O Método dos Elementos de Contorno

Soluções Fundamentais

Seja a equação diferencial linear não homogênea, válida para todo *x*, na qual não são impostas condições de contorno:

$$\mathcal{L}u(x) = f(x) \tag{1}$$

onde $\mathcal{L}(...)$ é um operador linear com coeficientes constantes.

Quando o termo $f(x)$ é substituído pelo delta de Dirac, $\delta(x - x')$, no qual x' é um parâmetro, a equação (1) é reescrita como:

$$\mathcal{L}u^*(x, x') = \delta(x - x') \tag{2}$$

A função $u^*(x, x')$, solução da equação (2), chama-se *solução fundamental* para o operador $\mathcal{L}(...)$ e representa o efeito, em *x*, de um delta que atua em x'. Para resolver (1), com o auxílio de (2), os termos à esquerda e à direita em (2) são inicialmente multiplicados por $f(x')$; em seguida, é efetuada a integração no domínio. Assim, tem-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}u^*(x, x') f(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x') dx' = f(x) \tag{3}$$

Trocando, em (3), a ordem dos operadores diferencial e integral, obtém-se:

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u^*(x, x') f(x') dx'\right] = f(x) \tag{4}$$

Comparando as equações (1) e (4), conclui-se que a solução da equação (1) pode ser escrita como:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u^*\left(x, x'\right) f(x') dx' \tag{5}$$

No Método dos Elementos de Contorno (MEC), a solução fundamental do operador $\mathcal{L}(...)$ é utilizada como a função de ponderação do resíduo no domínio. Para os resíduos no contorno, as funções de ponderação são escolhidas convenientemente, de maneira a simplificar o problema.

Para exemplificar a solução de uma equação diferencial com o MEC, seja a equação

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0$$

com as condições de contorno: $u(0) = \hat{u}(0) = 0$ e $\frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{d\hat{u}}{dx}\Big|_{x=1} = 1$.

Solução:

A equação básica de resíduos ponderados, considerando o não atendimento das condições de contorno, é escrita como:

$$\int_0^1 w\left(\frac{d^2\overline{u}}{dx^2} + \overline{u} + x\right)dx + \overline{w}\left(\overline{u} - \hat{u}\right)_{x=0} + \overline{\overline{w}}\left(\frac{d\overline{u}}{dx} - \frac{d\hat{u}}{dx}\right)_{x=1} = 0 \tag{6}$$

Integrando por partes duas vezes o termo que contém a derivada de segunda ordem em (6), tem-se:

$$\int_0^1 w\frac{d^2\overline{u}}{dx^2}dx = w\frac{d\overline{u}}{dx}\Big|_{x=0}^{x=1} - \overline{u}\,\frac{dw}{dx}\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \overline{u}\,\frac{d^2w}{dx^2}dx \tag{7}$$

Substituindo (7) em (6):

$$\int_0^1 \overline{u}\,\frac{d^2w}{dx^2}dx + \int_0^1 w\overline{u}dx + \int_0^1 wxdx + w\frac{d\overline{u}}{dx}\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{dw}{dx}\overline{u}\Big|_{x=0}^{x=1} + \overline{w}\left(\overline{u} - \hat{u}\right)_{x=0} + \overline{\overline{w}}\left(\frac{d\overline{u}}{dx} - \frac{d\hat{u}}{dx}\right)_{x=1} = 0 \tag{8}$$

A equação (8) ainda pode ser escrita como:

$$\int_0^1 \overline{u}\left(\frac{d^2w}{dx^2}+w\right)dx+\int_0^1 wxdx+$$
$$+w\frac{d\overline{u}}{dx}\Big|_{x=1}-w\frac{d\overline{u}}{dx}\Big|_{x=0}-\frac{dw}{dx}\overline{u}\Big|_{x=1}+\frac{dw}{dx}\overline{u}\Big|_{x=0}+$$
$$+\overline{w}\overline{u}\Big|_{x=0}-\overline{w}\hat{u}\Big|_{x=0}+\overline{\overline{w}}\frac{d\overline{u}}{dx}\Big|_{x=1}-\overline{\overline{w}}\frac{d\hat{u}}{dx}\Big|_{x=1}=0 \qquad (9)$$

A escolha conveniente das funções de ponderação $\overline{w}$ e $\overline{\overline{w}}$ pode simplificar a solução do problema. Fazendo:

$$\overline{w}=-\frac{dw}{dx} \quad \text{e} \quad \overline{\overline{w}}=-w$$

a equação (9) é reescrita como:

$$\int_0^1 \overline{u}\left(\frac{d^2w}{dx^2}+w\right)dx+\int_0^1 wxdx+$$
$$-w\frac{d\overline{u}}{dx}\Big|_{x=0}+w\frac{d\hat{u}}{dx}\Big|_{x=1}+\frac{dw}{dx}\hat{u}\Big|_{x=0}-\frac{dw}{dx}\overline{u}\Big|_{x=1}=0 \qquad (10)$$

A função de ponderação w é a solução da equação:

$$\frac{d^2w}{dx^2}+w=\delta(x-\xi) \qquad (11)$$

Substituindo (11) em (10):

$$\int_0^1 \overline{u}\,\delta(x-\xi)\,dx=-\int_0^1 wxdx+w\frac{d\overline{u}}{dx}\Big|_{x=0}-w\frac{d\hat{u}}{dx}\Big|_{x=1}-\frac{dw}{dx}\hat{u}\Big|_{x=0}+\frac{dw}{dx}\overline{u}\Big|_{x=1} \qquad (12)$$

Como:

$$\int_0^1 \overline{u}\,\delta(x-\xi)\,dx = \overline{u}(\xi) \tag{13}$$

pode-se escrever:

$$\overline{u}(\xi) = -\int_0^1 wx dx - w\frac{d\overline{u}}{dx}\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{dw}{dx}\overline{u}\Big|_{x=0}^{x=1} \tag{14}$$

A equação (14) é a equação do MEC correspondente à equação diferencial a ser resolvida. Usualmente, a função de ponderação *w* é representada como: $w = u^*(\xi{,}x)$, e representa o efeito no *ponto campo*, *x*, de um delta de Dirac aplicado no *ponto fonte*, ξ. Além disso, são adotadas, também, as seguintes representações:

$$\overline{\mathrm{q}} = \frac{d\overline{u}}{dx} \;\text{ e }\; q^*(\xi{,}x) = \frac{du^*}{dx} \tag{15}$$

A equação (14), então, utilizando a notação habitual do MEC, é reescrita como:

$$\overline{u}(\xi) = -\int_0^1 u^*(\xi{,}x)x dx - u^*(\xi{,}x)\,\overline{q}(x)\Big|_{x=0}^{x=1} + q^*(\xi{,}x)\,\overline{u}(x)\Big|_{x=0}^{x=1}\,. \tag{16}$$

Note-se que, embora a equação (16) tenha sido obtida com as condições de contorno $u(0) = \hat{u}(0) = 0$ e $\hat{q}(1) = 1$, para outras condições de contorno a mesma equação teria sido obtida; por isso, os termos prescritos já não são indicados nas equações (15) e (16).

Para o problema estudado,

$$u^*(\xi{,}x) = \frac{\mathrm{sen}\,r}{2} \tag{17}$$

Em (17), $r = |x - \xi|$ é a *distância* entre os pontos campo e fonte. Para a determinação de $q^*(\xi{,}x)$ deve-se tomar cuidado, verificando a posição relativa entre *x* e ξ. Assim:

$$\text{para } x > \xi: \; r = x - \xi, \; u^*(\xi{,}x) = \frac{\text{sen}(x-\xi)}{2} \;\; \text{e} \;\; q^*(\xi{,}x) = \frac{\cos(x-\xi)}{2} \tag{18}$$

e:

$$\text{para } x < \xi: \; r = \xi - x, \; u^*(\xi{,}x) = \frac{\text{sen}(\xi - x)}{2} \;\; \text{e} \;\; q^*(\xi{,}x) = -\frac{\cos(\xi - x)}{2} \tag{19}$$

Considerando as expressões de $u^*(\xi{,}x)$ e de $q^*(\xi{,}x)$, a equação (16) pode ser escrita como:

$$\overline{u}(\xi) = -\int_0^{\xi} \frac{\text{sen}(\xi - x)}{2} x dx - \int_{\xi}^{1} \frac{\text{sen}(x-\xi)}{2} x dx -$$

$$\frac{\text{sen}(1-\xi)}{2}\overline{q}(1) + \frac{\text{sen}(\xi - 0)}{2}\overline{q}(0) + \frac{\cos(1-\xi)}{2}\overline{u}(1) + \frac{\cos(\xi - 0)}{2}\overline{u}(0) \tag{20}$$

Uma vez que as condições de contorno são $u(0) = \hat{u}(0) = 0$ e $\frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{d\hat{u}}{dx}\Big|_{x=1} = 1$, as duas incógnitas do problema são $\overline{q}(0)$ e $\overline{u}(1)$. São necessárias, então, duas equações para a determinação das incógnitas. Essas equações são obtidas fazendo ξ = 0 e ξ = 1 na equação (16):

$$\overline{u}(0) = -\int_0^1 \frac{\text{sen}(x-0)}{2} x dx - \frac{\text{sen}(1-0)}{2}\overline{q}(1) + \frac{\text{sen}(0-0)}{2}\overline{q}(0) + \frac{\cos(1-0)}{2}\overline{u}(1) + \frac{\cos(0-0)}{2}\overline{u}(0) \tag{21}$$

$$\overline{u}(1) = -\int_0^1 \frac{\text{sen}(1-x)}{2} x dx - \frac{\text{sen}(1-1)}{2}\overline{q}(1) + \frac{\text{sen}(1-0)}{2}\overline{q}(0) + \frac{\cos(1-1)}{2}\overline{u}(1) + \frac{\cos(1-0)}{2}\overline{u}(0) \tag{22}$$

Levando em conta que:

$$\int_0^1 x\frac{\text{sen}x}{2}dx = \frac{-\cos 1 + \text{sen}1}{2}$$

e que:

$$\int_0^1 x\frac{\text{sen}(1-x)}{2}dx = \frac{1-\text{sen}1}{2}$$

então as equações (21) e (22) são escritas como:

$$\bar{u}(0) = -\frac{\text{sen}1}{2}\bar{q}(1) + \frac{\cos 1}{2}\bar{u}(1) + \frac{1}{2}\bar{u}(0) - \frac{(-\cos 1 + \text{sen}1)}{2} \tag{23}$$

$$\bar{u}(1) = +\frac{\text{sen}1}{2}\bar{q}(0) + \frac{1}{2}\bar{u}(1) + \frac{\cos 1}{2}\bar{u}(0) - \frac{(1-\text{sen}1)}{2} \tag{24}$$

Matricialmente, o sistema de equações é escrito como:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\cos 1}{2} \\ -\frac{\cos 1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}(0) \\ \bar{u}(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\text{sen}1}{2} \\ \frac{\text{sen}1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}(0) \\ \hat{q}(1) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{-\cos 1 + \text{sen}1}{2} \\ \frac{1-\text{sen}1}{2} \end{Bmatrix} \tag{25}$$

Rearranjando o sistema, com as incógnitas do lado esquerdo da equação:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\cos 1}{2} \\ -\frac{\text{sen}1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}(0) \\ \bar{u}(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\text{sen}1}{2} \\ \frac{\cos 1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{-\cos 1 + \text{sen}1}{2} \\ \frac{1-\text{sen}1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\cos 1}{2} - \text{sen}1 \\ \frac{\text{sen}1 - 1}{2} \end{Bmatrix} \tag{26}$$

Resolvendo o sistema, encontra-se:

$$\bar{q}(0) = \frac{2}{\cos 1} - 1 \tag{27}$$

$$\bar{u}(1) = \frac{2\text{sen}1}{\cos 1} - 1 \tag{28}$$

A solução analítica é: $u(x)=\dfrac{2\operatorname{sen}x}{\cos 1}-x$.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\cos 1}{2} \\ -\frac{\cos 1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(\phi) \\ u(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & -\frac{\operatorname{sen} 1}{2} \\ \frac{\operatorname{sen} 1}{2} & \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q(\phi) \\ q(1) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{(\operatorname{sen} 1 - \cos 1)}{2} \\ \frac{(1 - \operatorname{sen} 1)}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(\phi) &= \phi \\ q(1) &= 1 \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} \phi & -\frac{\cos 1}{2} \\ -\frac{\operatorname{sen} 1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q(\phi) \\ u(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\operatorname{sen} 1}{2} \\ \frac{\cos 1}{2} & \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{(\operatorname{sen} 1 - \cos 1)}{2} \\ \frac{(1 - \operatorname{sen} 1)}{2} \end{Bmatrix}$$

$$-\frac{\cos 1}{2} \times u(1) = -\frac{\operatorname{sen} 1}{2} - \frac{(\operatorname{sen} 1 - \cos 1)}{2} \Longrightarrow \boxed{u(1) = \frac{2 \operatorname{sen} 1}{\cos 1} - 1}$$

$$-\frac{\operatorname{sen} 1}{2} \times q(\phi) + \frac{1}{2}\left(\frac{2 \operatorname{sen} 1}{\cos 1} - 1\right) = -\frac{(1 - \operatorname{sen} 1)}{2}$$

$$\operatorname{sen} 1 \times q(\phi) = \frac{2 \operatorname{sen} 1}{\cos 1} - \cancel{1} + \cancel{1} - \operatorname{sen} 1 \Longrightarrow \boxed{q(\phi) = \frac{2}{\cos 1} - 1}$$

analítica:

$$\boxed{u = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos 1} - x}$$

$$u(\xi) = \frac{\cos(1-\xi)}{2} \times \left(\frac{2\,\mathrm{sen}\,1}{\cos 1} - 1 \right) + \cancel{\frac{\cos\xi}{2} \times \phi} - 1 \times \frac{\mathrm{sen}(1-\xi)}{2} + \left(\frac{2}{\cos 1} - 1 \right) \times \frac{\mathrm{sen}\,\xi}{2}$$

$$- \frac{(\xi - \mathrm{sen}\,\xi)}{2} - \frac{(\xi - \cos(1-\xi) + \mathrm{sen}(1-\xi))}{2}$$

$$u(\xi) = \frac{1}{2} \times \left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,1}{\cos 1} \times (\cos 1 \cos\xi + \mathrm{sen}\,1\,\mathrm{sen}\,\xi) - (\cancel{\cos 1 \cos\xi} + \cancel{\mathrm{sen}\,1\,\mathrm{sen}\,\xi}) - (\mathrm{sen}\,1 \cos\xi - \mathrm{sen}\,\xi \cos 1) + \frac{2}{\cos 1} \times \mathrm{sen}\,\xi - \cancel{\mathrm{sen}\,\xi} \right.$$

$$\left. - \xi + \cancel{\mathrm{sen}\,\xi} - \xi + \cancel{\cos 1 \cos\xi} + \cancel{\mathrm{sen}\,1\,\mathrm{sen}\,\xi} - \mathrm{sen}\,1 \cos\xi + \mathrm{sen}\,\xi \cos 1 \right]$$

$$u(\xi) = \frac{1}{2} \times \left[\cancel{2\,\mathrm{sen}\,1 \cos\xi} + \frac{2\,\mathrm{sen}^2 1\,\mathrm{sen}\,\xi}{\cos 1} - \cancel{2\,\mathrm{sen}\,1 \cos\xi} + 2\,\mathrm{sen}\,\xi \cos 1 + \frac{2\,\mathrm{sen}\,\xi}{\cos 1} - 2\xi \right]$$

$$u(\xi) = \frac{1}{2} \times \left[\frac{2\,\mathrm{sen}^2 1\,\mathrm{sen}\,\xi + 2\,\mathrm{sen}\,\xi \cos^2 1 + 2\,\mathrm{sen}\,\xi}{\cos 1} - 2\xi \right] = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4\,\mathrm{sen}\,\xi}{\cos 1} - 2\xi \right) = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\xi}{\cos 1} - \xi$$

$$u(\xi) = 1 \cdot \frac{\cos(1-\xi)}{2} + \phi \cdot \frac{\cos\xi}{2} - \left(\frac{2\cos 1}{\mathrm{sen}\,1} - 1\right) \cdot \frac{\mathrm{sen}(1-\xi)}{2} + \left(\frac{2}{\mathrm{sen}\,1} - 1\right) \cdot \frac{\mathrm{sen}\,\xi}{2}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\xi - \mathrm{sen}\,\xi + \xi \cdot - \cos(1-\xi) + \mathrm{sen}(1-\xi)\right)$$

$$2u(\xi) = \cos(1-\xi) - \frac{2\cos 1}{\mathrm{sen}\,1}\,\mathrm{sen}(1-\xi) + \cancel{\mathrm{sen}(1-\xi)} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,\xi}{\mathrm{sen}\,1} - \cancel{\mathrm{sen}\,\xi} - 2\xi + \cancel{\mathrm{sen}\,\xi} + \cos(1-\xi) - \cancel{\mathrm{sen}(1-\xi)}$$

$$= 2\cos(1-\xi) - \frac{2\cos 1}{\mathrm{sen}\,1}\,\mathrm{sen}(1-\xi) + \frac{2\,\mathrm{sen}\,\xi}{\mathrm{sen}\,1} - 2\xi$$

$$u(\phi) = \phi$$
$$u(1) = 1$$

$$u(\xi) = \cos 1 \cos\xi + \mathrm{sen}\,1\,\mathrm{sen}\,\xi - \frac{\cos 1}{\mathrm{sen}\,1} \cdot \left(\mathrm{sen}\,1 \cos\xi - \mathrm{sen}\,\xi \cos 1\right) + \frac{\mathrm{sen}\,\xi}{\mathrm{sen}\,1} - \xi$$

$$= \frac{\cos 1 \cdot \cancel{\cos\xi} \cdot \mathrm{sen}\,1 + \mathrm{sen}^2 1 \cdot \mathrm{sen}\,\xi - \cos 1 \cdot \cancel{\mathrm{sen}\,1}\,\mathrm{sen}\,\xi + \mathrm{sen}\,\xi \cdot \cos^2 1 + \mathrm{sen}\,\xi}{\mathrm{sen}\,1} - \xi$$

$$= \frac{\mathrm{sen}\,\xi\left(\mathrm{sen}^2 1 + \cos^2 1\right) + \mathrm{sen}\,\xi}{\mathrm{sen}\,1} - \xi$$

$$\boxed{u(\xi) = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\xi}{\mathrm{sen}\,1} - \xi}$$

Resolver a equação diferencial com as condições de contorno:
$u(0) = \hat{u}(0) = 0$ e $u(1) = \hat{u}(1) = 1$

Solução:

Pode-se partir da equação (25), reescrita abaixo, já com as novas condições de contorno:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\cos 1}{2} \\ -\frac{\cos 1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}(0) \\ \hat{u}(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\mathrm{sen}1}{2} \\ \frac{\mathrm{sen}1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{q}(0) \\ \overline{q}(1) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{-\cos 1 + \mathrm{sen}1}{2} \\ \frac{1 - \mathrm{sen}1}{2} \end{Bmatrix} \tag{29}$$

Mantendo os termos conhecidos à direita da igualdade, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\mathrm{sen}1}{2} \\ \frac{\mathrm{sen}1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{q}(0) \\ \overline{q}(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\cos 1}{2} \\ -\frac{\cos 1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}(0) \\ \hat{u}(1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{-\cos 1 + \mathrm{sen}1}{2} \\ \frac{1 - \mathrm{sen}1}{2} \end{Bmatrix} \tag{30}$$

Substituindo os valores das condições de contorno e efetuando as multiplicações indicadas, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} -\frac{\mathrm{sen}1}{2}\overline{q}(1) \\ \frac{\mathrm{sen}1}{2}\overline{q}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-2\cos 1 + \mathrm{sen}1}{2} \\ \frac{2 - \mathrm{sen}1}{2} \end{Bmatrix} \tag{31}$$

Finalmente:

$$\overline{q}(0) = \frac{2}{\mathrm{sen}1} - 1 \tag{32}$$

$$\overline{q}(1) = \frac{2\cos 1}{\mathrm{sen}1} - 1 \tag{33}$$

Da solução analítica: $u(x)=\dfrac{2\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}1}-x$, obtém-se: $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2\cos x}{\operatorname{sen}1}-1$.

O resultado para um ponto ξ, $0<\xi<1$, é obtido após a substituição das condições de contorno e de (32) e (33) na equação (20), reescrita novamente abaixo:

$$\bar{u}(\xi)=-\int_0^\xi \frac{\operatorname{sen}(\xi-x)}{2}x\,dx-\int_\xi^1 \frac{\operatorname{sen}(x-\xi)}{2}x\,dx-$$

$$\frac{\operatorname{sen}(1-\xi)}{2}\bar{q}(1)+\frac{\operatorname{sen}(\xi-0)}{2}\bar{q}(0)+\frac{\cos(1-\xi)}{2}\bar{u}(1)+\frac{\cos(\xi-0)}{2}\bar{u}(0) \qquad (20)$$

As integrais de domínio são:

$$\int_0^\xi \frac{\operatorname{sen}(\xi-x)}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\left(\xi-\operatorname{sen}\xi\right) \qquad (34)$$

$$\int_\xi^1 \frac{\operatorname{sen}(x-\xi)}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\left(\xi-\cos(1-\xi)+\operatorname{sen}(1-\xi)\right) \qquad (35)$$

Tem-se, então:

$$\bar{u}(\xi)=\frac{\operatorname{sen}(1-\xi)}{2}\left(\frac{2\cos 1}{\operatorname{sen}1}-1\right)+\frac{\operatorname{sen}(\xi-0)}{2}\left(\frac{2}{\operatorname{sen}1}-1\right)+\frac{\cos(1-\xi)}{2}1+\frac{\cos(\xi-0)}{2}0-$$

$$\frac{1}{2}\left(\xi-\operatorname{sen}\xi+\xi-\cos(1-\xi)+\operatorname{sen}(1-\xi)\right) \qquad (36)$$

Os passos dados para se obter a expressão final estão incluídos abaixo:

$$\bar{u}(\xi)=\frac{1}{2}\left[\cos(1-\xi)-\frac{2\cos 1}{\operatorname{sen}1}\operatorname{sen}(1-\xi)+\operatorname{sen}(1-\xi)+2\frac{\operatorname{sen}\xi}{\operatorname{sen}1}-\operatorname{sen}\xi-2\xi+\operatorname{sen}\xi+\cos(1-\xi)-\operatorname{sen}(1-\xi)\right]$$

$$\bar{u}(\xi)=\frac{1}{2}\left[2\cos(1-\xi)-\frac{2\cos 1}{\operatorname{sen}1}\left(\operatorname{sen}1\cos\xi-\operatorname{sen}\xi\cos 1\right)+2\frac{\operatorname{sen}\xi}{\operatorname{sen}1}-2\xi\right]$$

$$\bar{u}(\xi) = \frac{1}{2}\left[2\cos 1\cos\xi + 2\operatorname{sen}1\operatorname{sen}\xi - \frac{2\cos 1\cos\xi\operatorname{sen}1 + 2\cos^2 1\operatorname{sen}\xi}{\operatorname{sen}1} + 2\frac{\operatorname{sen}\xi}{\operatorname{sen}1} - 2\xi\right]$$

$$\bar{u}(\xi) = \frac{1}{2}\left[\frac{2\cos 1\cos\xi\operatorname{sen}1 + 2\operatorname{sen}^2 1\operatorname{sen}\xi - 2\cos 1\cos\xi\operatorname{sen}1 + 2\cos^2 1\operatorname{sen}\xi + 2\operatorname{sen}\xi}{\operatorname{sen}1} - 2\xi\right]$$

$$\bar{u}(\xi) = \frac{1}{2}\left[\frac{2\operatorname{sen}\xi\left(\operatorname{sen}^2 1 + \cos^2 1\right) + 2\operatorname{sen}\xi}{\operatorname{sen}1} - 2\xi\right]$$

$$\bar{u}(\xi) = \frac{2\operatorname{sen}\xi}{\operatorname{sen}1} - \xi = u(\xi)$$

Geralmente o sistema de equações do MEC é representado como:

$$\boldsymbol{Hu} = \boldsymbol{Gq} + \boldsymbol{f}$$

Resolver a equação:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$$

com as condições de contorno:

$u(0) = 0$

$u(3) = 1$

utilizando o MEC. A solução fundamental é: $u^*(\xi, x) = \dfrac{\operatorname{senh}|x - \xi|}{2}$.