

4º Trabalho da disciplina

Resolver, utilizando o Método de Elementos de Contorno (MEC) a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0$$

Onde as condições de contorno são: $u(0) = 0$ e $u(3) = 1$

Solução Analítica

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0$$

$$t^2 - 1 = 0$$

$$t = \pm 1$$

$$u(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$u(0) = C_1 e^0 + C_2 e^{-0} = 0 \rightarrow C_1 = -C_2$$

$$u(3) = C_1 e^{1.3} + C_2 e^{-1.3} = 1 \rightarrow -C_2 e^3 + C_2 e^{-3} = 1$$

$$C_2(e^3 - e^{-3}) = -1 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{(e^3 - e^{-3})}$$

$$C_1 = \frac{1}{(e^3 - e^{-3})}$$

$$u(x) = \frac{1}{(e^3 - e^{-3})} e^x - \frac{1}{(e^3 - e^{-3})} e^{-x}$$

Solução Aproximada

$$u(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{(e^3 - e^{-3})} = \frac{2 \sinh x}{2 \sinh 3} = \frac{\sinh x}{\sinh 3}$$

A equação básica de resíduos ponderados, considerando o não atendimento das condições de contorno, é escrita como:

$$\int_0^L \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \bar{u} \right) w \, dx + (\bar{u} - \hat{u}) \bar{w}|_{x=0} + (\bar{u} - \hat{u}) \bar{w}|_{x=L} = 0$$

Integrando por partes duas vezes, temos:

$$\int_0^L \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} \right) w \, dx = \int_0^L \bar{u} \frac{d^2 w}{dx^2} \, dx + \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_0^L - \frac{d\bar{u}}{dx} \bar{u} \Big|_0^L$$

Substituindo na anterior, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\bar{u} \frac{d^2 w}{dx^2} - \bar{u} w \right) dx + \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_0^L - \frac{d\bar{u}}{dx} \bar{u} \Big|_0^L + (\bar{u} - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=0} + (\bar{u} - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=L} &= 0 \\ \int_0^L \bar{u} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - w \right) dx + \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_0^L - \frac{d\bar{u}}{dx} \bar{u} \Big|_0^L + (\bar{u} - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=0} + (\bar{u} - \hat{u}) \bar{w} \Big|_{x=L} &= 0 \\ \int_0^L \bar{u} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - w \right) dx + \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_{x=L} - \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_{x=0} - \frac{dw}{dx} \bar{u} \Big|_{x=L} + \frac{dw}{dx} \bar{u} \Big|_{x=0} + \bar{u} \bar{w} \Big|_{x=0} - \hat{u} \bar{w} \Big|_{x=0} + \bar{u} \bar{w} \Big|_{x=L} - \hat{u} \bar{w} \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned}$$

A escolha conveniente das funções de ponderação $\bar{w} = -\frac{dw}{dx}$ e $\bar{\bar{w}} = \frac{dw}{dx}$ pode simplificar a solução do problema. Fazendo:

$$\begin{aligned} \int_0^L \bar{u} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - w \right) dx + \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_{x=L} - \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_{x=0} - \frac{dw}{dx} \bar{u} \Big|_{x=L} + \frac{dw}{dx} \bar{u} \Big|_{x=0} - \bar{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + \hat{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + \bar{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} - \hat{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} &= 0 \\ \int_0^L \bar{u} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - w \right) dx + \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_{x=L} - \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_{x=0} + \hat{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} - \hat{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned}$$

A função de ponderação de w é a solução da equação:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - w = \delta(x - \xi), \text{ onde } \delta = \text{Delta de Dirac}$$

$$\int_0^L \delta(x - \xi) \bar{u} \, dx = \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_{x=0} - \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_{x=L} - \hat{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + \hat{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L}$$

Como, $\int_0^L \delta(x - \xi) \bar{u} \, dx = \bar{u}(\xi)$

$$\bar{u}(\xi) = \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_{x=0} - \frac{d\bar{u}}{dx} w \Big|_{x=L} - \hat{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} + \hat{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L}$$

$$\bar{u}(\xi) = -w \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0}^{x=L} + \hat{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0}^{x=L}$$

A equação acima é a equação do MEC correspondente à equação diferencial a ser resolvida. Usualmente, a função de ponderação w é representada como: $w = u * (\xi, x)$, e representa o efeito no *ponto campo*, x , devido a uma função delta de Dirac aplicado no *ponto fonte*, ξ , (o ponto x é

chamado de campo e o ponto ξ , é chamado de fonte). Além disso, são adotadas, também, as seguintes representações:

Fazendo:

$$\begin{aligned} w &= u * (\xi, x), \\ \bar{q}(x) &= \frac{d\bar{u}}{dx} \\ q * (\xi, x) &= \frac{du *}{dx} = \frac{dw}{dx} \end{aligned}$$

Substituindo na equação do MEC, temos:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi) &= -u * (\xi, x) \bar{q}(x) \Big|_{x=0}^{x=L} + \hat{u} \cdot q * (\xi, x) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ \bar{u}(\xi) &= \bar{q}(x) u * (\xi, x) \Big|_{x=0} - \bar{q}(x) u * (\xi, x) \Big|_{x=L} - \hat{u} q * (\xi, x) \Big|_{x=0} + \hat{u} \cdot q * (\xi, x) \Big|_{x=L} \end{aligned}$$

Dada a solução fundamental, $u * (\xi, x) = \frac{\sinh r}{2}$, onde $r = |x - \xi|$ é a distância entre os pontos campo e fonte. Para a determinação de $q * (\xi, x)$ deve-se tomar cuidado, verificando a posição relativa entre x e ξ . Assim:

➤ Quando $x \geq \xi$:

$$\begin{aligned} u * (\xi, x) &= \frac{\sinh(x - \xi)}{2} \\ q * (\xi, x) &= \frac{\cosh(x - \xi)}{2} \end{aligned}$$

➤ Quando $x \leq \xi$:

$$\begin{aligned} u * (\xi, x) &= \frac{\sinh(\xi - x)}{2} \\ q * (\xi, x) &= \frac{\cosh(\xi - x)}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\bar{u}(\xi) = \bar{q}(x) \frac{\sinh(\xi - x)}{2} \Big|_{x=0} - \bar{q}(x) \frac{\sinh(x - \xi)}{2} \Big|_{x=L} + \hat{u} \frac{\cosh(\xi - x)}{2} \Big|_{x=0} - \hat{u} \cdot \frac{\cosh(x - \xi)}{2} \Big|_{x=L}$$

Considerando os contornos:

$$\begin{aligned} \hat{u}(0) &= 0 \text{ e} \\ \hat{u}(L) &= L = 1 \end{aligned}$$

$$\bar{u}(\xi) = \bar{q}(0) \frac{\sin h(\xi)}{2} - \bar{q}(3) \frac{\sin h(3 - \xi)}{2} + \frac{\cos h(3 - \xi)}{2}$$

Para $\xi = 0$ e $\xi = 3$, juntamente com as condições de contorno.

➤ Para $\xi = 0$

$$\begin{aligned}\bar{u}(0) &= \bar{q}(0) \frac{\sin h(0)}{2} - \bar{q}(3) \frac{\sin h(3)}{2} + \frac{\cos h(3)}{2} = 0 \\ -\bar{q}(3) \frac{\sin h(3)}{2} &= -\frac{\cos h(3)}{2} \\ \bar{q}(3) &= \frac{\cos h(3)}{\sin h(3)}\end{aligned}$$

➤ Para $\xi = 3$

$$\begin{aligned}\bar{u}(3) &= \bar{q}(0) \frac{\sin h(3)}{2} - \bar{q}(3) \frac{\sin h(0)}{2} + \frac{\cos h(0)}{2} = 1 \\ \bar{q}(0) \frac{\sin h(3)}{2} &= 1 - \frac{1}{2} \\ \bar{q}(0) \frac{\sin h(3)}{2} &= \frac{1}{2} \\ \bar{q}(0) &= \frac{1}{\sin h(3)}\end{aligned}$$

Substituindo na igualdade acima,

$$\begin{aligned}\bar{u}(\xi) &= \frac{1}{\sin h(3)} \frac{\sin h(\xi)}{2} - \frac{\cos h(3)}{\sin h(3)} \frac{\sin h(3 - \xi)}{2} + \frac{\cos h(3 - \xi)}{2} \\ \bar{u}(\xi) &= \frac{\sin h(\xi) - \cos h(3) \cdot \sin h(3 - \xi) + \sin h(3) \cdot \cos h(3 - \xi)}{2 \sin h(3)}\end{aligned}$$

Utilizando as relações trigonométricas:

$$\sinh(3 \pm \xi) = \sinh 3 \cdot \cosh \xi \pm \sinh \xi \cdot \cosh 3$$

$$\cosh(3 \pm \xi) = \cosh 3 \cdot \cosh \xi \pm \sinh \xi \cdot \sinh 3$$

$$\cosh x^2 - \sinh x^2 = 1$$

Logo, temos:

$$\bar{u}(\xi) = \frac{\sin h(\xi) - \cos h(3) \cdot (\sinh 3 \cdot \cosh \xi - \sinh \xi \cdot \cosh 3) + \sin h(3) \cdot (\cosh 3 \cdot \cosh \xi - \sinh \xi \cdot \sinh 3)}{2 \sin h(3)}$$

$$\bar{u}(\xi) = \frac{\sin h(\xi) - \cos h 3 \cdot \sinh 3 \cdot \cosh \xi + \cosh 3 \cdot \sinh \xi \cdot \cosh 3 + \sin h 3 \cdot \cosh 3 \cdot \cosh \xi - \sinh 3 \sinh \xi \cdot \sinh 3}{2 \sin h(3)}$$

$$\bar{u}(\xi) = \frac{\sin h(\xi) + \cosh 3 \cdot \sinh \xi \cdot \cosh 3 - \sinh 3 \sinh \xi \cdot \sinh 3}{2 \sin h(3)}$$

$$\bar{u}(\xi) = \frac{\sin h(\xi) + \sinh \xi \cdot \cosh^2 3 - \sinh \xi \cdot \sinh^2 3}{2 \sin h(3)}$$

$$\bar{u}(\xi) = \frac{\sin h(\xi) + \sinh \xi (\cosh^2 3 - \sinh^2 3)}{2 \sin h(3)}$$

$$\bar{u}(\xi) = \frac{\sin h(\xi) + \sinh \xi \cdot (1)}{2 \sin h(3)}$$

$$\bar{u}(\xi) = \frac{2 \cdot \sin h(\xi)}{2 \sin h(3)} = \frac{\sin h(\xi)}{\sin h(3)}$$

Que coincide com a solução analítica apresentada no início do exercício.