Exemplos

1. Resolver a equação

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0$$

definida no intervalo [0,1], com condições essenciais de contorno:

u(0) = 0

u(1) = 1

Resolver pelo MDF e utilizar Δx = 0,25.

Solução:

Inicialmente, a derivada de ordem dois deve ser substituída pela sua aproximação por diferença finita, sendo reescrita como:

$$\frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} + u(x_i) + x_i = 0 \qquad (1.1)$$

Agrupando termos semelhantes, pode-se escrever:

$$u(x_i + \Delta x) + (\Delta x^2 - 2)u(x_i) + u(x_i - \Delta x) = -\Delta x^2 x_i \qquad (1.2)$$

De forma simplificada, a equação (1.2) pode ser reescrita como:

$$u_{i+1} + (\Delta x^2 - 2)u_i + u_{i-1} = -\Delta x^2 x_i \qquad (1.3)$$

com:

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x)$$

$$u_i = u(x_i)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x)$$

A equação (1.3) é a forma discreta da equação diferencial e está escrita para um ponto discreto $x = x_i \in [0,1]$. Se $\Delta x = 0.25$, então o intervalo [0,1], que constitui o domínio do problema, é dividido em quatro intervalos menores:

$[0,\Delta x]$, $[\Delta x,2\Delta x]$, $[2\Delta x,3\Delta x]$, $[3\Delta x,4\Delta x]$

ou

[0;0,25], [0,25;0,50], [0,50;0,75], [0,75;1,00]

nos quais podem ser identificados os pontos:

$x_0 = 0$

$x_1 = \Delta x = 0{,}25$

$x_2 = 2\Delta x = 0{,}50$

$x_3 = 3\Delta x = 0{,}75$

$x_4 = 4\Delta x = 1{,}00$

Em $x = x_0$, $u(x_0) = u_0 = 0$ e, em $x = x_4$, $u(x_4) = u_4 = 1$. Os valores u_1, u_2 e u_3 são incógnitos e, para serem determinados, a equação (1.3) deve ser escrita para i = 1, 2, 3. Assim, para:

i=1: $u_2 - 1{,}9375u_1 + u_0 = -0{,}25^2 0{,}25 = -0{,}015625$

i=2: $u_3 - 1{,}9375u_2 + u_1 = -0{,}25^2 0{,}50 = -0{,}031250$

i=3: $u_4 - 1{,}9375u_3 + u_2 = -0{,}25^2 0{,}75 = -0{,}046875$

Em forma matricial, após a introdução das condições de contorno:

$$\begin{bmatrix} -1{,}9375 & 1 & 0 \\ 1 & -1{,}9375 & 1 \\ 0 & 1 & -1{,}9375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}015625 \\ -0{,}031250 \\ -1{,}046875 \end{Bmatrix}$$

Após a solução do sistema de equações, encontra-se:

$$u_1 = \frac{11780113}{34797500} = 0,33853331$$

$$u_2 = \frac{359359}{561250} = 0,64028330$$

$$u_3 = \frac{6060093}{6959500} = 0,87076557$$

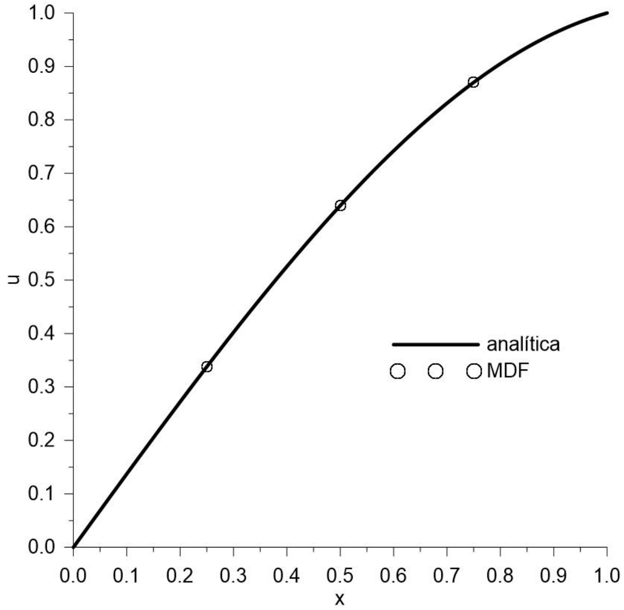
As soluções aproximadas podem ser comparadas com a solução analítica, dada por:

$$u = u(x) = 2\frac{senx}{sen1} - x$$

e os resultados podem ser comparados:

x	$u_{analítica}$	u_{MDF}
0,25	0,33802740	0,33853331
0,50	0,63949393	0,64028330
0,75	0,87011233	0,87076557

Graficamente:



Se $\Delta x = 0.5$, então a equação (1.3) só será aplicada uma vez, para $x = x_1 = 0{,}50$, pois nesse caso: $x_0 = 0$ e $x_2 = 1$. A equação é:

$$u_2 - 1{,}75u_1 + u_0 = -0{,}50^2 0{,}50 = -0{,}125$$

Substituindo os valores das condições de contorno e resolvendo para u_1, encontra-se:

$$u_2 = 0{,}64285714$$

Se $\Delta x = 0.125$, a equação (1.3) deverá ser aplicada para $x_i = i\Delta x$, i=1,2,3,...7. O sistema de equações agora teria 7 incógnitas e é escrito como:

$$\begin{bmatrix} -1{,}984375 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1{,}984375 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1{,}984375 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1{,}984375 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1{,}984375 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1{,}984375 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1{,}984375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}001953125 \\ -0{,}003906250 \\ -0{,}005859375 \\ -0{,}078125000 \\ -0{,}009765625 \\ -0{,}01171875 \\ -1{,}013671875 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, encontra-se:

u_1 = 0,17139388

u_2 = 0,33815661

u_3 = 0,49572939

u_4 = 0,63969702

u_5 = 0,76585689

u_6 = 0,87028462

u_7 = 0,94939540

Agrupando os resultados em um mesmo gráfico: