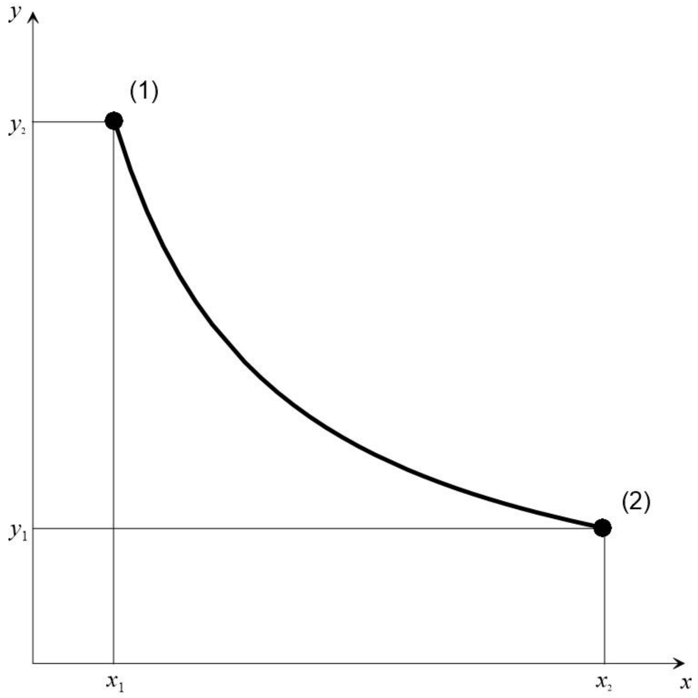
Cálculo Variacional

O Problema da Braquistócrona

Uma partícula cai do ponto (1) ao ponto (2), deslizando sem atrito sobre uma curva $y = y(x)$. Determinar a curva correspondente ao tempo mínimo de queda.



Solução:

O tempo de queda é: $I = \int_{(1)}^{(2)} dt$

A velocidade é dada por: $v = \frac{ds}{dt}$

com $s^2 = dx^2 + dy^2$, de onde vem: $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$

Pelo princípio da conservação da energia (admite-se um sistema conservativo):

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Portanto: $v = \sqrt{v_1^2 + 2g\left(y_1 - y\right)}$

Assim: $dt = \dfrac{ds}{v}$; então:

$$I = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}{\sqrt{v_1^2 + 2g\left(y_1 - y\right)}}\,dx \qquad (1)$$

Em (1), I é uma função especial, denominada *funcional*. O funcional do problema da braquistócrona depende de uma variável independente, *x*, de uma variável dependente, *y*, e de sua derivada primeira, y'.

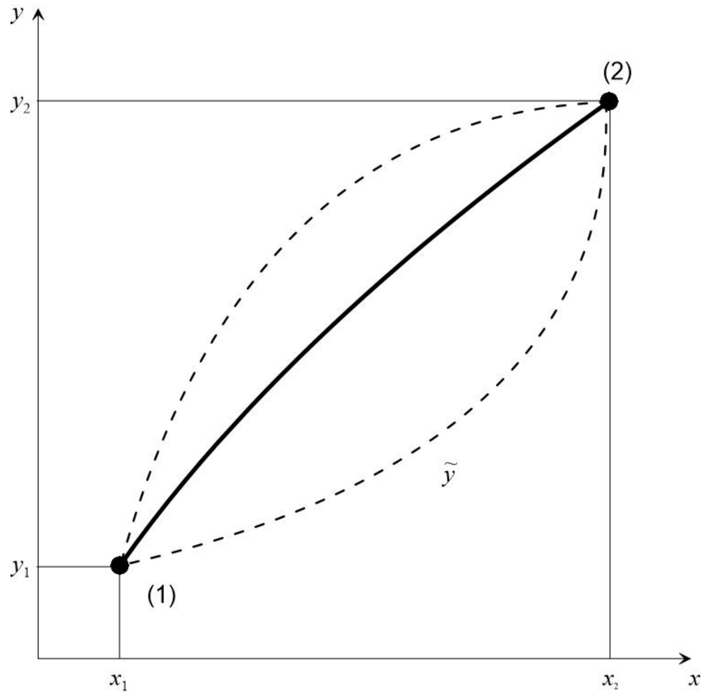
Genericamente:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y'\right) dx \qquad (2)$$

O problema, contudo, ainda não foi solucionado, pois a expressão de *y* não é conhecida. Esse é o problema do *Cálculo Variacional*, que consiste em determinar as funções que extremizam o funcional: para o problema da braquistócrona, a trajetória *y* que produz um tempo mínimo de queda. Essas funções são obtidas após serem estabelecidas as condições necessárias à extremização do funcional, seguindo um procedimento análogo ao da procura de pontos extremos de uma função.

Equação de Euler-Lagrange – Primeira Variação

O valor do funcional depende da função escolhida, função que corresponde ao caminho entre x_1 e x_2.



Admite-se a existência de um certo caminho, $y(x)$, que extremiza o funcional em relação aos caminhos vizinhos, ou variados, $\tilde{y}(x)$. Uma família de caminhos variados, dependentes de um parâmetro ε, é definida como:

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \tag{3}$$

onde $\eta(x)$ é uma função derivável, arbitrariamente escolhida, que se anula em x_1 e x_2, isto é: $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Note-se que, qualquer que seja a escolha de $\eta(x)$, quando $\varepsilon = 0$ os caminhos variados coincidem com o caminho extremizante.

Considerando os caminhos variados, o funcional

$$\tilde{I} = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}'\right) dx \tag{4}$$

tem o seu valor extremo dado por:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y'\right) dx \tag{5}$$

uma vez que, por hipótese, *y* extremiza o funcional.

Substituindo (3) em (4), tem-se:

$$\tilde{I} = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta'\right) dx \tag{6}$$

Em (6), o funcional está escrito como função do parâmetro ε. Analogamente ao caso de uma função $y = f(x)$, a condição necessária para que $\tilde{I}$ seja extremo em ε = 0 é dada por:

$$\left.\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{7}$$

De (6):

$$\left.\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{d\varepsilon} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \varepsilon} \right) dx \bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \eta' \right) dx \bigg|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{8}$$

Como em ε = 0 tem-se $\tilde{y} = y$ e $\tilde{y}' = y'$, a expressão (8) pode ser escrita como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0 \tag{9}$$

Efetuando integração por partes, elimina-se η':

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx \tag{10}$$

Note-se que o primeiro termo à direita é nulo, pois $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Substituindo (10) em (9):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0 \qquad (11)$$

Lema Fundamental do Cálculo das Variações

Se $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)dx = 0$

com $f(x)$ contínua e $\eta(x)$ continuamente derivável e anulando-se em x_1 e em x_2, então $f(x) = 0$ no intervalo considerado.

De (11), levando-se em conta o Lema Fundamental do Cálculo das Variações, tem-se que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \qquad (12)$$

que é a *Equação de Euler-Lagrange*, e é a condição a que y deve obedecer para que seja extremo do funcional.

Solução do Problema da Braquistócrona

O funcional:

$$I = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}{\sqrt{v_1^2 + 2g\left(y_1 - y\right)}}\, dx$$

pode ser particularizado, admitindo:

$v_1 = 0$

ponto (1) na origem

sentido do eixo y invertido

O funcional, agora, é escrito como:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} F(x, y, y')$$

Para a aplicação da equação de Euler-Lagrange, são calculados:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\left(-\frac{1}{2}\right) y^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\sqrt{y}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{y''}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\sqrt{y}} - \frac{\left(y'\right)^2 y''}{\left(1+\left(y'\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{y}} - \frac{\left(y'\right)^2}{2\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\, y^{\frac{3}{2}}}$$

Finalmente, obtém-se uma equação diferencial:

$$2yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

Para a solução da equação diferencial, faz-se uma mudança de variáveis:

$$y' = u$$

e, portanto,

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}y' = u\frac{du}{dy}$$

A equação é reescrita como:

$$2yu\frac{du}{dy} + u^2 + 1 = 0$$

ou:

$$2yudu + (u^2 + 1)dy = d\left[y(u^2 + 1)\right] = 0$$

Integrando:

$$y\left(1 + u^2\right) = y\left(1 + \left(y'\right)^2\right) = A$$

Resolvendo para y':

$$(y')^2 = \frac{A}{y} - 1$$

e, então:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{A - y}{y}}$$

Da equação anterior:

$$dx = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{A-y}}\,dy$$

e:

$$x = \int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{A-y}}\,dy + x_0$$

Fazendo: $y = A\,\text{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$

$$dy = 2A\,\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\frac{dt}{2} = A\,\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

e, então:

$$x = \int \frac{\sqrt{A}\,\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{A}\cos\left(\frac{t}{2}\right)} A\,\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt = A\int \text{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)dt + x_0$$

Como: $\text{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos t}{2}$

tem-se:

$$x = \frac{A}{2}\int (1-\cos t)\,dt + x_0$$

O resultado da integração é:

$$x = A\left(\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}\,t}{2}\right) + x_0$$

Para t = 0, x = 0, de onde vem: $x_0 = 0$.

Assim:

$$x = A\left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} t}{2}\right) = \frac{A}{2}\left(t - \operatorname{sen} t\right)$$

$$y = A\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{A}{2}\left(1 - \cos t\right)$$

As equações acima são as equações paramétricas da *ciclóide*.

Ciclóide é a curva descrita por um ponto de uma circunferência que rola, sem deslizar, sobre uma reta; *A* é o raio da circunferência.