

O Método dos Elementos Finitos

A idéia básica do Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em subdividir, inicialmente, o domínio do problema em subdomínios de dimensões finitas, de tal maneira que o conjunto dos subdomínios seja igual ao domínio original. Em seguida, sobre cada subdomínio, isoladamente, adota-se um comportamento aproximado, LOCAL, para as incógnitas do problema. Em geral, esse comportamento local é descrito com o emprego de funções simples. A característica principal desse procedimento, isto é, do MEF, é a utilização de aproximações locais nos subdomínios nos quais o domínio original foi dividido, em vez de utilizar aproximações de caráter global. Para a obtenção de respostas cada vez melhores aumenta-se o número de subdomínios, mantendo o mesmo comportamento local, já adotado, em cada novo subdomínio, no lugar de se adotar funções de ordem maior na aproximação de caráter global. Os subdomínios são denominados *elementos finitos*.

Os elementos finitos são definidos por sua forma geométrica, pelas funções de aproximação adotadas e pelos tipos de problemas para os quais foram desenvolvidos. Cada elemento possui um determinado número de pontos nodais, ou *nós*, que podem ser internos ou externos. Os externos fazem a conexão com os elementos vizinhos. Nesses nós comuns a diferentes elementos, o valor das variáveis do problema é o mesmo, independentemente do elemento que esteja sendo considerado.

Após a definição da malha de elementos finitos e do tipo de elemento, as matrizes características correspondentes a cada elemento são formadas e, em seguida, agrupadas, formando um sistema global de equações. A solução desse sistema fornece os valores das incógnitas nos pontos nodais. Através do comportamento aproximado local, em qualquer ponto de elemento as variáveis do problema são determinadas em função dos valores nodais dessas mesmas variáveis: as aproximações locais são funções de interpolação.

O trabalho de Turner, Clough, Martin e Topp: *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, publicado em 1956 no Journal of Aeronautical Sciences, vol. 23, págs. 805-823, é reconhecido como um dos primeiros a apresentar o fundamento do método dos elementos finitos.

As bases teóricas do método foram mais bem definidas no início da década de 60 com o estudo mais aprofundado dos métodos energéticos e das técnicas variacionais. Para problemas de mecânica dos sólidos, podem ser identificadas quatro formulações, ou modelos, que pertencem ao “enfoque variacional”:

a) *modelo computacional*: baseia-se no princípio da energia potencial mínima. Sobre cada elemento adota-se um campo de deslocamentos, escolhida de tal maneira que haja continuidade de deslocamentos e, eventualmente, de suas derivadas entre os elementos. As incógnitas são os deslocamentos nos pontos nodais.

b) *modelo de equilíbrio*: baseia-se no princípio da energia complementar mínima. Sobre cada elemento adota-se um campo de tensões em equilíbrio; o equilíbrio entre elementos também é mantido. As incógnitas são as tensões nos pontos nodais. É um modelo pouco utilizado na prática.

c) *modelo híbrido*: há dois tipos. O primeiro tipo se baseia em um princípio de energia complementar mínima modificado. No interior de cada elemento é adotado um campo de tensões em equilíbrio e, no contorno de cada elemento, um campo de deslocamentos é adotado, devendo haver compatibilidade de deslocamentos entre elementos vizinhos. As incógnitas são os deslocamentos nodais. Aplicações práticas: problemas de estado plano e de flexão de placas. O segundo tipo se baseia em um princípio de energia potencial mínima modificado. No interior de cada elemento é adotado um campo de deslocamentos e, no contorno de cada elemento, um campo de tensões é adotado, devendo haver equilíbrio de tensões (forças de superfície) entre elementos vizinhos. As incógnitas são as tensões, ou forças de superfície, nos pontos nodais. Este modelo é pouco utilizado na prática. Vantagem do modelo híbrido: os resultados são mais precisos.

d) *modelo misto*: baseia-se em um princípio variacional generalizado, como o princípio de Reissner. Sobre cada elemento são adotados, simultânea e independentemente, campos de tensões e de deslocamentos. As incógnitas são as tensões (ou forças de superfície) e os deslocamentos nos pontos nodais. Vantagem do modelo misto: deslocamentos e tensões são calculados com a mesma precisão.

No final da década de 70 foram introduzidas formulações baseadas na aplicação localizada do método de Galerkin, o que possibilitou que o método dos elementos finitos fosse empregado na solução de problemas que não possuíam formulação variacional. De uma maneira geral, qualquer um dos métodos de resíduos ponderados pode ser utilizado.

O Método dos Resíduos Ponderados

Se o domínio Ω é dividido em E subdomínios Ω_e , tais que:

$$\Omega = \sum_{e=1}^E \Omega_e \quad (1)$$

e se, em correspondência à divisão do domínio, o contorno Γ é dividido em B partes, tais que:

$$\Gamma = \sum_{b=1}^B \Gamma_b \quad (2)$$

então a equação de resíduos ponderados, de caráter global, na qual as funções de aproximação são válidas em Ω e em Γ :

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (3)$$

é substituída por:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \sum_{b=1}^B \int_{\Gamma_b} \bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (4)$$

Em (4) as funções de aproximação são definidas *localmente*, isto é, são válidas somente em Ω_e e em Γ_b , ao contrário de (3), com as funções de aproximação sendo válidas em Ω e em Γ .

Se as integrais em (4) contêm derivadas de ordem s nos integrandos, deve-se assegurar que as funções de aproximação tenham derivadas de ordem $(s - 1)$ contínuas.

Formulação Fraca e o Método de Galerkin

Dada a equação:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0$$

com $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$, a *forma fraca* da equação de resíduos ponderados é:

$$\int_0^1 \left(-\frac{dw_l}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} + w_l \bar{u} + w_l x \right) dx + \left[w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \quad (5)$$

Da equação (5) observa-se que $\bar{u}$, ou as funções de aproximação Φ_i que formam a solução aproximada, e w_l devem ter derivadas de ordem zero contínuas, isto é, $\bar{u}$ devem ser contínuas. Na forma básica da equação de resíduos ponderados é requerida uma continuidade das derivadas de primeira ordem.

Um conjunto de $(M + 1)$ pontos é escolhido no domínio, isto é, no intervalo $[0,1]$, e uma aproximação do tipo:

$$\bar{u} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \Phi_m \quad (6)$$

é adotada, onde u_m é o valor aproximado de u no nó m . Assim, as condições de contorno essenciais podem ser atendidas diretamente, especificando-se os valores nodais apropriados e fazendo, consequentemente, $\varepsilon_T = 0$. Na prática, esses valores conhecidos são introduzidos na etapa de solução do sistema de equações, ou seja, no processo de formação do sistema de equações, todos os valores u_1, u_2, u_M, u_{M+1} são considerados incógnitas.

Adotando o método de Galerkin, tem-se que:

$$w_l = \Phi_l, \quad 1 \leq l, m \leq M + 1$$

e a equação (5) é reescrita como:

$$\int_0^1 \left(-\frac{d\Phi_l}{dx} \sum_{m=1}^{M+1} u_m \frac{d\Phi_m}{dx} + \Phi_l \sum_{m=1}^{M+1} u_m \Phi_m + \Phi_l x \right) dx + \left[\Phi_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \quad (7)$$

O sistema de equações resultante pode ser escrito como:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{f} \quad (8)$$

Os elementos da matriz $\mathbf{K}$ são dados por:

$$k_{lm} = \int_0^1 \left(-\frac{d\Phi_l}{dx} \frac{d\Phi_m}{dx} + \Phi_l \Phi_m \right) dx, \quad 1 \leq l, m \leq M+1 \quad (9)$$

Os elementos do vetor $\mathbf{f}$ são:

$$f_l = -\int_0^1 \Phi_l x dx - \left[w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0}^{x=1}, \quad 1 \leq l \leq M+1 \quad (10)$$

A formação do sistema de equações (8) será exemplificada considerando as contribuições de um elemento típico e , que contém os nós i e j , para uma aproximação linear. Neste caso, pode-se escrever:

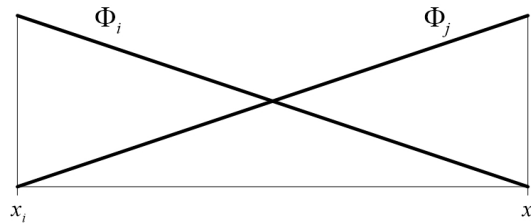
$$\bar{u} = u_i \Phi_i + u_j \Phi_j, \quad x_i \leq x \leq x_j \quad (11)$$

As funções Φ são as seguintes:

$$\Phi_i = \Phi_i^e = 1 - \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x_j - x}{h_e} \quad (12)$$

$$\Phi_j = \Phi_j^e = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_i}{h_e} \quad (13)$$

com $h_e = x_j - x_i$.



Do ponto de vista global, as únicas funções não-nulas no elemento e são as funções Φ_i e Φ_j ; consequentemente, tem-se que:

$$\Phi_n = 0 \text{ se } n \neq i \text{ ou se } n \neq j$$

Note-se que, da equação (4), pode-se escrever:

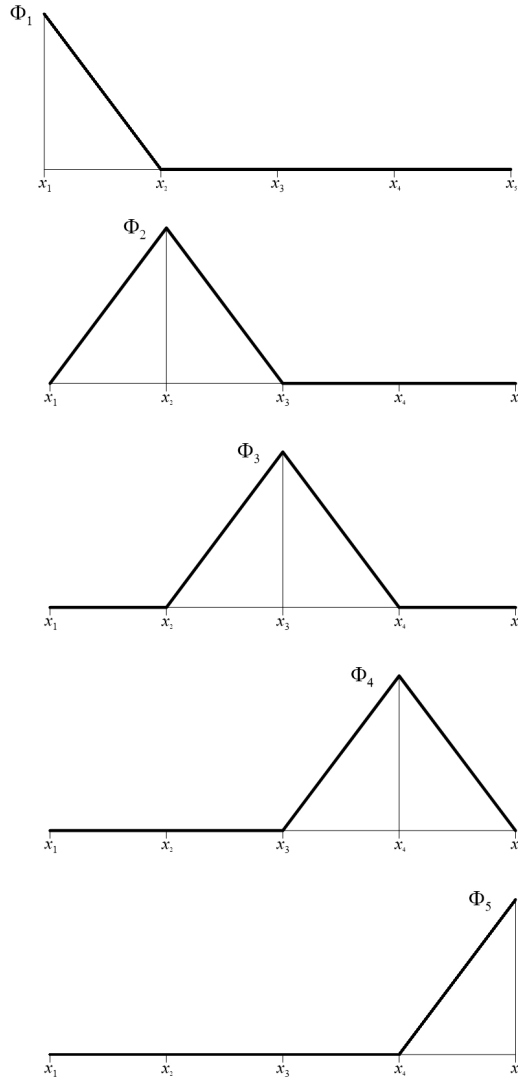
$$k_{lm} = \sum_{e=1}^E k_{lm}^e \quad (14)$$

com $k_{lm} = 0$ se $l, m \neq i, j$.

Para exemplificar a formação da matriz $\mathbf{K}$, considere-se o domínio dividido em quatro subdomínios, ou elementos, de mesmo comprimento $h=1/4$. Neste caso, pode-se escrever:

$$\bar{u} = u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + u_3\Phi_3 + u_4\Phi_4 + u_5\Phi_5 \quad (15)$$

com as funções Φ_n , $n = 1, 2, 3, 4, 5$ representadas como funções “chapéu”:



Para este caso particular, partindo da equação (9), a matriz $\mathbf{K}$ é calculada como:

$$\int_0^1 \left[- \begin{Bmatrix} \Phi_1' \\ \Phi_2' \\ \Phi_3' \\ \Phi_4' \\ \Phi_5' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & \Phi_5 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & \Phi_5 \end{bmatrix} \right] dx \quad (16)$$

Efetuada as multiplicações, obtém-se:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} (-\Phi_1'\Phi_1' + \Phi_1\Phi_1) & (-\Phi_1'\Phi_2' + \Phi_1\Phi_2) & (-\Phi_1'\Phi_3' + \Phi_1\Phi_3) & (-\Phi_1'\Phi_4' + \Phi_1\Phi_4) & (-\Phi_1'\Phi_5' + \Phi_1\Phi_5) \\ (-\Phi_2'\Phi_1' + \Phi_2\Phi_1) & (-\Phi_2'\Phi_2' + \Phi_2\Phi_2) & (-\Phi_2'\Phi_3' + \Phi_2\Phi_3) & (-\Phi_2'\Phi_4' + \Phi_2\Phi_4) & (-\Phi_2'\Phi_5' + \Phi_2\Phi_5) \\ (-\Phi_3'\Phi_1' + \Phi_3\Phi_1) & (-\Phi_3'\Phi_2' + \Phi_3\Phi_2) & (-\Phi_3'\Phi_3' + \Phi_3\Phi_3) & (-\Phi_3'\Phi_4' + \Phi_3\Phi_4) & (-\Phi_3'\Phi_5' + \Phi_3\Phi_5) \\ (-\Phi_4'\Phi_1' + \Phi_4\Phi_1) & (-\Phi_4'\Phi_2' + \Phi_4\Phi_2) & (-\Phi_4'\Phi_3' + \Phi_4\Phi_3) & (-\Phi_4'\Phi_4' + \Phi_4\Phi_4) & (-\Phi_4'\Phi_5' + \Phi_4\Phi_5) \\ (-\Phi_5'\Phi_1' + \Phi_5\Phi_1) & (-\Phi_5'\Phi_2' + \Phi_5\Phi_2) & (-\Phi_5'\Phi_3' + \Phi_5\Phi_3) & (-\Phi_5'\Phi_4' + \Phi_5\Phi_4) & (-\Phi_5'\Phi_5' + \Phi_5\Phi_5) \end{bmatrix} dx \quad (17)$$

De acordo com a definição das funções de aproximação, tem-se:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} (-\Phi_1'\Phi_1' + \Phi_1\Phi_1) & (-\Phi_1'\Phi_2' + \Phi_1\Phi_2) & 0 & 0 & 0 \\ (-\Phi_2'\Phi_1' + \Phi_2\Phi_1) & (-\Phi_2'\Phi_2' + \Phi_2\Phi_2) & (-\Phi_2'\Phi_3' + \Phi_2\Phi_3) & 0 & 0 \\ 0 & (-\Phi_3'\Phi_2' + \Phi_3\Phi_2) & (-\Phi_3'\Phi_3' + \Phi_3\Phi_3) & (-\Phi_3'\Phi_4' + \Phi_3\Phi_4) & 0 \\ 0 & 0 & (-\Phi_4'\Phi_3' + \Phi_4\Phi_3) & (-\Phi_4'\Phi_4' + \Phi_4\Phi_4) & (-\Phi_4'\Phi_5' + \Phi_4\Phi_5) \\ 0 & 0 & 0 & (-\Phi_5'\Phi_4' + \Phi_5\Phi_4) & (-\Phi_5'\Phi_5' + \Phi_5\Phi_5) \end{bmatrix} dx \quad (18)$$

Após a integração, a matriz $\mathbf{K}$ global está formada diretamente.

A matriz $\mathbf{K}$ poderia ser formada considerando as *contribuições dos elementos*, utilizando as funções de aproximação em (12) e (13). Assim, pode-se observar que, com exceção das funções Φ_1 e Φ_5 , todas as outras funções Φ são constituídas por duas partes: uma no elemento anterior (à esquerda) e outra no elemento posterior (à direita) ao nó considerado. Assim, por exemplo, a função Φ_2 pode ser representada como:

$$\Phi_2 = \begin{cases} \Phi_2^1 = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1 \leq x \leq x_2 : \text{elemento 1} \\ \Phi_2^2 = \frac{x_3-x}{x_3-x_2}, & x_2 \leq x \leq x_3 : \text{elemento 2} \end{cases} \quad (19)$$

Considerando as funções $\Phi_1 = \Phi_1^1$ e Φ_2^1 , definidas somente no elemento 1, observa-se que os elementos $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ da matriz $\mathbf{K}$ em (18) são obtidos como segue:

$$k_{11} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi_1^1 \Phi_1^1 + \Phi_1^1 \Phi_1^1) dx \quad (20)$$

$$k_{12} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi_1^1 \Phi_2^1 + \Phi_1^1 \Phi_2^1) dx \quad (21)$$

$$k_{21} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi_2^1 \Phi_1^1 + \Phi_2^1 \Phi_1^1) dx \quad (22)$$

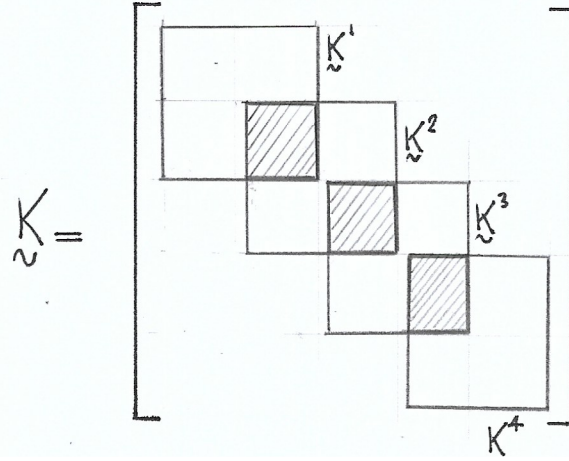
$$k_{22} = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi_2^1 \Phi_2^1 + \Phi_2^1 \Phi_2^1) dx \quad (23)$$

Em (20) – (22) a integração é restrita somente ao elemento considerado e pode-se considerar os elementos $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ formam uma matriz $\mathbf{K}^1$ relativa ao primeiro elemento. O mesmo procedimento poderia ser seguido para os demais elementos. Assim, relativamente ao segundo elemento, os elementos $k_{22}, k_{23}, k_{32}, k_{33}$ seriam obtidos com a integração restrita somente ao segundo elemento, isto é, para $x_2 \leq x \leq x_3$ e formariam uma matriz $\mathbf{K}^2$, e assim por diante. Note-se que os elementos k_{22} provenientes da integração sobre o elemento 1 devem ser somados aos elementos k_{22} provenientes da integração sobre o segundo elemento:

$$\int_0^1 (-\Phi_2^1 \Phi_2^1 + \Phi_2^1 \Phi_2^1) dx = \int_{x_1}^{x_2} (-\Phi_2^1 \Phi_2^1 + \Phi_2^1 \Phi_2^1) dx + \int_{x_2}^{x_3} (-\Phi_2^2 \Phi_2^2 + \Phi_2^2 \Phi_2^2) dx \quad (24)$$

Do ponto de vista computacional, é mais conveniente trabalhar com os elementos e calcular suas contribuições para a formação da matriz $\mathbf{K}$ global. Se os elementos têm mesmo comprimento, uma única matriz $\mathbf{K}^e$, $e = 1, 2, 3, 4$ necessita ser formada e, na formação da matriz global $\mathbf{K}$, os elementos das matrizes $\mathbf{K}^e$ são dispostos convenientemente em $\mathbf{K}$.

Esquematicamente:



Para o cálculo dos elementos da matriz de um elemento e : $x_i \leq x \leq x_j$:

$$k_{ij}^e = k_{ji}^e = \int_{x_i}^{x_j} \left(-\frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} + \Phi_i \Phi_j \right) dx = \int_{x_i}^{x_j} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{x_j - x}{h} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_i}{h} \right) + \left(\frac{x_j - x}{h} \right) \left(\frac{x - x_i}{h} \right) \right) dx \quad (25)$$

com $h = x_j - x_i$.

Fazendo $X = x - x_i$, tem-se $dX = dx$ e $\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{dX} \frac{dX}{dx} = \frac{d\Phi}{dX}$. A integral em (25) é reescrita

como:

$$\begin{aligned} k_{ij}^e = k_{ji}^e &= \int_0^h \left(-\frac{d\Phi_i}{dX} \frac{d\Phi_j}{dX} + \Phi_i \Phi_j \right) dX = \int_0^h \left(-\frac{d}{dX} \left(\frac{h-X}{h} \right) \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) + \left(\frac{h-X}{h} \right) \left(\frac{X}{h} \right) \right) dX = \\ &= \int_0^h \left(-\frac{(-1)}{h} \frac{1}{h} + \frac{X}{h} - \frac{X^2}{h^2} \right) dX = \left(\frac{X}{h^2} + \frac{X^2}{2h} - \frac{X^3}{3h^2} \right) \Big|_{X=0}^{X=h} = \frac{1}{h} + \frac{h}{2} - \frac{h}{3} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$k_{ij}^e = k_{ji}^e = \frac{1}{h} + \frac{h}{6} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
k_{ii}^e &= \int_{x_i}^{x_j} \left(-\frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_i}{dx} + \Phi_i \Phi_i \right) dx = \int_{x_i}^{x_j} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{x_j - x}{h} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{x_j - x}{h} \right) + \left(\frac{x_j - x}{h} \right) \left(\frac{x_j - x}{h} \right) \right) dx = \\
&= \int_0^h \left(-\frac{d}{dX} \left(\frac{h - X}{h} \right) \frac{d}{dX} \left(\frac{h - X}{h} \right) + \left(\frac{h - X}{h} \right) \left(\frac{h - X}{h} \right) \right) dX = \int_0^h \left(-\frac{(-1)}{h} \frac{(-1)}{h} + 1 - 2\frac{X}{h} + \frac{X^2}{h^2} \right) dX = \\
&= \left(-\frac{X}{h^2} + X - 2\frac{X^2}{2h} + \frac{X^3}{3h^2} \right)_{X=0}^{X=h} = -\frac{1}{h} + h - h + \frac{h}{3}
\end{aligned}$$

Assim:

$$k_{ii}^e = -\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
k_{jj}^e &= \int_{x_i}^{x_j} \left(-\frac{d\Phi_j}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} + \Phi_j \Phi_j \right) dx = \int_{x_i}^{x_j} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_i}{h} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_i}{h} \right) + \left(\frac{x - x_i}{h} \right) \left(\frac{x - x_i}{h} \right) \right) dx = \\
&= \int_0^h \left(-\frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h} \right) + \left(\frac{X}{h} \right) \left(\frac{X}{h} \right) \right) dX = \int_0^h \left(-\frac{1}{h} \frac{1}{h} + \frac{X^2}{h^2} \right) dX = \left(-\frac{X}{h^2} + \frac{X^3}{3h^2} \right)_{X=0}^{X=h} = -\frac{1}{h} + \frac{h}{3}
\end{aligned} \quad (28)$$

Assim, pode-se escrever:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) \\ \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (29)$$

A matriz global é:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & 2\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & 2\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & 2\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (30)$$

Substituindo $h = \frac{1}{4}$ em (30):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\frac{47}{12} & \frac{97}{24} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{97}{24} & -\frac{194}{24} & \frac{97}{24} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{97}{24} & -\frac{194}{24} & \frac{97}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{97}{24} & -\frac{194}{24} & \frac{97}{24} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{97}{24} & -\frac{47}{12} \end{bmatrix} \quad (31)$$