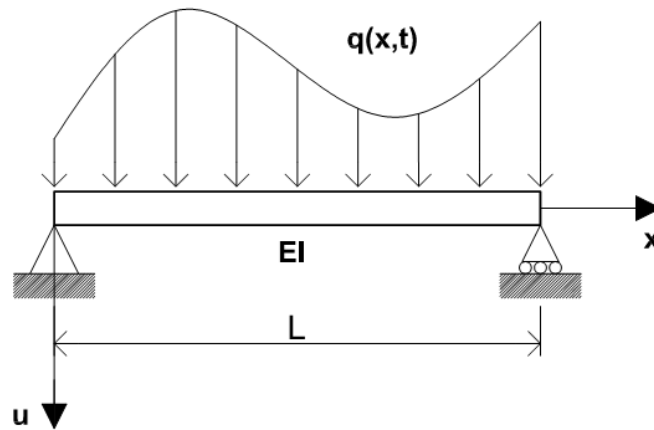


## Flexão de vigas

Pela teoria de *Euler-Bernoulli*, a equação que governa o problema da flexão de vigas é:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = q(x) \quad (1)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal e  $q(x)$  é o carregamento.



Flexão de vigas: definição dos sistema de coordenadas.

Para as vigas mais comuns, as condições de contorno, admitindo uma viga de vão  $L$ , são:

viga simplesmente apoiada:

$$u(0) = u(L) = 0$$

$$u''(0) = u''(L) = 0$$

viga engastada:

$$u(0) = u(L) = 0$$

$$u'(0) = u'(L) = 0$$

viga em balanço:

$$u(0) = u'(0) = 0$$

$$u''(L) = u'''(L) = 0$$

viga engastada em  $x = 0$  e simplesmente apoiada em  $x = L$ :

$$u(0) = u'(0) = 0$$

$$u(L) = u''(L) = 0$$

Problema: obtenção das fórmulas de diferenças finitas para a derivada de quarta ordem.

Como:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \quad (2)$$

pode-se fazer:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} \Big|_{x_i} = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{x_i} = \frac{\frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x_i + \Delta x} - 2 \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x_i} + \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x_i - \Delta x}}{\Delta x^2} \quad (3)$$

Aproximando cada uma das derivadas em (3), tem-se:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x_i + \Delta x} = \frac{u(x_i + 2\Delta x) - 2u(x_i + \Delta x) + u(x_i)}{\Delta x^2} \quad (4)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x_i} = \frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (5)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x_i - \Delta x} = \frac{u(x_i) - 2u(x_i - \Delta x) + u(x_i - 2\Delta x)}{\Delta x^2} \quad (6)$$

Substituindo (4), (5) e (6) em (3):

$$\frac{d^4 u}{dx^4} \Big|_{x_i} = \frac{u(x_i + 2\Delta x) - 4u(x_i + \Delta x) + 6u(x_i) - 4u(x_i - \Delta x) + u(x_i - 2\Delta x)}{\Delta x^4} \quad (7)$$

Utilizando a notação com índices:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} \Big|_{x_i} = \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^4} \quad (8)$$

Para a derivada de terceira ordem, tem-se que:

$$\frac{d^3 u}{dx^3} \Big|_{x_i} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{x_i} = \frac{\frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x_i + \Delta x} - \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x_i - \Delta x}}{2\Delta x} = \frac{\frac{u(x_i + 2\Delta x) - 2u(x_i + \Delta x) + u(x_i)}{\Delta x^2} - \frac{u(x_i) - 2u(x_i - \Delta x) + u(x_i - 2\Delta x)}{\Delta x^2}}{2\Delta x}$$

Agrupando termos semelhantes:

$$\frac{d^3 u}{dx^3} \Big|_{x_i} = \frac{u(x_i + 2\Delta x) - 2u(x_i + \Delta x) + 2u(x_i - \Delta x) - u(x_i - 2\Delta x)}{2\Delta x^3} \quad (9)$$

Utilizando índices:

$$\frac{d^3 u}{dx^3} \Big|_{x_i} = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{2\Delta x^3} \quad (10)$$

Alternativamente, pode-se fazer

$$\frac{d^3 u}{dx^3} \Big|_{x_i} = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_i} = \frac{\frac{du}{dx} \Big|_{x_i + \Delta x} - 2\frac{du}{dx} \Big|_{x_i} + \frac{du}{dx} \Big|_{x_i - \Delta x}}{\Delta x^2} = \frac{\frac{u(x_i + 2\Delta x) - u(x_i)}{2\Delta x} - 2\frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + \frac{u(x_i) - u(x_i - 2\Delta x)}{2\Delta x}}{\Delta x^2}$$

A expressão (9) é obtida novamente após os termos semelhantes serem agrupados.