O Método de Rayleigh-Ritz

Dado o funcional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y'\right) dx \tag{1}$$

com condições de contorno $y(x_1) = y(x_2) = 0$, no Método de Rayleigh-Ritz a função y, que extremiza o funcional, é substituída por uma função aproximada $\bar{y}$, definida como:

$$\bar{y} = \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \ldots + \alpha_n \Phi_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi_i \tag{2}$$

na qual as funções Φ_i, $i = 1,2,\ldots,n$ são conhecidas e linearmente independentes e os coeficientes α_i, desconhecidos, devem ser determinados.

Substituindo $\bar{y}$, definida em (2), no funcional (1), obtém-se um funcional aproximado

$$\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, \bar{y}, \bar{y}'\right) dx \tag{3}$$

Como as funções Φ_i são conhecidas resulta que, tanto $\bar{y}$ quanto $\bar{y}'$ dependerão somente dos parâmetros α_i. Portanto, o funcional aproximado $\bar{I}$ dependerá somente dos parâmetros α_i. Logo, se

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y'\right) dx$$

então

$$\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} F\left(\alpha_i\right) dx \tag{4}$$

Da condição de extremização, pode-se escrever:

$$\delta^{(1)}\overline{I} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\delta\alpha_n \right) dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} dx\delta\alpha_1 + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} dx\delta\alpha_2 + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial \alpha_n} dx\delta\alpha_n =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\int_{x_1}^{x_2} Fdx\delta\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\int_{x_1}^{x_2} Fdx\delta\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial \alpha_n}\int_{x_1}^{x_2} Fdx\delta\alpha_n =$$

$$= \frac{\partial \overline{I}}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{\partial \overline{I}}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial \overline{I}}{\partial \alpha_n}\delta\alpha_n = 0 \qquad (5)$$

Como as variações $\delta\alpha_i$ são arbitrárias, $\delta^{(1)}\overline{I}$ só se anula quando:

$$\frac{\partial \overline{I}}{\partial \alpha_i} = 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots n \qquad (6)$$

A equação (6) gera um sistema de equações cuja solução fornece os valores dos α_i que correspondem à melhor forma aproximada do tipo descrito em (2). Quando as soluções aproximadas atendem às *condições de convergência* do método, um aumento do número *n* de termos produz uma melhor representação da solução exara do problema. As condições de convergência são:

1) as soluções aproximadas devem ser contínuas e suas derivadas devem ser contínuas até uma unidade a menos que a ordem do operador diferencial que aparece no funcional;

2) as soluções aproximadas devem satisfazer exatamente as condições de contorno essenciais do problema;

3) a sequência de funções deve ser tal que, no limite, quando *n* tende a infinito, o erro quadrático médio se anula:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_1}^{x_2}\left(y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Phi_i\right)^2 dx = 0 \qquad (7)$$

Por exemplo, dado o funcional

$$I_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - qw\right]dx$$

que representa a energia potencial total para a flexão de uma viga, obter uma solução aproximada para w que atenda às condições de contorno $w(0) = w(L) = 0$.

Solução:

Primeira tentativa:

Fazendo $\bar{w} = \alpha x(x-L)$, tem-se: $\dfrac{d\bar{w}}{dx} = \alpha(2x-L)$ e $\dfrac{d^2\bar{w}}{dx^2} = 2\alpha$.

Substituindo as expressões anteriores no funcional, tem-se:

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right)^2 - q\bar{w}\right]dx = \int_0^L \left[2EI\alpha^2 - q\alpha(x^2 - Lx)\right]dx$$

Integrando:

$$\bar{I}_p = 2EI\alpha^2 L + \frac{qL^3\alpha}{6}$$

A condição de extremização é:

$$\frac{\partial \bar{I}_p}{\partial \alpha} = 0$$

de onde vem:

$$4EI\alpha L + \frac{qL^3}{6} = 0$$

e, portanto:

$$\alpha = -\frac{qL^2}{24EI}$$

A expressão da solução aproximada é:

$$\bar{w} = -\frac{qL^2}{24EI}x(x-L)$$

Em $x = \frac{L}{2}$, $\bar{w}_{\max} = \frac{qL^4}{96EI}$. O deslocamento máximo fornecido pela solução analítica é $w_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI}$. Portanto, o deslocamento aproximado máximo é igual a 80% do deslocamento máximo analítico.

Segunda tentativa:

Agora, $\bar{w} = \alpha_1 x(x-L) + \alpha_2 x^2 (x-L)^2$, de onde vem:

$$\frac{d\bar{w}}{dx} = \alpha_1\left(2x-L\right) + \alpha_2\left(4x^3 - 6Lx^2 + 2L^2x\right)$$

$$\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = 2\alpha_1 + \alpha_2\left(12x^2 - 12Lx + 2L^2\right)$$

$$\left(\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right)^2 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2\left(12x^2 - 12Lx + 2L^2\right) +$$

$$+\alpha_2^2\left(144x^4 - 288Lx^3 + 192L^2x^2 - 48L^3x + 4L^4\right)$$

O funcional aproximado é:

$$\bar{I}_p = \int_0^L \left\{ \frac{EI}{2} \left[4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2 \left(12x^2 - 12Lx + 2L^2\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \alpha_2^2 \left(144x^4 - 288Lx^3 + 192L^2x^2 - 48L^3x + 4L^4\right) \right] -$$

$$\left. q \left[\alpha_1 x(x-L) + \alpha_2 x^2 (x-L)^2 \right] \right\} dx$$

Integrando:

$$\bar{I}_p = \frac{EI}{2}\left(4\alpha_1^2 L + \frac{4}{5}\alpha_2^2 L^5 \right) - q\left(-\alpha_1 \frac{L^3}{6} + \alpha_2 \frac{L^5}{30} \right)$$

Para a extremização, há duas condições:

$$\frac{\partial \bar{I}_p}{\partial \alpha_1} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{I}_p}{\partial \alpha_2} = 0$$

Da primeira condição de extremização:

$$\frac{\partial \bar{I}_p}{\partial \alpha_1} = \frac{EI}{2} 8\alpha_1 L + \frac{qL^3}{6} = 0$$

de onde $\alpha_1 = -\dfrac{qL^2}{24EI}$

Da segunda condição:

$$\frac{\partial \bar{I}_p}{\partial \alpha_2} = \frac{EI}{2}\frac{8}{5}\alpha_2 L^5 - \frac{qL^5}{30} = 0$$

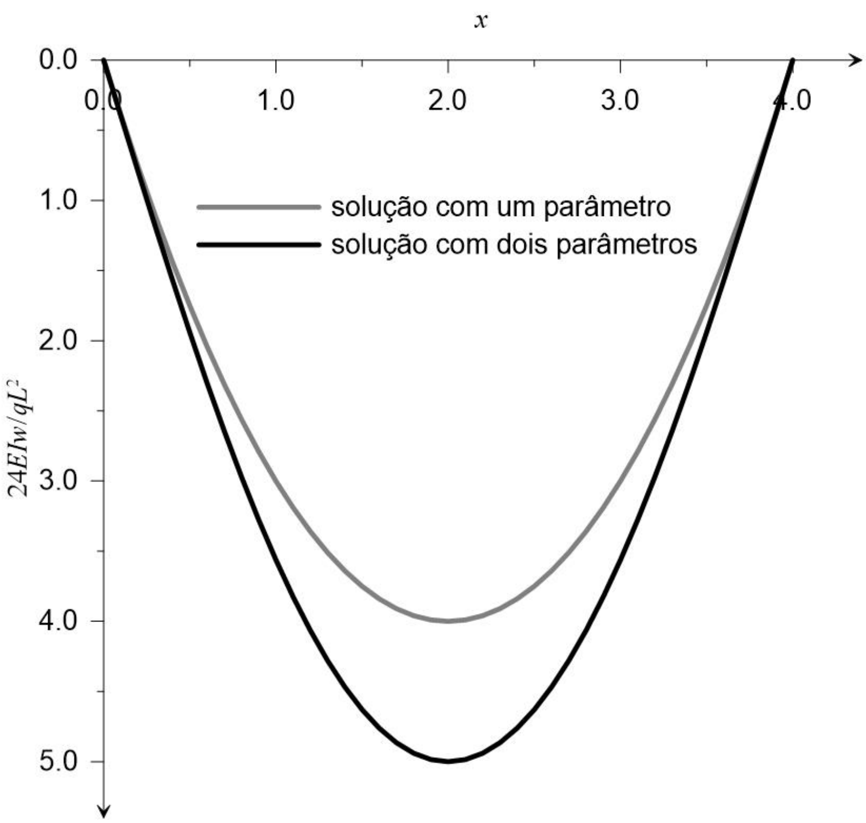
e: $\alpha_2 = \dfrac{q}{24EI}$

A solução aproximada:

$$\bar{w} = -\frac{qL^2}{24EI}x(x-L) + \frac{q}{24EI}x^2(x-L)^2$$

é a solução analítica do problema.

Graficamente:



Problemas propostos

1. A partir do funcional da energia potencial total para a flexão de uma viga, encontre uma solução aproximada para uma viga de vão L engastada em $x = 0$ e livre em $x = L$, com carregamento constante, uniformemente distribuído, igual a q. Utilize um só parâmetro.

2. A partir do funcional da energia potencial total para a flexão de uma viga, encontre uma solução aproximada para uma viga de vão L engastada em $x = 0$ e em $x = L$, com carregamento constante, uniformemente distribuído, igual a q. Utilize um só parâmetro.

Comparar as soluções aproximadas com as analíticas.