

4º Trabalho da disciplina

Resolver, utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF) a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \operatorname{sen} x = 0$$

Onde as condições de contorno são: $u(0) = 1$ e $\left. \frac{du}{dx} \right|_{\{x=\pi\}} = q(\pi) = 4$

Solução Analítica

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \sin x = 0$$

$$u'' = \sin x$$

$$\int u'' dx = \int \sin x dx \rightarrow u' = -\cos x + c_1$$

$$\int u' dx = \int (-\cos x + c_1) dx \rightarrow u = -\sin x + c_1 x + c_2$$

$$u(x) = -\sin x + c_1 x + c_2$$

$$u(0) = -\sin 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 = 1 \rightarrow c_2 = 1$$

$$u'(x) = -\cos x + c_1 \rightarrow u'(\pi) = -\cos \pi + c_1 = 4$$

$$c_1 = 4 - 1 = 3$$

$$u(x) = -\sin x + 3x + 1$$

Solução Aproximada

A forma fraca da equação de resíduos ponderados é:

$$\int_0^L \left(-\frac{dw_l}{dx} \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} + w_l \sin x \right) dx + \left[w_l \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0}^{x=L} = 0$$

Adotando o método de Galerkin $w_l = \Phi_l$, $1 \leq l$ e $m \leq M + 1$.

$$\int_0^L \left(-\frac{d\Phi_1}{dx} \cdot \sum_{m=1}^{M+1} u_m \frac{d\Phi_m}{dx} + \Phi_l \sin x \right) dx + \left(\Phi_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right)_{x=0}^{x=1} = 0$$

O sistema de equações resultantes pode ser escrita como: $Ku = f$.

$$\int_0^L \left(-\frac{d\Phi_1}{dx} \cdot \frac{d\Phi_m}{dx} \right) dx, 1 \leq l \text{ e } m \leq M + 1.$$

Os elementos do vetor f são:

$$f_1 = - \int_0^1 \Phi_l \cdot \sin x \, dx - \left[w_l \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0}^{x=1}, 1 \leq l \leq M + 1$$

A formação do sistema de equações será exemplificada considerando as contribuições de um elemento típico e , que contém os nós i e j , para a aproximação linear. Nesse caso, pode-se escrever:

$$\bar{u} = u_i \Phi_i + u_j \Phi_j, x_i \leq x \leq x_j$$

As funções Φ são as seguintes:

$$\Phi_i = \Phi_i^e = 1 - \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x_j - x}{h_e}$$

$$\Phi_j = \Phi_j^e = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_i}{h_e}$$

Onde, $h_e = x_j - x_i$.

Do ponto de vista global, as únicas funções não nulas no elemento e são as funções Φ_i e Φ_j ; consequentemente $\Phi_n = 0$ se $n \neq i$ ou $n \neq j$.

Assim:

$$k_{lm} = \sum_{e=1}^E k_{lm}^e, \text{ com } k_{lm} = 0 \text{ se } l, m \neq i, j.$$

Para exemplificar a formação da matriz $\mathbf{K}$, considere o domínio dividido em 2 subdomínios, ou elementos, de mesmo comprimento $h = \frac{1}{2}$. Nesse caso, pode-se escrever:

$$\bar{u} = u_1 \Phi_1 + u_2 \Phi_2$$

Com as funções Φ_n , $n = 1, 2, 3$.

Usando as funções de aproximação definidas localmente, temos:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \sum_{b=1}^B \int_{\tau} \bar{w}_l \varepsilon_{\tau} d\tau = 0$$

Para este caso particular, a matriz $\mathbf{K}$ é calculado como:

$$\int_0^L \left[- \begin{Bmatrix} \Phi'_1 \\ \Phi'_2 \\ \Phi'_3 \end{Bmatrix} [\Phi'_1 \quad \Phi'_2 \quad \Phi'_3] \right] dx$$

$$\int_0^L \begin{bmatrix} -\Phi'_1 \Phi'_1 & -\Phi'_1 \Phi'_2 & -\Phi'_1 \Phi'_3 \\ -\Phi'_2 \Phi'_1 & -\Phi'_2 \Phi'_2 & -\Phi'_2 \Phi'_3 \\ -\Phi'_3 \Phi'_1 & -\Phi'_3 \Phi'_2 & -\Phi'_3 \Phi'_3 \end{bmatrix} dx$$

De acordo com a definição das funções de aproximação. Tem-se:

$$\int_0^L \begin{bmatrix} -\Phi'_1 \Phi'_1 & -\Phi'_1 \Phi'_2 & -\Phi'_1 \Phi'_3 \\ -\Phi'_2 \Phi'_1 & -\Phi'_2 \Phi'_2 & -\Phi'_2 \Phi'_3 \\ -\Phi'_3 \Phi'_1 & -\Phi'_3 \Phi'_2 & -\Phi'_3 \Phi'_3 \end{bmatrix} dx$$

Após a integração, a matriz $\mathbf{K}$ global está formada diretamente.

$$\Phi_2 = \begin{cases} \Phi_2^1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, x_1 \leq x \leq x_2: \text{elemento 1} \\ \Phi_2^2 = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}, x_2 \leq x \leq x_3: \text{elemento 2} \end{cases}$$

Considerando as funções $\Phi_1 = \Phi_1^1$ e Φ_2^1 , definidas somente no elemento 1, observa-se que os elementos $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$, da matriz $\mathbf{K}$, são obtidos:

$$k_{11} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi'_1 \Phi'_1) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d\Phi_1}{dx} \cdot \frac{d\Phi_1}{dx} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{x_1 - x}{h} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_1}{h} \right) \right) dx$$

$$k_{12} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi'_1 \Phi'_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d\Phi_1}{dx} \cdot \frac{d\Phi_2}{dx} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{x_2 - x}{h} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_1}{h} \right) \right) dx$$

$$k_{21} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi'_2 \Phi'_1) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d\Phi_2}{dx} \cdot \frac{d\Phi_1}{dx} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{x_1 - x}{h} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_2}{h} \right) \right) dx$$

$$k_{22} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi'_2 \Phi'_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d\Phi_2}{dx} \cdot \frac{d\Phi_2}{dx} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{x_2 - x}{h} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_2}{h} \right) \right) dx$$

Os elementos $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$, formam a matriz K^1 relativa ao 1º elemento.

$$k_{22} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi'_2 \Phi'_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d\Phi_2}{dx} \cdot \frac{d\Phi_2}{dx} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{x_2 - x}{h} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_2}{h} \right) \right) dx$$

$$k_{23} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi'_2 \Phi'_3) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d\Phi_2}{dx} \cdot \frac{d\Phi_3}{dx} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{x_3 - x}{h} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_2}{h} \right) \right) dx$$

$$k_{32} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi'_3 \Phi'_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d\Phi_3}{dx} \cdot \frac{d\Phi_2}{dx} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{x_2 - x}{h} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_3}{h} \right) \right) dx$$

$$k_{33} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi'_3 \Phi'_3) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d\Phi_3}{dx} \cdot \frac{d\Phi_3}{dx} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{x_3 - x}{h} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_3}{h} \right) \right) dx$$

Os elementos $k_{22}, k_{23}, k_{32}, k_{33}$, formam a matriz K^2 relativa ao 2º elemento.

Fazendo algumas substituições $X = x - x_i$, tem-se $\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} = \frac{d\Phi}{dX}$ e $h = x_j - x_i$, reescreva:

$$k_{11} = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \cdot \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \right) dX = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} \right) dX = -\frac{X}{h^2} \Big|_{X=0}^{X=h} = -\frac{1}{h}$$

$$k_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dX} \left(\frac{h-X}{h} \right) \cdot \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \right) dX = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{(-1)}{h} \cdot \frac{1}{h} \right) dX = \frac{X}{h^2} \Big|_{X=0}^{X=h} = \frac{1}{h}$$

$$k_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dX} \left(\frac{h-X}{h} \right) \cdot \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \right) dX = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{(-1)}{h} \cdot \frac{1}{h} \right) dX = \frac{X}{h^2} \Big|_{X=0}^{X=h} = \frac{1}{h}$$

$$k_{22} = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \cdot \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \right) dX = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} \right) dX = -\frac{X}{h^2} \Big|_{X=0}^{X=h} = -\frac{1}{h}$$

E

$$k_{22} = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \cdot \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \right) dX = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} \right) dX = -\frac{X}{h^2} \Big|_{X=0}^{X=h} = -\frac{1}{h}$$

$$k_{23} = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dX} \left(\frac{h-X}{h} \right) \cdot \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \right) dX = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{(-1)}{h} \cdot \frac{1}{h} \right) dX = \frac{X}{h^2} \Big|_{X=0}^{X=h} = \frac{1}{h}$$

$$k_{32} = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dX} \left(\frac{h-X}{h} \right) \cdot \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \right) dX = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{(-1)}{h} \cdot \frac{1}{h} \right) dX = \frac{X}{h^2} \Big|_{X=0}^{X=h} = \frac{1}{h}$$

$$k_{33} = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \cdot \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \right) dX = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} \right) dX = -\frac{X}{h^2} \Big|_{X=0}^{X=h} = -\frac{1}{h}$$

Assim, pode-se escrever:

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{bmatrix}$$

Logo a matriz Global será:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & -\frac{2}{h} & \frac{1}{h} \\ 0 & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{bmatrix}$$

Substituindo $h = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi} & 0 \\ \frac{2}{\pi} & -\frac{4}{\pi} & \frac{2}{\pi} \\ 0 & \frac{2}{\pi} & -\frac{2}{\pi} \end{bmatrix}$$

Os elementos do vetor f podem ser calculados como segue:

$$f_i = \int_{x_{i-1}}^{x_j} \sin x \Phi_i^{i-1} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_j} \sin x \Phi_i^i dx = f_i^{i-1} + f_i^i, \text{ para } i = 2.$$

Para $i = 1$, a primeira integral à direita não deve ser considerada e $i = 3$, a segunda integral não deve ser considerada.

Se:

$$\Phi_i^{i-1} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \text{ e } \Phi_i^i = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}$$

Então as parcelas f_i^{i-1} e f_i^i , podem ser calculadas como segue:

f_i^{i-1} :

$$f_i^{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin x \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) dx$$

$$f_i^{i-1} = -\cos(x_i) + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \sin(x_i) - \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \sin(x_{i-1})$$

f_i^i :

$$f_i^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin x \left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \right) dx$$

$$f_i^i = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} (x_{i+1} \cdot \cos(x_i) - \sin x_{i+1} - x_i \cos x_i + \sin(x_i))$$

Particularizando para $i = 1, 2, 3$, e $x_{i+1} = \pi$, $x_i = \frac{\pi}{2}$ e $x_{i-1} = 0$

$$f_1 = f_1^1 = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} (x_{i+1} \cdot \cos(x_i) - \sin x_{i+1} - x_i \cos x_i + \sin(x_i))$$

$$f_1 = f_1^1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos(0) - \sin \frac{\pi}{2} - 0 \cdot \cos 0 + \sin 0 \right) = 1 - \frac{2}{\pi}$$

$$f_2 = f_2^1 + f_2^2 = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \sin(0) + \frac{1}{\pi - \frac{\pi}{2}} \left(\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin \pi - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$f_2 = f_2^1 + f_2^2 = \frac{4}{\pi}$$

$$f_3 = f_3^2 = -\cos(\pi) + \frac{1}{\pi - \frac{\pi}{2}} \sin(\pi) - \frac{1}{\pi - \frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}$$

Finalmente, considerando o termo oriundo da integração por partes, isto é, o termo:

$$\left[w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0}^{x=\pi} = w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=\pi} - w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=\pi} - \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0}$$

$$f = - \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{2}{\pi} - \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} \\ \frac{4}{\pi} \\ 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=\pi} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi} & 0 \\ \frac{2}{\pi} & -\frac{4}{\pi} & \frac{2}{\pi} \\ 0 & \frac{2}{\pi} & -\frac{2}{\pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} = - \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{2}{\pi} - \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} \\ \frac{4}{\pi} \\ 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=\pi} \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \bar{u}_2 = -1 + \frac{2}{\pi} + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} \\ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \bar{u}_2 + \frac{2}{\pi} \bar{u}_3 = \frac{4}{\pi} \\ \frac{2}{\pi} \bar{u}_2 - \frac{2}{\pi} \bar{u}_3 = -1 + \frac{2}{\pi} - \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=\pi} \end{cases}$$

Substituindo $\frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=\pi} = 4$

$$\begin{cases} -\frac{4}{\pi}\bar{u}_2 + \frac{2}{\pi}\bar{u}_3 = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi} \\ \frac{2}{\pi}\bar{u}_2 - \frac{2}{\pi}\bar{u}_3 = 1 + \frac{2}{\pi} - 4 \end{cases}$$

Substituindo:

$$\begin{cases} -1,27\bar{u}_2 + 0,64\bar{u}_3 = 0,64 \\ 0,64\bar{u}_2 - 0,64\bar{u}_3 = -3,64 \end{cases}$$

Assim temos que $\bar{u}_2 = 4,762$ e $\bar{u}_3 = 10,45$

Se compararmos com a analítica,

$$u(x) = -\sin x + 3x + 1$$

Os resultados são muito próximos.

