Métodos Aproximados

Descrever quantitativamente um problema, ou um fenômeno físico, ou seja, de se obter uma expressão matemática que corresponda ao fenômeno considerado, inicialmente substitui-se o problema real por um *problema equivalente*, mais simples, no qual são selecionados os parâmetros considerados fundamentais para o estudo em questão e que pode ser descrito matematicamente através de um sistema de equações diferenciais, válido em todo o domínio do problema, com as correspondentes condições de contorno e condições iniciais.

O próximo passo é a busca da solução do problema. Um sistema de equações diferenciais constitui um modelo contínuo, uma vez que as variáveis de campo se distribuem continuamente em todo o domínio do problema. Com a exceção de alguns casos mais simples, em geral não é possível encontrar soluções analíticas, ou exatas, para o problema. Recorre-se, então, aos *modelos discretos*, obtidos dos modelos contínuos através de hipóteses simplificadoras, nos quais as variáveis de campo aparecem em um número finito de incógnitas. Pode-se dizer que a passagem de um sistema contínuo para um sistema discreto reduz as infinitas incógnitas do primeiro a um número finito de incógnitas no segundo.

De uma maneira geral, as incógnitas, ou graus de liberdade, dos sistemas discretos são determinadas a partir da solução de um sistema de equações algébricas.

Os *modelos discretos* também são chamados de *modelos numéricos*.

Bibliografia

1. G.D.Smith. Numerical Solution of Partial Differential Equations, Finite Difference Methods, Clarendon Press, Oxford, 1984.

2. O.C.Zienkiewicz and K.Morgan. Finite Elements and Approximation, Dover, 2006.

3. C.A.Brebbia, J.C.F.Telles and L.C.Wrobel. Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, 1984.

Método das Diferenças Finitas

Derivadas de Ordem Um

Por definição, as derivadas de uma função u=u(x) em um ponto x_i é dada por:

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} \tag{1}$$

De forma aproximada, utilizando Δx pequeno, porém finito, pode-se escrever:

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} \tag{2}$$

A aproximação dada em (2) é denominada *diferença progressiva* porque utiliza um ponto à frente de x_i, isto é, o ponto $x_i + \Delta x$.

De maneira análoga, pode-se definir uma *diferença regressiva* como:

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \tag{3}$$

Outra maneira de aproximar a derivada é utilizando uma *diferença central*, dada por:

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} \tag{4}$$

As fórmulas aproximadas (2 – 4) podem ser obtidas através de séries de Taylor, o que permite estimar, ou avaliar aproximadamente, o erro cometido em cada tipo de aproximação.

Assim, a expansão em série de Taylor do valor de u em $x = x_i + \Delta x$, em torno do valor de u em $x = x_i$, é dada por:

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x \frac{du}{dx}\Big|_{x=x_i} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=x_i} + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{d^3u}{dx^3}\Big|_{x=x_i} + \dots \tag{5}$$

Resolvendo para $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i}$:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{u(x_i+\Delta x)-u(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=x_i} - \frac{\Delta x^2}{6}\left.\frac{d^3u}{dx^3}\right|_{x=x_i} - \ldots \tag{6}$$

Em (6), desprezando os termos relativos às derivadas de ordem igual ou maior do que dois, obtém-se a expressão (3), que corresponde à diferença progressiva. Como Δx é um valor pequeno, o maior termo desprezado é igual ao produto de Δx por uma constante, ou seja, é da ordem de Δx. Para representar o erro, utiliza-se a notação: O(Δx).

Analogamente, a expansão em série de Taylor do valor de u em x = x_i – Δx, em torno do valor de u em x = x_i, é dada por:

$$u(x_i-\Delta x) = u(x_i) - \Delta x\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i} + \frac{\Delta x^2}{2!}\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=x_i} - \frac{\Delta x^3}{3!}\left.\frac{d^3u}{dx^3}\right|_{x=x_i} + \ldots \tag{7}$$

Novamente resolvendo para $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i}$:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{u(x_i)-u(x_i-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2}\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=x_i} - \frac{\Delta x^2}{6}\left.\frac{d^3u}{dx^3}\right|_{x=x_i} + \ldots \tag{8}$$

Em (8), tal como em (6), os termos relativos às derivadas de ordem igual ou maior do que dois podem ser desprezados, o que resulta na expressão da diferença regressiva, que também introduz um erro O(Δx) quando aproxima (1).

Subtraindo (7) de (5):

$$u(x_i+\Delta x) - u(x_i-\Delta x) = 2\Delta x\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i} + 2\frac{\Delta x^3}{3!}\left.\frac{d^3u}{dx^3}\right|_{x=x_i} + \ldots \tag{9}$$

Resolvendo para $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i}$:

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{u(x_i+\Delta x)-u(x_i-\Delta x)}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3}\frac{d^3u}{dx^3}\Big|_{x=x_i} - \dots \tag{10}$$

Desprezando os termos relativos às derivadas de terceira ordem em diante, obtém-se a aproximação em diferença central. O erro quando se aproxima (1) por (4) é O(Δx^2), ou seja, a diferença central introduz um erro menor que o erro das diferenças progressiva e regressiva.

Derivada de Ordem Dois

As derivadas de ordem superior também podem ser aproximadas por fórmulas de diferenças, que podem ser obtidas através de séries de Taylor ou do emprego das aproximações (2) e (3).

As aproximações (5) e (7) podem ser somadas, resultando em:

$$u(x_i+\Delta x)+u(x_i-\Delta x) = 2u(x_i)+\Delta x^2\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=x_i} + 2\frac{\Delta x^4}{4!}\frac{d^4u}{dx^4}\Big|_{x=x_i} + \dots \tag{11}$$

Resolvendo para $\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=x_i}$:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=x_i} = \frac{u(x_i+\Delta x)-2u(x_i)+u(x_i-\Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{d^4u}{dx^4}\Big|_{x=x_i} + \dots \tag{12}$$

De (12) conclui-se que a aproximação para a derivada de segunda ordem é uma aproximação do tipo diferença central e o erro cometido é O(Δx^2) quando se faz:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=x_i} = \frac{u(x_i+\Delta x)-2u(x_i)+u(x_i-\Delta x)}{\Delta x^2} \tag{13}$$