\right)} = \frac{\left(\frac{x^2L^2 - xL^3}{24}\right)}{\left(\frac{x^4 - 4x^3L + 6x^2L^2}{24}\right)} = \frac{x^2L^2 - xL^3}{x^4 - 4x^3L + 6x^2L^2}$$

Substituindo $x = \frac{L}{2}$, teremos:

$$\frac{\bar{w}}{u(x)} = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2 L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)L^3}{\left(\frac{L}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{L}{2}\right)^3 L + 6\left(\frac{L}{2}\right)^2 L^2} = \frac{-\frac{1L^4}{4}}{\frac{17}{16}L^4} = -\frac{4}{17}$$

4ª Tentativa:

Fazendo $\bar{w} = \alpha x^2(x-L)^2$, tem-se:

$\frac{d\bar{w}}{dx} = \alpha(4x^3 - 6x^2L + 2xL^2)$, $\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = \alpha(12x^2 - 12xL + 2L^2)$.

Substituindo na expressão anterior:

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - q\,w\right]dx = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(\alpha(12x^2 - 12xL + 2L^2))^2 - q\alpha x^2(x-L)^2\right]dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(\alpha^2(144x^4 - 288x^3L + 192x^2L^2 - 48xL^3 + 4L^4))\ - q\alpha(x^4 - 2x^3L + x^2L^2)\right]dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L [EI(\alpha^2(72x^4 - 144x^3L + 96x^2L^2 - 24xL^3 + 2L^4))\ - q\alpha(x^4 - 2x^3L + x^2L^2)]dx$$

Integrando, temos:

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{72}{5}x^5 - \frac{144}{4}x^4L + \frac{96}{3}x^3L^2 - \frac{24}{2}x^2L^3 + 2xL^4\right)\alpha^2 - q\alpha\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4L + \frac{1}{3}x^3L^2\right)\Big|_{x=0}^{x=L}$$

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{72}{5}L^5 - 36L^5 + 32L^5 - 12L^5 + 2L^5\right)\alpha^2 - q\alpha\left(\frac{1}{5}L^5 - \frac{1}{2}L^5 + \frac{1}{3}L^5\right)$$

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{2}{5}L^5\right)\alpha^2 - \frac{1}{30}q\alpha L^5$$

Usando a condição de extremização, $\frac{d\bar{I}_p}{d\alpha} = 0$, temos:

$$EI\left(\frac{4}{5}L^5\right)\alpha = \frac{1}{30}qL^5 \;\rightarrow \alpha = \frac{q}{EI}\frac{1}{24}$$

Substituindo $\alpha = \frac{q}{EI}\frac{1}{24}$ em $\overline{w} = \alpha x^2(x-L)^2$, temos:

$$\overline{w} = \frac{q}{EI}\frac{1}{24}x^2(x-L)^2$$

$$\overline{w} = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^4 - 2x^3L + x^2L^2}{24}\right)$$

Que difere da solução analítica, pois:

$$\frac{\overline{w}}{u(x)} = \frac{\frac{q}{EI}\left(\frac{x^4 - 2x^3L + x^2L^2}{24}\right)}{\frac{q}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6}L + \frac{x^2}{4}L^2\right)} = \frac{\left(\frac{x^4 - 2x^3L + x^2L^2}{24}\right)}{\left(\frac{x^4 - 4x^3L + 6x^2L^2}{24}\right)} = \frac{x^4 - 2x^3L + x^2L^2}{x^4 - 4x^3L + 6x^2L^2}$$

Substituindo $x = \frac{L}{2}$, teremos:

$$\frac{\overline{w}}{u(x)} = \frac{4\left(\frac{L}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{L}{2}\right)^3 L - \left(\frac{L}{2}\right)^2 L^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{L}{2}\right)^3 L + 6\left(\frac{L}{2}\right)^2 L^2} = \frac{-\frac{1L^4}{4}}{\frac{17}{16}L^4} = -\frac{4}{17}$$

5ª Tentativa:

Fazendo $\overline{w} = \alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_5$, tem-se:

$\frac{d\overline{w}}{dx} = 4\alpha_1 x^3 + 3\alpha_2 x^2 + 2\alpha_3 x + \alpha_4$, $\frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = .12\alpha_1 x^2 + 6\alpha_2 x + 2\alpha_3$,

Para satisfazer as condições de contorno, temos:

Engastada: $\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$

$$\overline{w}(0) = \alpha_1 0^4 + \alpha_2 0^3 + \alpha_3 0^2 + \alpha_4 0 + \alpha_5 = 0 \rightarrow \alpha_5 = 0$$

$$\overline{w}'(0) = 4\alpha_1 0^3 + 3\alpha_2 0^2 + 2\alpha_3 0 + \alpha_4 = 0 \;\rightarrow \alpha_4 = 0$$

Livre: $\begin{cases} u''(L) = 0 \\ u'''(L) = 0 \end{cases}$

$$\overline{w}''(L) = 12\alpha_1 L^2 + 6\alpha_2 L + 2\alpha_3 = 0$$

$$\overline{w}'''(L) = 24\alpha_1 L + 6\alpha_2 = 0$$

Assim temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = -4\alpha L \\ \alpha_3 = 6\alpha L^2 \\ \alpha_4 = 0 \\ \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

Logo

$$\bar{w} = \alpha x^4 - 4\alpha L x^3 + 6\alpha L^2 x^2$$

$$\bar{w}'' = 12\alpha x^2 - 24\alpha L x + 12\alpha L^2$$

Substituindo na expressão anterior:

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 - q\,w\right] dx = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(12\alpha x^2 - 24\alpha L x + 12\alpha L^2)^2 - q(\alpha x^4 - 4\alpha L x^3 + 6\alpha L^2 x^2)\right] dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(144x^4 - 576x^3 L + 864x^2 L^2 - 576x L^3 + 144L^4)\alpha^2 \ - q(\alpha x^4 - 4\alpha L x^3 + 6\alpha L^2 x^2)\right] dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L [EI(72x^4 - 288x^3 L + 432x^2 L^2 - 288x L^3 + 72L^4)\alpha^2 \ - q(\alpha x^4 - 4\alpha L x^3 + 6\alpha L^2 x^2)]dx$$

Integrando, temos:

$$\bar{I}_p = EI\left[\left(\frac{72}{5}x^5 - \frac{288}{4}x^4 L + \frac{432}{3}x^3 L^2 - \frac{288}{2}x^2 L^3 + 72\,x L^4\right)\alpha^2 \ - q\alpha\left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 L + 2x^3 L^2\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=L}$$

$$\bar{I}_p = EI\ \left(\frac{72}{5}L^5 - 72L^5 + 144L^5 - 144L^5 + 72L^5\right)\alpha^2 \ - q\alpha\left(\frac{1}{5}L^5 - L^5 + 2L^5\right)$$

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{72}{5}L^5\right)\alpha^2 - q\alpha\left(\frac{6}{5}L^5\right)$$

Usando a condição de extremização, $\frac{d\bar{I}_p}{d\alpha} = 0$, temos:

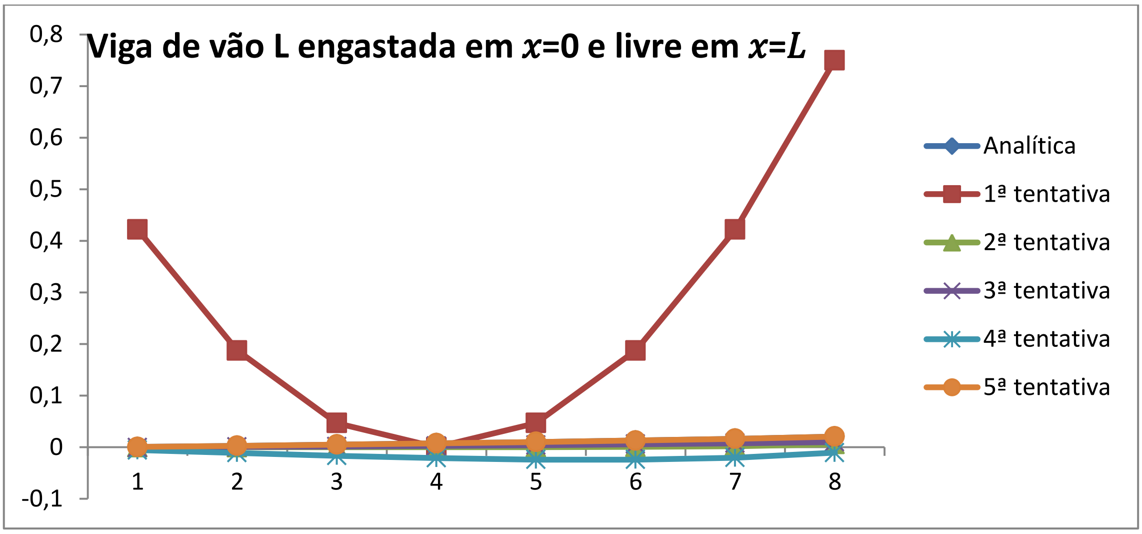
$$EI\left(\frac{144}{5}L^5\right)\alpha = \frac{6}{5}qL^5 \ \rightarrow \alpha = \frac{q}{EI}\frac{6}{144}$$

Substituindo $\alpha = \frac{q}{EI}\frac{6}{144}$ em $\bar{w} = \alpha x^4 - 4\alpha L x^3 + 6\alpha L^2 x^2$ temos:

$$\bar{w} = \frac{q}{EI}\frac{1}{24}\ (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2 x^2)$$

$$\bar{w} = \frac{q}{EI}\left(\frac{(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)}{24}\right)$$

Que é a solução analítica, fato esse evidenciado no gráfico abaixo:



Exercício 2

Dado o funcional da energia potencial total para a flexão de uma viga

$$I_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - q\,w(x)\right] dx$$

Encontrar a solução aproximada para uma viga de vão L engastada em $x = 0$ e em $x = L$, ou seja, bi engastada, com carregamento constante, uniformemente distribuído, igual a q, e utilizando um só parâmetro. Dados:

E: é o modo de elasticidade;

I: o momento de Inércia da secção transversal da viga;

$\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2$: Energia Potencial de Deformação;

q. w(x): Energia potencial da carga atuante.

Solução Analítica

Pela teoria de *Euler-Bernoulli,* a equação que governa o problema de flexão de vigas é:

$$EI\frac{d^4u}{dx^4} = q(x)$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de Inércia da secção transversal e q(x) é o carregamento.

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \left(\frac{q(x)}{EI}\right)$$

Resolvemos a equação diferencial de 4ª ordem, utilizando integrações por variáveis separáveis.

$$\int \left(\frac{d^4u}{dx^4}\right) dx = \int \left(\frac{q(x)}{EI}\right) dx$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \left(\frac{q(x)x}{EI}\right) + c_1$$

$$\int \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) dx = \int \left(\frac{q(x)}{EI}x + c_1\right) dx$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{q(x)}{EI}.\frac{x^2}{2}\right) + c_1x + c_2$$

$$\int \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx = \int \left(\frac{q(x)}{EI}\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2\right) dx$$

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{q(x)}{EI}.\frac{x^3}{6}\right) + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

$$\int \left(\frac{du}{dx}\right) dx = \int \left(\frac{q(x)}{EI}\frac{x^3}{6} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3\right) dx$$

$$u(x) = \left(\frac{q(x)}{EI}.\frac{x^4}{24}\right) + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4$$

Usando as seguintes condições de contorno:

Bi Engastada: $\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ u'(L) = 0 \end{cases}$

Assim temos:

- $u(0) = 0$

$$u(0) = \left(\frac{q}{EI}.\frac{0^4}{24}\right) + c_1\frac{0^3}{6} + c_2\frac{0^2}{2} + c_3 0 + c_4 = 0$$

$$c_4 = 0$$

- $u(L) = 0$

$$u(L) = \left(\frac{q}{EI}.\frac{L^4}{24}\right) + c_1\frac{L^3}{6} + c_2\frac{L^2}{2} + c_3 L + c_4 = 0$$

$$\left(\frac{q}{EI}.\frac{L^4}{24}\right) + c_1\frac{L^3}{6} + c_2\frac{L^2}{2} = 0$$

$$\left(\frac{q}{EI}.\frac{L^4}{24}\right) + c_1\frac{L^3}{6} + \left(-\frac{q}{EI}.\frac{L^2}{6} - c_1\frac{L}{2}\right)\frac{L^2}{2} = 0$$

$$\left(\frac{q}{EI}.\frac{L^4}{24} - \frac{q}{EI}.\frac{L^4}{12}\right) + c_1\frac{L^3}{6} - c_1\frac{L^3}{4} = 0$$

$$c_1 = -\frac{L}{2}.\frac{q}{EI}$$

- $u'(0) = 0$

$$u'(0) = \left(\frac{q}{EI}.\frac{0^3}{6}\right) + c_1\frac{0^2}{2} + c_2 0 + c_3 = 0$$

$$c_3 = 0$$

- $u'(L) = 0$

$$u'(L) = \left(\frac{q}{EI}.\frac{L^3}{6}\right) + c_1\frac{L^2}{2} + c_2 L + c_3 = 0$$

$$\left(\frac{q}{EI}.\frac{L^3}{6}\right) + c_1\frac{L^2}{2} + c_2 L = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{L}\left(-\frac{q}{EI}.\frac{L^3}{6} - c_1\frac{L^2}{2}\right) = -\frac{q}{EI}.\frac{L^2}{6} - c_1\frac{L}{2}$$

$$c_2 = -\frac{q}{EI}.\frac{L^2}{6} - \left(-\frac{L}{2}.\frac{q}{EI}\right)\frac{L}{2}$$

$$c_2 = \frac{q}{EI}.\frac{L^2}{12}$$

Assim, a solução analítica para o referido problema é:

$$u(x) = \left(\frac{q}{EI}.\frac{x^4}{24}\right) + (-\frac{L}{2}.\frac{q}{EI})\ \frac{x^3}{6} + (\frac{q}{EI}.\frac{L^2}{12})\frac{x^2}{2} + 0x + 0$$

$$u(x) = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12}L + \frac{x^2}{24}L^2\right)$$

Solução Aproximada

Usando o método de Rayleigh-Ritz para resolução do problema, temos:

1ª Tentativa:

Fazendo $\bar{w} = \alpha x(x - L)$, tem-se: $\frac{d\bar{w}}{dx} = \alpha(2x - L)$, $\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = 2\alpha$.

Substituindo na expressão anterior:

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - q\ w\right] dx = \int_0^L [2EI\alpha^2 - q\alpha(x^2 - Lx)] dx$$

Integrando, temos:

$$\bar{I}_p = 2EI\alpha^2 x - q\alpha\frac{x^3}{3} + q\alpha L\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=L}$$

$$\bar{I}_p = 2EI\alpha^2 L - q\alpha\frac{L^3}{3} + q\alpha\frac{L^3}{2} = 2EI\alpha^2 L + q\alpha\frac{L^3}{6}$$

Usando a condição de extremização, $\frac{d\bar{I}_p}{d\alpha} = 0$, temos:

$$4EI\alpha L = -q\frac{L^3}{6} \rightarrow \alpha = -\frac{q}{EI}\frac{L^2}{24}$$

Substituindo $\alpha = -\frac{q}{EI}\frac{L^2}{24}$ em $\bar{w} = \alpha x(x - L)$, temos:

$$\overline{w} = -\frac{q}{EI}\frac{L^2}{24}x(x-L)$$

$$\overline{w} = \frac{q}{EI}\left(-x^2\frac{L^2}{24} + x\frac{L^3}{24}\right)$$

Que difere da solução analítica, pois:

$$\frac{\overline{w}}{u(x)} = \frac{\frac{q}{EI}\left(-x^2\frac{L^2}{24} + x\frac{L^3}{24}\right)}{\frac{q}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12}L + \frac{x^2}{24}L^2\right)} = \frac{\left(-x\frac{L^2}{24} + \frac{L^3}{24}\right)}{\left(\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{12}L + \frac{x}{24}L^2\right)}$$

2ª Tentativa:

Fazendo $\overline{w} = \alpha x^2(x-L)^2$, tem-se:

$\frac{d\overline{w}}{dx} = 4x^3\alpha - 6x^2\alpha L + 2x\alpha L^2$,

$\frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = 12x^2\alpha - 12x\alpha L + 2\alpha L^2$.

Substituindo na expressão anterior:

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - q\,w\right]dx = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(12x^2\alpha - 12x\alpha L + 2\alpha L^2)^2 - q\alpha x^2(x-L)^2\right]dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(144x^4\alpha^2 + 4\alpha^2L^4 - 48x\alpha^2L^3 + 192x^2\alpha^2L^2 - 288x^3\alpha^2L) - q\alpha x^4 + 2q\alpha x^3L - q\alpha x^2L^2\right]dx$$

$$\bar{I}_p = \int_0^L [EI(72x^4\alpha^2 + 2\alpha^2L^4 - 24x\alpha^2L^3 + 96x^2\alpha^2L^2 - 144x^3\alpha^2L) - q\alpha x^4 + 2q\alpha x^3L - q\alpha x^2L^2]dx$$

Integrando, temos:

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{72}{5}x^5\alpha^2 + 2x\alpha^2L^4 - \frac{24}{2}x^2\alpha^2L^3 + \frac{96}{3}x^3\alpha^2L^2 - \frac{144}{4}x^4\alpha^2L\right) - \frac{1}{5}q\alpha x^5 + \frac{2}{4}q\alpha x^4L - \frac{1}{3}q\alpha x^3L^2\Big|_{x=0}^{x=L}$$

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{72}{5}x^5\alpha^2 + 2x\alpha^2L^4 - 12x^2\alpha^2L^3 + 32x^3\alpha^2L^2 - 36x^4\alpha^2L\right) - \frac{1}{5}q\alpha x^5 + \frac{2}{4}q\alpha x^4L - \frac{1}{3}q\alpha x^3L^2\Big|_{x=0}^{x=L}$$

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{72}{5}L^5\alpha^2 + 2\alpha^2L^5 - 12\alpha^2L^5 + 32\alpha^2L^5 - 36\alpha^2L^5\right) - \frac{1}{5}q\alpha L^5 + \frac{2}{4}q\alpha L^5 - \frac{1}{3}q\alpha L^5$$

$$\bar{I}_p = EI\left(\frac{2}{5}L^5\right)\alpha^2 - \frac{1}{30}q\alpha L^5$$

Usando a condição de extremização, $\frac{d\bar{I_p}}{d\alpha} = 0$, temos:

$$EI\frac{4}{5}\alpha L^5 - \frac{1}{30}qL^5 \rightarrow \alpha = \frac{q}{EI}\frac{5}{120} = \frac{q}{24EI}$$

Substituindo $\alpha = \frac{q}{24EI}$ em $\bar{w} = \alpha x^2(x-L)^2$, temos:

$$\bar{w} = \frac{q}{24EI}x^2(x-L)^2$$

$$\bar{w} = \frac{q}{24EI}x^2(x^2 - 2xL + L^2)$$

$$\bar{w} = \frac{q}{EI}(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12}L + \frac{x^2}{24}L^2)$$

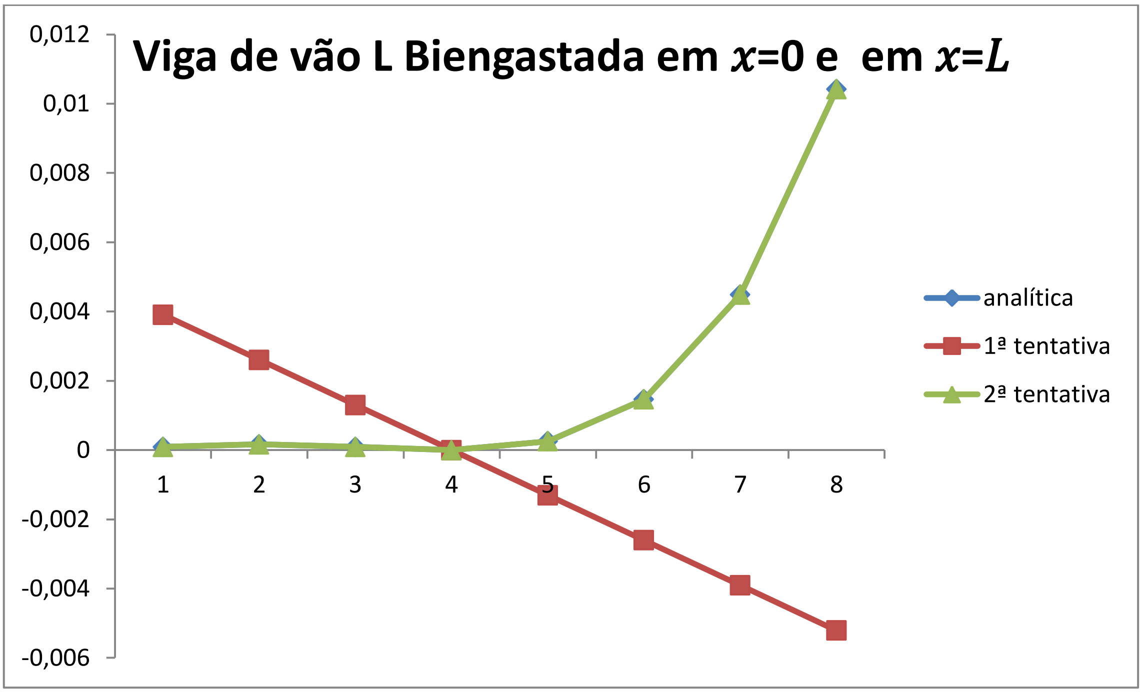
Que satisfaz a solução analítica.

Substituindo $x = \frac{L}{2}$, teremos:

$$\bar{w} = \frac{q}{EI}\left(\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^4}{24} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{12}L + \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{24}L^2\right)$$

$$\bar{w} = \frac{q}{EI}\left(\frac{L^4}{384} - \frac{L^4}{96} + \frac{L^4}{96}\right) = \frac{L^4}{384}\frac{q}{EI}$$

Dados esses comprovados pelo gráfico com os dados referentes à solução analítica e as duas tentativas de escolha da função Φ.



Viga de vão L Biengastada em x=0 e em x=L
0,012
0,01
0,008
0,006
0,004
0,002
0
-0,002
-0,004
-0,006
1
2
3
4
5
6
7
8
analítica
1ª tentativa
2ª tentativa