Problemas com a variável tempo

1.Sistema massa-mola sujeito à ação de uma força dependente do tempo

O problema é descrito pela equação:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p(t) \tag{1.1}$$

com $t \geq 0$ e:

m é a massa,
c é o coeficiente de amortecimento e
k é a rigidez da mola.

A força $p(t)$ pode ter uma variação qualquer no tempo.

As condições iniciais são:

$$u(0)=u_0 \tag{1.2}$$

$$\frac{du}{dt}\Big|_{t=0}=\dot{u}_0 \tag{1.3}$$

A solução analítica é dada por:

$$u(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos\omega_d t+\frac{\dot{u}_0+\zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d t\right]+$$

$$\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t p(\tau)\,e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\operatorname{sen}\omega_d(t-\tau)\,d\tau \tag{1.4}$$

com:

$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ é a frequência natural do sistema,

$\zeta = \dfrac{c}{2m\omega_n}$

$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}$

Para resolver o problema com diferenças finitas, são feitas as substituições:

$$\ddot{u}_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta t^2} \tag{1.5}$$

e

$$\dot{u}_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta t} \tag{1.6}$$

O índice j refere-se ao tempo $t_j = j\Delta t$ e Δt é o passo ou incremento de tempo.

A versão discretizada da equação diferencial, após a substituição das derivadas pelas suas aproximações é escrita como:

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right) u_{j+1} = p_j^* \tag{1.7}$$

com:

$$p_j^* = p_j - \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2} \right) u_j - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) u_{j-1} \tag{1.8}$$

Para j = 0,1,2,...os valores de u_{j+1} são obtidos sucessivamente a partir dos valores já conhecidos de u_j, u_{j-1}, além de p_j que é sempre conhecido. O processo de marcha no tempo tem início com $j = 0$. Porém, com $j = 0$ aparece o termo u_{-1}, que corresponde a $u(-\Delta t)$, ou seja, a um valor fora do domínio. Das fórmulas de aproximação (1.5) e (1.6), pode-se escrever:

$$\ddot{u}_0 = \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{\Delta t^2} \tag{1.9}$$

e

$$\dot{u}_0 = \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta t} \tag{1.10}$$

Da equação (1.10) obtém-se:

$$u_1 = 2\Delta t\dot{u}_0 + u_{-1} \tag{1.11}$$

Substituindo a expressão acima na equação (1.9), pode-se escrever:

$$\ddot{u}_0 = \frac{2\Delta t\dot{u}_0 + u_{-1} - 2u_0 + u_{-1}}{\Delta t^2} \tag{1.12}$$

Resolvendo para u_{-1}:

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t\dot{u}_0 + \frac{1}{2}\Delta t^2\ddot{u}_0 \tag{1.13}$$

Os valores de u_0 e de $\dot{u}_0$ são conhecidos a partir das condições iniciais e, da própria equação diferencial pode-se determinar o valor de $\ddot{u}_0$:

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} \tag{1.14}$$

2. Equação da difusão

A equação da difusão é escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{, } D \text{ é constante} \tag{2.1}$$

e pode representar tanto o fenômeno da *transferência* de massa como da *transferência* de calor; D representa o coeficiente de difusão e será admitido constante. Para a obtenção da versão discretizada da equação da difusão, deve-se considerar um ponto $x_i = i\Delta x$ e um tempo $t_j = j\Delta t$. Assim, tem-se:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x_i, t_j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} \tag{2.2}$$

e

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_i, t_j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{2.3}$$

A versão discretizada é:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = D\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{2.4}$$

Resolvendo para $u_{i,j+1}$:

$$u_{i,j+1} = ru_{i+1,j} + \left(1 - 2r\right)u_{i,j} + ru_{i-1,j} \tag{2.5}$$

com:

$$r = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \tag{2.6}$$

Uma fórmula do tipo da (2.5), na qual os valores no tempo t_{j+1} são obtidos diretamente dos valores conhecidos nos instantes anteriores é denominada *explícita*.

Exemplo:

Resolver a equação da difusão no domínio $0 \le x \le L$, com a condição inicial:

$$u_0(x) = \frac{2}{L}x \text{ , para } 0 \le x \le L/2$$

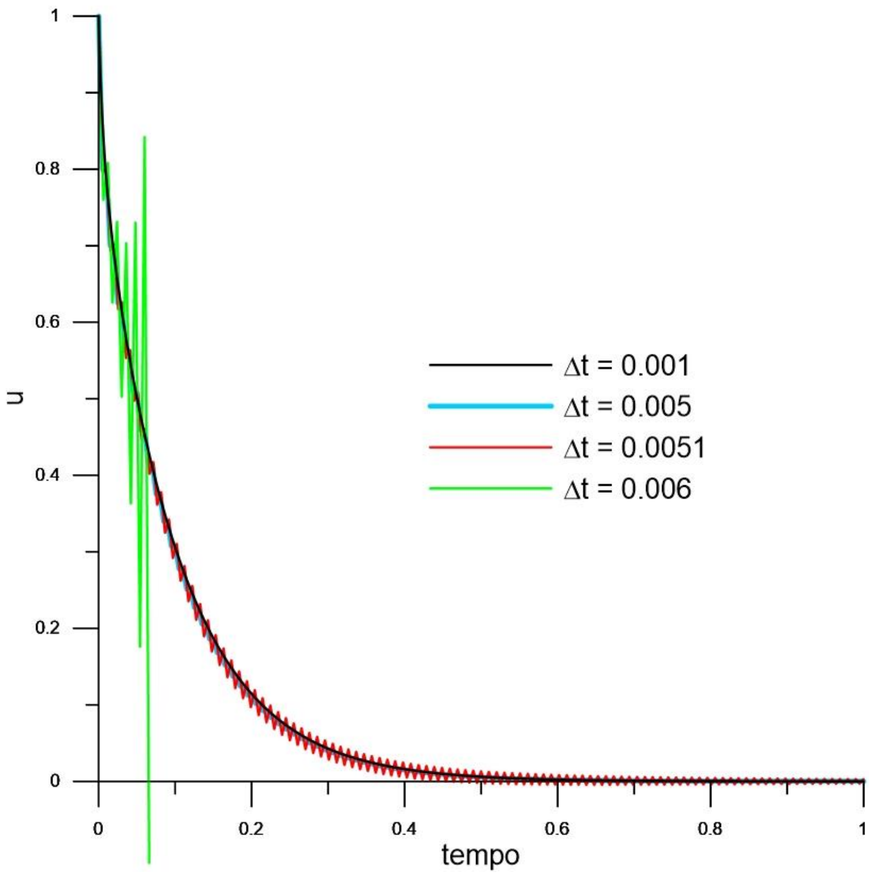
$$u_0(x) = \frac{2}{L}(L - x) \text{ , } L/2 \le x \le L$$

Adotar $D = 1$ e $L = 1$, com $\Delta x = L/10$.

Utilizar $\Delta t = 0{,}001$, $\Delta t = 0{,}005$, $\Delta t = 0{,}0051$ e $\Delta t = 0{,}006$.

Solução:

As respostas estão apresentadas na figura abaixo.



Solução da equação da difusão com diferentes valores de Δt em $x = L/2$.

Os métodos explícitos são *condicionalmente estáveis*, ou seja, para valores de um passo de tempo maiores que um *passo de tempo crítico*, ocorre uma instabilidade numérica que conduz a resultados inaproveitáveis. Para a equação (2.5), o passo de tempo crítico é:

$$\Delta t_c \leq \frac{\Delta x^2}{2D} \tag{2.7}$$

Em termos de r:

$$r = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \tag{2.8}$$

Para o exemplo:

Δt	r
0,001	0,1
0,005	0,5
0,0051	0,51
0,006	0,6

Apesar da simplicidade dos métodos explícitos, para a sua utilização é necessário o uso de passos de tempo muito pequenos. O valor de Δx também deve ser suficientemente pequeno.

O método de Crank-Nicholson é *estável* para todos os valores de r. Neste método, a equação diferencial é atendida no ponto $(i\Delta x, (j + 1/2)\Delta t)$ e $\partial^2 u/\partial x^2$ é substituída pela média das aproximações nos passos de tempo $j\Delta t$ e $(j + 1)\Delta t$, isto é:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right] \tag{2.9}$$

o que fornece a seguinte expressão:

$$-ru_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2-2r)u_{i,j} - ru_{i+1,j} \tag{2.10}$$

Um método no qual a determinação das variáveis no instante t_{j+1} requer a solução de um sistema de equações é denominado *implícito*.

Consistência, Convergência e Estabilidade

Para que a solução fornecida por um esquema numérico represente uma aproximação razoável da solução exata do problema matemático, é necessário que o esquema utilizado apresente propriedades de *consistência*, *convergência* e *estabilidade*. Estas propriedades estão inter-relacionadas na solução numérica e são funções dos erros envolvidos.

Consistência: um esquema de diferenças finitas é dito consistente quando, ao refinarem-se as aproximações, no limite as equações aproximadas tornam-se matematicamente equivalentes às equações diferenciais originais. Assim, se $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to$ e $\Delta t \to 0$, $\varepsilon \to 0$ (ε é o erro de truncamento da equação aproximada).

Convergência: a solução numérica tende para a solução exata quando se diminuem os incrementos espaciais e o incremento de tempo. Se, no ponto $x = x_i$, u_i representa a solução exata e U_i representa a solução aproximada, o esquema é convergente quando o erro de discretização $w_i = u_i - U_i$ tende para zero, em qualquer ponto i à medida que se refina a discretização.

Estabilidade: é uma propriedade relacionada, basicamente, com o esquema de integração no tempo. Quando um esquema numérico qualquer é instável, uma pequena perturbação (um erro de truncamento, por exemplo) tende a crescer à medida que o processo de cálculo avança no tempo, conduzindo a erros acima de valores toleráveis e comprometendo irremediavelmente a solução numérica. Por exemplo, o método da diferença central, utilizado no exemplo do sistema massa-mola só é estável para valores do passo de tempo Δt inferiores a um valor crítico definido pela expressão:

$$\Delta t_c = \frac{2}{\omega_n}$$

onde ω_n é a freqüência natural do sistema.

TEOREMA DE LAX

De acordo com o teorema de Lax, se uma aproximação em diferenças finitas de um problema de valores iniciais é *consistente*, então a *estabilidade* é uma condição necessária e suficiente para a *convergência*.

3. Equação da onda

A equação

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

governa o problema da propagação de onda e pode representar vários problemas, entre os quais: vibração transversal de uma de uma corda ou vibração longitudinal de uma barra. No primeiro caso,

$$c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

onde T é a tensão na corda e ρ é a densidade linear do material.

No segundo caso,

$$c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

onde *E* é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Para obter a versão discreta da equação (3.1) são utilizadas as fórmulas de diferença central para as derivadas parciais e obtém-se:

$$\frac{1}{c^2}\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta t^2}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{3.2}$$

Resolvendo para $u_{i,j+1}$:

$$u_{i,j+1}=\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}\right)+2u_{i,j}-u_{i,j-1} \tag{3.3}$$

ou:

$$u_{i,j+1} = ru_{i+1,j} + (2-2r)u_{i,j} + ru_{i-1,j} - u_{i,j-1} \tag{3.4}$$

com $r = \left(\dfrac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2$.

A equação (3.4) é característica de um método explícito, que não é condicionalmente estável. Sugestão para escolha do passo de tempo: $c\Delta t < \Delta x$.