

Se a solução aproximada $\bar{u}$, definida como em (5), não atende as condições de contorno, então o resíduo ε_Γ também deve ser ponderado no contorno e a equação de resíduos ponderados deve ser escrita como:

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N \quad (26)$$

O sistema de equações gerado pela equação (26) também pode ser representado como:

$$K\alpha = f \quad (27)$$

e, agora

$$k_{ln} = \int_{\Omega} w_l \mathcal{L}(\Phi_n) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l \mathcal{S}(\Phi_n) d\Gamma \quad (28)$$

e

$$f_l = \int_{\Omega} w_l b d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l g d\Gamma \quad (29)$$

Exemplo:

Resolver a equação

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0$$

com $u(0) = 0$, $u(1) = 1$

utilizando uma solução aproximada que não atende às condições de contorno do problema, como o método de Galerkin.

Solução: O erro $\varepsilon|_{\Gamma}$ tem duas parcelas e é dado por:

$$\varepsilon|_{\Gamma, x=0} = (\bar{u} - 0)|_{x=0} \quad (30)$$

$$\varepsilon|_{\Gamma, x=1} = (\bar{u} - 1)|_{x=1} \quad (31)$$

A equação de resíduos ponderados é:

$$\int_0^1 w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega + [\bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma}]|_{x=0} + [\bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma}]|_{x=1} = 0 \quad (32)$$

Pode-se adotar:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i, \quad \Phi_i = x^{i-1}, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

Se $n = 3$, então:

$$\bar{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

e

$$\varepsilon_{\Omega} = 2\alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + x = \begin{bmatrix} 1 & x & (x^2 + 2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} + x \quad (35)$$

Adotando $\bar{w}_l = -w_l$, a equação de resíduos ponderados é escrita como:

$$\int_0^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & (x^2 + 2) \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} + \int_0^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix} x dx -$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix} \left[\begin{matrix} 1 & x & x^2 \end{matrix} \right] \Big|_{x=0} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix} \left[\begin{matrix} 1 & x & x^2 \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} - 1 \Big|_{x=1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

ou:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & x & (x^2+2) \\ x & x^2 & x(x^2+2) \\ x^2 & x^3 & x^2(x^2+2) \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} + \int_0^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix} x dx -$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Integrando e agrupando termos semelhantes:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{13}{15} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{3}{4} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{4} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Resolvendo:

$$\alpha_1 = -0,209174$$

$$\alpha_2 = 1,950459$$

$$\alpha_3 = -0,550459$$

e:

$$\bar{u} = -0,209174 + 1,950459x - 0,550459x^2 \quad (40)$$

Se $n = 4$, então:

$$\bar{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

e

$$\varepsilon_{\Omega} = 2\alpha_3 + 6\alpha_4 x + \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + x = \begin{bmatrix} 1 & x & (x^2 + 2) & (6x + x^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} + x \quad (42)$$

Adotando $\bar{w}_l = -w_l$, tem-se:

$$\int_0^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & (x^2 + 2) & (x^3 + 6x) \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} + \int_0^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} x dx -$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \Big|_{x=0} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \Big|_{x=1} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} - 1 \Big|_{x=1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

ou:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & x & (x^2+2) & (x^3+6x) \\ x & x^2 & (x^3+2x) & (x^4+6x^2) \\ x^2 & x^3 & (x^4+2x^2) & (x^5+6x^3) \\ x^3 & x^4 & (x^5+2x^3) & (x^6+6x^4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} + \int_0^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} x dx - \\
& \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} [1 \ 1 \ 1 \ 1] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (44)
\end{aligned}$$

Integrando e agrupando termos semelhantes:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{3} & \frac{13}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & \frac{11}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{13}{15} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{23}{14} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right\} \quad (45)
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{6}{5} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{3}{4} & -\frac{2}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{3} & \frac{9}{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{4} \\ -\frac{6}{5} \end{Bmatrix} \quad (46)
\end{aligned}$$

Resolvendo:

$$\alpha_1 = -0,258065$$

$$\alpha_2 = 2,089672$$

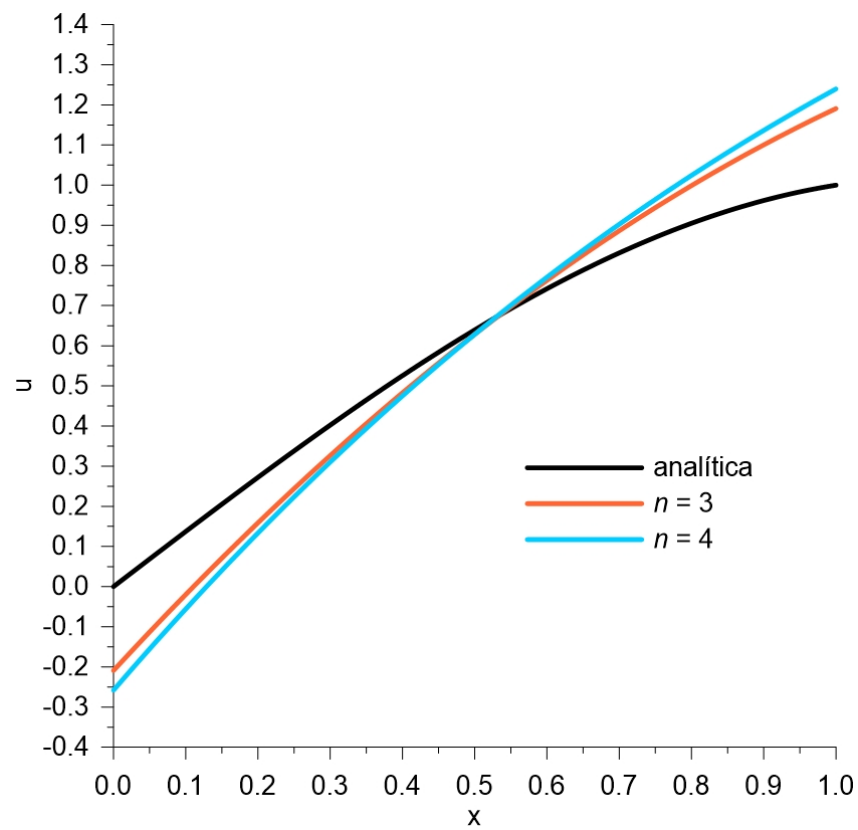
$$\alpha_3 = -0,674756$$

$$\alpha_4 = 0,082865$$

e:

$$\bar{u} = -0,258065 + 2,089672x - 0,674756x^2 + 0,082865x^3 \quad (47)$$

Graficamente:



Comparação entre a solução analítica e as soluções aproximadas com $\bar{w}_l = -w_l$.

Outra opção: adotar $\bar{w}_l = w_l$.

Para $n = 3$, a versão da equação (38) é:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{13}{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

O sistema de equações é:

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{10}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{9}{4} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{4} & \frac{28}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} \end{Bmatrix} \quad (49)$$

e:

$$\alpha_1 = 0,152203$$

$$\alpha_2 = 1,275033$$

$$\alpha_3 = -0,560748$$

com:

$$\bar{u} = 0,152203 + 1,275033x - 0,560748x^2 \quad (50)$$

Se $n = 4$, tem-se:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{3} & \frac{13}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & \frac{11}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{13}{5} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{23}{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (51)$$

O sistema de equações é:

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{10}{3} & \frac{17}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{9}{4} & \frac{16}{5} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{4} & \frac{28}{5} & \frac{8}{3} \\ \frac{5}{4} & \frac{6}{5} & \frac{5}{3} & \frac{37}{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

com a solução dada por:

$$\alpha_1 = 0,175518$$

$$\alpha_2 = 1,256065$$

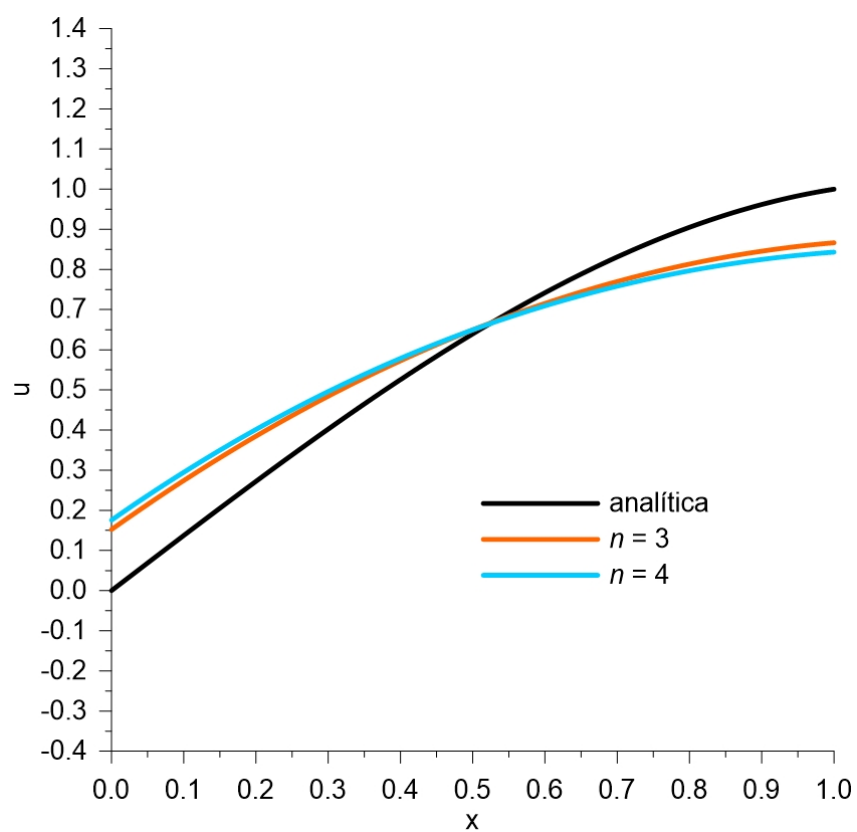
$$\alpha_3 = -0,643735$$

$$\alpha_4 = 0,055325$$

e:

$$\bar{u} = 0,175518 + 1,256065x - 0,643735x^2 + 0,055325x^3 \quad (53)$$

Graficamente:



Comparação entre a solução analítica e as soluções aproximadas com $\bar{w}_l = w_l$.

Se o problema estudado apresentar condições de contorno naturais, a avaliação das integrais

$$\int_{\Gamma} \bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma$$

que aparecem na equação (26) pode apresentar dificuldades se o contorno Γ é descrito por funções não lineares. Neste caso, o termo que contém o operador $\mathcal{L}(\cdot)$ na integral de ε_{Ω} na equação (26):

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} w_l (\mathcal{L}(\bar{u}) - b) d\Omega$$

pode ser integrado por partes e reescrito como:

$$\int_{\Omega} w_l \mathcal{L}(\bar{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{C}(w_l) \mathcal{D}(\bar{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} w_l \mathcal{E}(\bar{u}) d\Gamma \quad (54)$$

onde $\mathcal{C}(\cdot)$, $\mathcal{D}(\cdot)$ e $\mathcal{E}(\cdot)$ são operadores lineares de ordem inferior à do operador $\mathcal{L}(\cdot)$. Substituindo (54) em (26), tem-se:

$$\int_{\Omega} \mathcal{C}(w_l) \mathcal{D}(\bar{u}) d\Omega - \int_{\Omega} w_l b d\Omega + \int_{\Gamma} [\bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma} + w_l \mathcal{E}(\bar{u})] = 0 \quad (55)$$

A equação (55) é denominada, usualmente, *forma fraca* da equação de resíduos ponderados.

Na integral de contorno em (55) é possível eliminar a integral que contém as condições de contorno naturais mediante uma escolha apropriada da função de ponderação $\bar{w}_l$.

Exemplo:

Resolver a equação

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0$$

com $u(0) = 0$, $\frac{du}{dx}\big|_{x=1} = 1$. Adotar o método de Galerkin com $\Phi_i = x^i$, $i = 1, 2, 3 \dots$

Solução: Para as funções de forma indicadas,

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i \quad (56)$$

A equação de resíduos ponderados, equação (26), é:

$$\int_0^1 w_l \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \bar{u} + x \right) dx + \bar{w}_l \left(\frac{d\bar{u}}{dx} - 1 \right) \bigg|_{x=1} = 0 \quad (57)$$

Note-se que a condição de contorno em $x = 0$ é automaticamente satisfeita devido à escolha da função de forma.

Integrando por partes o termo que contém $\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2}$, encontra-se:

$$\int_0^1 w_l \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} dx = w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \bigg|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{dw_l}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} dx \quad (58)$$

Substituindo (58) em (57):

$$-\int_0^1 \frac{dw_l}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} dx + \int_0^1 w_l \bar{u} dx + \int_0^1 w_l x dx + w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \bigg|_{x=1} - w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \bigg|_{x=0} + \bar{w}_l \left(\frac{d\bar{u}}{dx} - 1 \right) \bigg|_{x=1} = 0 \quad (59)$$

Fazendo $\bar{w}_l = -w_l$, como $w_l|_{x=0} = 0$, a equação (59) se reduz a:

$$-\int_0^1 \frac{dw_l}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} dx + \int_0^1 w_l \bar{u} dx + \int_0^1 w_l x dx + w_l|_{x=1} = 0 \quad (60)$$

Adotando $n = 2$:

$$\bar{u} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = \begin{bmatrix} x & x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (61)$$

e

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 2x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Pelo método de Galerkin:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ x^2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2x \end{Bmatrix} \quad (63)$$

A equação de resíduos ponderados é:

$$-\int_0^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2x \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} + \int_0^1 \begin{Bmatrix} x \\ x^2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x & x^2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} + \int_0^1 \begin{Bmatrix} x \\ x^2 \end{Bmatrix} x dx + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

Agrupando termos semelhantes:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} (x^2 - 1) & (x^3 - 2x) \\ (x^3 - 2x) & (x^4 - 4x^2) \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (65)$$

Integrando:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{17}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{4} \end{Bmatrix} \quad (66)$$

Resolvendo:

$$\alpha_1 = \frac{413}{139}$$

$$\alpha_2 = -\frac{120}{139}$$

Assim:

$$\bar{u} = \frac{413}{139}x - \frac{120}{139}x^2. \quad (67)$$

e

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{413}{139} - \frac{240}{139}x \quad (68)$$

$$\text{com } \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{173}{139} = 1,244604.$$

Adotando $n = 3$:

$$\bar{u} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (69)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (70)$$

e

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} \quad (70)$$

$$\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{Bmatrix} \quad (71)$$

A equação de resíduos ponderados é escrita como:

$$-\int_0^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} + \int_0^1 \begin{Bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} + \int_0^1 \begin{Bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} x dx + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (72)$$

Agrupando os termos semelhantes na equação (72), obtém-se:

$$-\int_0^1 \begin{bmatrix} (x^2-1) & (x^3-2x) & (x^4-3x^2) \\ (x^3-2x) & (x^4-4x^2) & (x^5-6x^3) \\ (x^4-3x^2) & (x^5-6x^3) & (x^6-9x^4) \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} + \int_0^1 \begin{Bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} x dx + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (73)$$

Após o cálculo das integrais, o sistema de equações é:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{17}{15} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{3} & \frac{58}{35} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{6}{5} \end{Bmatrix} \quad (74)$$

Após a solução do sistema de equações, encontra-se:

$$\alpha_1 = 2,714125$$

$$\alpha_2 = -0,067530$$

$$\alpha_3 = -0,531795$$

e, assim:

$$\bar{u} = 2,714125x - 0,06753x^2 - 0,531795x^3 \quad (75)$$

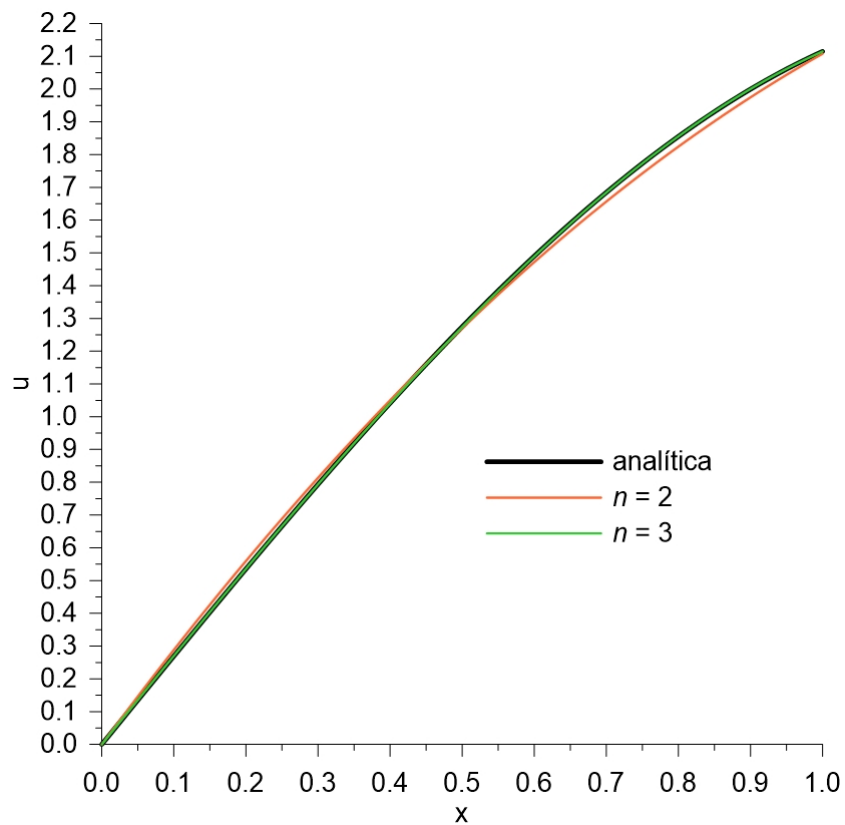
com:

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = 2,714125 - 0,13596x - 1,595385x^2 \quad (76)$$

Em $x = 1$:

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dx} \right|_{x=1} = 0,98368$$

Graficamente:



Comparação entre a solução analítica e as soluções aproximadas.