

Método de Rayleigh-Ritz

Dado o funcional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (1)$$

com condições de contorno $y(x_1) = y(x_2) = 0$, no método de Rayleigh-Ritz a função y , que extremiza o funcional, é substituída por uma solução $\bar{y}$, definida como

$$\bar{y} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots + \alpha_n \phi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i, \quad (2)$$

onde as funções ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são conhecidas e linearmente independentes e os coeficientes α_i , devem ser determinados de forma a se obter a melhor aproximação possível para a solução exata do problema.

Substituindo $\bar{y}$, definido em (2), no funcional (1), obtém-se um funcional aproximado

$$\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \quad (3)$$

Como as funções ϕ_i são conhecidas, resulta que tanto $\bar{y}$ quanto $\bar{y}'$ dependerão somente dos parâmetros α_i (se $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$, então $\bar{y}' = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i'$).

Portanto, o funcional aproximado $\bar{I}$ dependerá somente dos n parâmetros α_i . Assim, pode-se escrever:

$$\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(\alpha_i) dx \quad \text{ou} \quad I = \bar{I}(\alpha_i)$$

A condição de extremização de $\bar{I}$ é dada por:

$$\delta^{(1)} \bar{I} = 0$$

$$F(x, y, y') \rightarrow F(x, x_i)$$

ou

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_m} \delta x_m \right) dx = 0 \quad (4)$$

ou ainda

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right) dx \cdot \delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right) dx \delta x_2 + \dots + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_m} \right) dx \delta x_m = 0 \quad (5)$$

Trocando a ordem da integração e da diferenciação em (5).

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{x_1}^{x_2} F dx \cdot \delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{x_1}^{x_2} F dx \cdot \delta x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \int_{x_1}^{x_2} F dx \cdot \delta x_m = 0 \quad (6)$$

A equação (6), considerando que $\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} F dx$ e reescrita como:

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \bar{I}}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial \bar{I}}{\partial x_m} \delta x_m = 0 \quad (7)$$

Como as variáveis δx_i são arbitrárias, $\delta^{(1)} \bar{I}$ se

se anula quando:

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

A expressão (6) gera um sistema de equações cuja solução fornece os valores de x_i que correspondem à melhor solução aproximada do tipo descrito em (2). Quando as soluções aproximadas atendem às condições de convergência do método, um aumento do número de termos produz uma melhor representação da solução exata do problema.

As condições de convergência são:

- 1) as soluções aproximadas devem ser contínuas. As derivadas das soluções devem ser contínuas até uma unidade a menos que a ordem do operador diferencial que aparece no funcional;
- 2) as soluções aproximadas devem satisfazer exatamente as condições de contorno essenciais do problema;
- 3) a sequência de funções deve ser tal que, no limite, quando $n \rightarrow \infty$, o erro quadrático médio se anula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} \left(y - \sum_{i=1}^n x_i \phi_i \right)^2 dx = 0.$$

Exemplo: Voto o funcional

$$I = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \overbrace{qw}^{q = \text{constante}} \right] dx$$

que representa a energia potencial total para a flexão de uma viga, obter uma solução aproximada para w que atenda às condições de contorno $w(0) = w(L) = 0$.
(Considera-se, aqui, uma viga biapoiada; consequentemente, as condições de contorno essenciais são $w(0)$ e $w(L)$).

$$\bar{w} = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (1^{\text{a}} \text{ opção}) \quad * \text{ prestar atenção nos 3 itens da pág. anterior.}$$

$$\begin{aligned} \bar{w} &= 2x(x-L) \\ \bar{w}' &= 2(2x-L) \\ \bar{w}'' &= 2\alpha \end{aligned} \quad (2^{\text{a}} \text{ opção}) \quad * \text{ prestar atenção na ordem do operador diferencial da eq. diferencial.}$$

$$\begin{cases} \bar{w}(0) = 0 \\ \bar{w}(L) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{I} = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \cdot (2x)^2 - q \cdot 2x(x-L) \right] dx = \int_0^L \left[2EIx^2 - q \cdot 2x(x-L) \right] dx$$

Integrando:

$$\bar{I} = 2EI \cdot 2^2 \cdot L - q \cdot 2 \left(\frac{L^3}{3} - L \frac{L^2}{2} \right)$$

$$\bar{I} = 2EI \cdot 2^2 L + \frac{qL^3}{6} \cdot 2$$

Condição de extremização: $\frac{\partial \bar{I}}{\partial \alpha} = 0$

$$4EIL\alpha + \frac{qL^3}{6} = 0$$

$$\alpha = -\frac{qL^2}{24EI}$$

Assim: $\bar{w} = -\frac{qL^2}{24EI} x(x-L)$

$$\text{Em } x = \frac{L}{2} : \bar{w} = \frac{qL^4}{96EI}$$

$$\text{O valor exato } \bar{w} : w \Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$

$$\frac{\bar{w}}{w} \Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$2^{\text{a}} \text{ tentativa : } \bar{w} = \alpha x^2(x-L) \quad (\text{ruim !!!})$$

$$3^{\text{a}} \text{ tentativa : } \bar{w} = \alpha_1 x(x-L) + \alpha_2 x^2(x-L) \quad (\text{ruim !!!})$$

$$4^{\text{a}} \text{ tentativa : } \bar{w} = \alpha_1 x(x-L) + \alpha_2 x^2(x-L)^2 \quad (\text{boa !!!})$$

$$\hookrightarrow \alpha_1 = -\frac{qL^2}{24EI} ; \alpha_2 = \frac{q}{24EI}$$

Trabalho:

Wado o funcional

$$I = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (y')^2 + 2y^2 + 4xy \right] dx \quad \left. \begin{array}{l} 3, \text{ pag } 419 \\ 3, \text{ pag } 426 \end{array} \right\} \text{ parciais.}$$

Obtenha uma solução aproximada para o problema, que atenda as condições de contorno

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(1) = 0.$$

Use 1 e 2 parâmetros.