Exemplos

2. Resolver a equação

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0$$

definida no intervalo [0,1], com as condições de contorno:

u(0) = 0 (essencial ou de Dirichlet)

$\frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = 1$ (natural ou deNeumann)

Resolver pelo MDF e utilizar Δx = 0.25.

Solução:

O problema, agora, possui 4 incógnitas, já que o valor u(1) = u_4 não é conhecido. Assim sendo, é necessário gerar mais uma equação, além das três relativas aos pontos internos, para a solução do problema.

Há três alternativas para a obtenção da quarta equação.

1. Aproximar a condição de contorno natural com diferença regressiva:

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{u_4 - u_3}{\Delta x} = \frac{u_4 - u_3}{0,25} = 1$$

A equação adicional, requerida para a solução do problema, é:

$$u_4 = 0,25 + u_3$$

Substituindo a equação acima na terceira equação do exemplo1, repetida aqui:

$$u_4 - 1,9375u_3 + u_2 = -0,046875$$

obtém-se:

$$-0,9375u_3 + u_2 = -0,296875$$

O novo sistema de equações (S1) é:

$$\begin{bmatrix} -1,9375 & 1 & 0 \\ 1 & -1,9375 & 1 \\ 0 & 1 & -0,9375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,015625 \\ -0,031250 \\ -0,296875 \end{Bmatrix}$$

A solução de S1 fornece os valores:

$$u_1 = \frac{5553}{10556} = 0,52605153$$

$$u_2 = \frac{5297}{5278} = 1,00359985$$

$$u_3 = \frac{14643}{10556} = 1,38717317$$

Do resultado para u3 obtém-se o resultado para u_4 = 1,63717317.

As soluções aproximadas podem ser comparadas com a solução analítica, dada por:

$$u = u(x) = 2\frac{senx}{\cos 1} - x$$

Comparando os resultados:

x	$u_{analítica}$	u_{MDF}
0,25	0,66579827	0,52605153
0,50	1,27465665	1,00359985
0,75	1,77317546	1,38717317
1,00	2,11481545	1,63717317

Adotando novamente $\Delta x = 0,5$, há duas incógnitas a determinar: u_1 e u_2. A segunda equação é a que aproxima a condição de contorno natural, como segue:

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} = \frac{u_2 - u_1}{0,5} = 1$$

de onde vem:

$$u_2 = 0,5 + u_1$$

Substituindo a equação acima na equação para $x = x_1$:

$$u_2 - 1,75u_1 + u_0 = -0,125$$

obtém-se finalmente (lembrar que $u_0 = 0$):

$$-0,75u_1 = -0,625$$
$$u_1 = 0,83333333$$

e:

$$u_2 = 1,33333333$$

Adotando $\Delta x = 0,125$, o problema apresenta 8 incógnitas. A equação adicional é:

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{u_8 - u_7}{\Delta x} = \frac{u_8 - u_7}{0,125} = 1$$

Substituindo:

$$u_8 = 0,125 + u_7$$

na sétima equação, escrita abaixo:

$$u_6 - 1,984375u_7 + u_8 = -0,013671875$$

obtém-se a última equação do sistema de equações:

$$u_6 - 0,984375u_7 = -0,138671875$$

O sistema de equações é dado por:

$$\begin{bmatrix} -1,984375 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1,984375 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1,984375 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1,984375 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1,984375 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1,984375 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,984375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,001953125 \\ -0,003906250 \\ -0,005859375 \\ -0,078125000 \\ -0,009765625 \\ -0,01171875 \\ -0,138671875 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, encontra-se:

u_1 = 0,29696200

u_2 = 0,58733085

u_3 = 0,86461641

u_4 = 1,12253295

u_5 = 1,35509742

u_6 = 1,55672287

u_7 = 1,72230577

E, então:

$$u_8 = 1,84730577$$

Os resultados podem ser agrupados no gráfico abaixo: