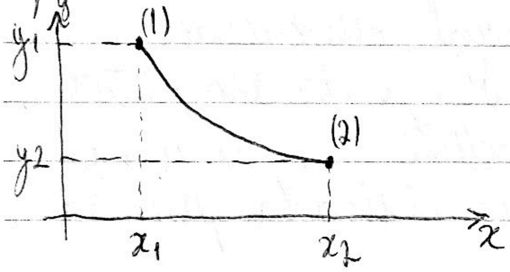
23/08/17

Cálculo Variacional

Problema da Braquistócrona

$\begin{cases} \text{Brakhús : curto, reduzido} \\ \text{Khrónos : tempo} \end{cases}$

Uma partícula cai do ponto (1) para ponto (2), deslizando sem atrito sobre uma curva $y = y(x)$. Determinar a curva correspondente ao tempo mínimo de queda.



Solução

Tempo de queda: $I = \int_{x_1}^{x_2} dt$

Velocidade: $v = \frac{ds}{dt}$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Pelo princípio da conservação da energia:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + mgy_2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgy$$

Cálculo Variacional: autor - Elsgoltz

Portanto:

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2g(y_1 - y)}$$

Assim: $dt = \frac{ds}{v}$ e

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{v_1^2 + 2g(y_1 - y)}} \, dx \quad (1)$$

Em (1), I é uma função especial, denominada funcional. O funcional do problema da braquistócrona depende de uma variável independente, x, de uma variável dependente, y, e da sua derivada primeira, y'. Genericamente

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') \, dx \quad (2)$$

O problema, contudo, ainda não foi solucionado pois a expressão da função $y = y(x)$ não é conhecida!

Esse é o problema do cálculo variacional, que consiste em determinar as funções que extremizam o funcional (para o problema da Braquistócrona, a trajetória y que produza um tempo mínimo de queda). Essas funções são obtidas após serem estabelecidas as condições necessárias à extremização do funcional, seguindo um procedimento análogo ao da procura dos pontos extremos de uma função.

Assim, dada uma função $y = f(x)$, a sua expansão em série de Taylor na vizinhança de $x = a$ é dada por (admitindo que $f(x)$ tenha derivadas contínuas em $x = a$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \quad (3)$$

Portanto

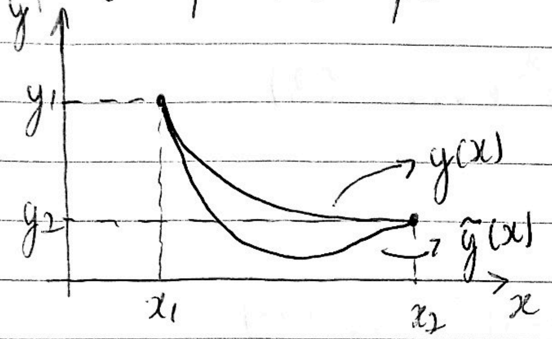
$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \quad (4)$$

Para que $f(a)$ seja um valor mínimo relativo da função, $f(x) - f(a) > 0$ para todos os valores de x numa vizinhança de a, ou seja, para todos os "valores admissíveis" de x. Da mesma maneira, para que $f(a)$ seja um máximo relativo, $f(x) - f(a) < 0$. Como $(x-a)$ adquire valores positivos e negativos, impõe-se a condição de que $f'(a) = 0$ a fim de que o termo predominante do desenvolvimento em série tenha valores não-negativos $((x-a)^2 > 0$ e $(x-a)^2 > |(x-a)^3| > (x-a)^4 > \dots)$

A condição $f'(a) = 0$ é a condição necessária para que o ponto $x = a$ seja ponto extremo da função. Como $(x-a)^2 > 0$, se $f''(a) > 0$ tem-se um ponto de mínimo em $x = a$; se $f''(a) < 0$, tem-se um ponto de máximo em $x = a$. Se $f''(a) = 0$, o termo predominante passa a ser o terceiro, que alterna o sinal para valores admissíveis de x à direita e à esquerda de a, caracterizando um ponto de inflexão (se $f'''(a) \neq 0$).

Equação de Euler-Lagrange

O valor do funcional depende da função escolhida, função que corresponde ao caminho entre (1) e (2).



Admite-se a existência de um caminho $y = y(x)$ que extremiza o funcional em relação aos caminhos vizinhos (variados) $\tilde{y}(x)$. Uma família de caminhos variados, dependente de um parâmetro ε, é definida como:

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) \qquad (5)$$

onde $\eta(x)$ é uma função derivável, arbitrariamente escolhida, que se anula em x_1 e em x_2: $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Nota-se que, qualquer que seja a escolha de $\eta(x)$, quando $\varepsilon = 0$ os caminhos variados coincidem com o caminho extremizante.

Considerando os caminhos variados, o funcional

$$\tilde{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\, dx \qquad (6)$$

tem o seu valor extremo dado por

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \qquad (7)$$

já que por hipótese, y extremiza o funcional.
Substituindo (5) em (6), tem-se:

$$\tilde{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')\,dx \qquad (8)$$

Em (8), o funcional está escrito como função do parâmetro ε e pode ser expandido em série de Taylor na vizinhança de $\varepsilon = 0$:

$$\tilde{I} = \tilde{I}\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \frac{d^2\tilde{I}}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2!} + \ldots \quad (9)$$

ou:

$$\tilde{I} - I = \frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \frac{d^2\tilde{I}}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2!} + \ldots \quad (10)$$

Analogamente ao caso de uma função $y = f(x)$, a condição necessária para que $\tilde{I}$ seja extremo em $\varepsilon = 0$ é:

$$\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad (11)$$

de (8):

$$\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{d\varepsilon}\,dx = 0 \qquad (12)$$

ou

$$\left.\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left.\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \cdot \frac{d\tilde{y}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \cdot \frac{d\tilde{y}'}{d\varepsilon}\right)\right|_{\varepsilon=0} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left.\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \cdot \eta'\right)\right|_{\varepsilon=0} dx \quad (13)$$

Como em $\varepsilon = 0$ tem-se $\tilde{y} = y$ e $\tilde{y}' = y'$, a equação (13) pode ser escrita como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta'\right) dx = 0 \quad (1)$$

Integrando por partes o segundo termo do integrando:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \, dx = \left.\frac{\partial F}{\partial y'} \eta\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx \quad (15)$$

$\hookrightarrow = 0 \; (\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0)$

Substituindo (15) em (14):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \eta \, dx = 0 \quad (16)$$

Lema Fundamental do Cálculo da Variações

Se $\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot g(x) \, dx = 0$, com $f(x)$ contínua e $g(x)$ continuamente derivável e anulando-se em x_1 e x_2, então $f(x) = 0$ no intervalo considerado.

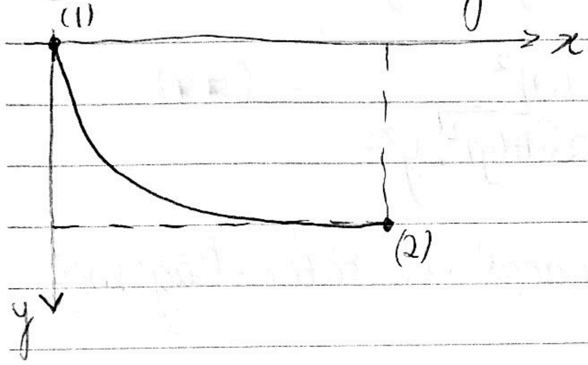
Tem-se então que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \quad (17)$$

A equação de Euler-Lagrange: é a condição a que $y(x)$ deve obedecer para que seja extremizante do funcional.

- Para o problema da Braquistócrona, pode-se adotar:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ \text{Ponto } (1) = (x_1, y_1) = (0,0) \\ \text{sentido do eixo } y \text{ invertido} \end{cases}$$



$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{v_1^2 + 2g(y_1 - y)}}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

$$\boxed{F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}}$$

Problema da Braquistócrona

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{1+(y')^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \qquad (■)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2}\left(1+(y')^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}} + y'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+(y')^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y'\cdot y''\cdot\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-\frac{3}{2}}\cdot y'$$

$$= \frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}} - \frac{(y')^2 y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{2\sqrt{1+(y')^2}\cdot y^{3/2}} \qquad (■■)$$

Substituindo (■) e (■■) na equação de Euler-Lagrange, obtém-se:

$$\boxed{2y''\cdot y + (y')^2 + 1 = 0}$$

<u>Mudança de variável</u>

$$y' = u$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} =$$

$$= \frac{du}{dy}\cdot y' = u\cdot\frac{du}{dy}$$

Substituindo o resultado acima na equação diferencial:

$$2yu\frac{du}{dy} + u^2+1 = 0$$

$$2y\,du + (u^2+1)dy = 0$$

$$d[y(1+u^2)] = 0$$

Efetuando a primeira integração:

$$y(1+u^2) = A$$
$$y(1+(y')^2) = A$$
$$(y')^2 = \frac{A}{y} - 1$$

$$y' = \sqrt{\frac{A-y}{y}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{A-y}}$$

$$dx = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{A-y}}dy$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$
$$= 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)$$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$x = \int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{A-y}}dy + x_0$$

fazendo

$$y = A\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$dy = A\,2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$dy = A\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$x = \int \frac{\sqrt{A}\cdot\sin(\frac{t}{2})}{\sqrt{A}\cdot\cos(\frac{t}{2})}\cdot A\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt + x_0 = A\int\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt + x_0$$

$$x = \frac{A}{2}\int (1-\cos(t))\, dt + x_0$$

$$x = \frac{A}{2}(t - \sin(t)) + x_0$$

em $t=0$, $x=0 \Rightarrow x_0 = 0$

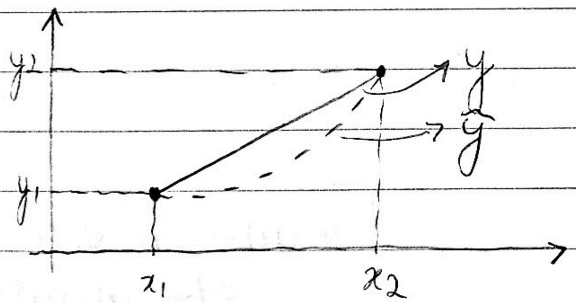
Então: $x = \frac{A}{2}(t-\sin(t))$

$y = A\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{A}{2}(1-\cos(t))$

} Equações Paramétricas da Ciclóide

A = raio

Exemplo: Provar que a menor distância entre dois pontos é uma reta



$$I = \text{distância} = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$F = \sqrt{1+(y')^2}$$

Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = A$$

$$\frac{1}{2}\left(1+(y')^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y' = A.$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = A$$

$$(y')^2 = A^2 \cdot (1+(y')^2)$$

$$(1-A^2)(y')^2 = A^2$$

$$(y')^2 = \frac{A^2}{1-A^2}$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{A^2}{1-A^2}} = B$$

$$y' = B \Rightarrow \boxed{y = Bx + c}$$

Na equação (5) pode-se definir o operador δ

$$\delta y = \tilde{y} - y = \varepsilon \eta$$

Por definição, δy representa uma variação arbitrária, introduzida na variável dependente y, para um valor fixo da variável independente x.

Propriedades do operador:

1) $\delta\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\delta y$ comutativo com o operador diferencial

2) $\delta\left[\int y\,dx\right] = \int \delta y\,dx$ comutativo com o operador integral

(19)

Substituindo (14) no segundo termo à direita em (9), resulta:

$$\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx\right]\varepsilon = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}.\varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}.\varepsilon\eta'\right)dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}.\delta y'\right)dx = 0 \qquad (20)$$

Integrando por partes o segundo termo do integrando.

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\,dx = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}.\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}}_{\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\,dx \qquad (21)$$

Substituindo (21) em (20)

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,dx = 0 \qquad (22)$$

A expressão (22) é denominada primeira variação do funcional. Portanto, a condição necessária à extremização requer que a primeira variação do funcional seja igual a zero:

$$\delta^{(1)} I = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,dx = 0 \qquad (23)$$

Note-se que:

1) $\delta^{(1)} I = \left.\dfrac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} . \varepsilon$ (24)

2) A analogia entre a primeira variação de um funcional e o diferencial total de uma função é evidente. Por exemplo:

Se $F = F(x, y, y')$, $\delta^{(1)} I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\dfrac{\partial F}{\partial y} \delta y + \dfrac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx$

$f = f(x, y)$, $df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy$

3) O emprego do operador δ facilita a obtenção da equação de Euler-Lagrange para outros tipos de funcionais.

4) $\tilde{I} - I = \delta^{(T)} I$: variação total do funcional.

Condições de Contorno

Foi considerado, até agora, o caso no qual são dados os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), por onde deve passar a função extremizante, e $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$, isto é, o caso no qual as condições de contorno cinemáticas ou forçadas são atendidas.

Supõe-se, agora, que são dados apenas x_1 e x_2; assim, dos caminhos variados, alguns passarão nas extremidades y_1, y_2, enquanto outros não passarão.

Para $I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$, o desenvolvimento da condição

30/08/17

de extremização conduz à:

$$\delta^{(1)} I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] . \delta y \, dx + \frac{\partial F}{\partial y'} . \delta y \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial F}{\partial y'} . \delta y \Big|_{x=x_1} = 0 \quad (25)$$

Em termos genéricos, a função y que extremiza o funcional deverá atender, além da Equação de Euler-Lagrange, as seguintes condições de contorno:

$$\delta y(x_1) = 0 \text{ (ou } y(x_1) = y_1 \text{ prescrito) ou } \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1} = 0 \quad (26)$$

$$\delta y(x_2) = 0 \text{ (ou } y(x_2) = y_2 \text{ prescrito) ou } \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_2} = 0 \quad (27)$$

Em (26) e (27), as condições envolvendo os valores de y em x_1 e em x_2 são as condições de contorno cinemáticas; as condições envolvendo derivadas são as condições de contorno naturais.

Funcionais com Derivadas de Ordem Superior

Seja o funcional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', y''') \, dx \quad (28)$$

A condição de extremização se escreve como:

$$\delta^{(1)} I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} . \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' + \frac{\partial F}{\partial y'''} . \delta y''' \right) dx = 0 \quad (29)$$

Integrando por partes:

a) $$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y'\,dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx \qquad (30)$$

b) $$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\,\delta y''\,dx = \frac{\partial F}{\partial y''}\,\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y\,dx \qquad (31)$$

c) $$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'''}\,\delta y'''\,dx = \frac{\partial F}{\partial y'''}\,\delta y''\Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right)\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right)\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right)\delta y\,dx \qquad (32)$$

A condição de extremização fica:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right)\right]\delta y\,dx\, +$$

$$+\left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right)\right]\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} + \left[\frac{\partial F}{\partial y''} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right)\right]\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{\partial F}{\partial y'''}\cdot\delta y''\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \qquad (33)$$

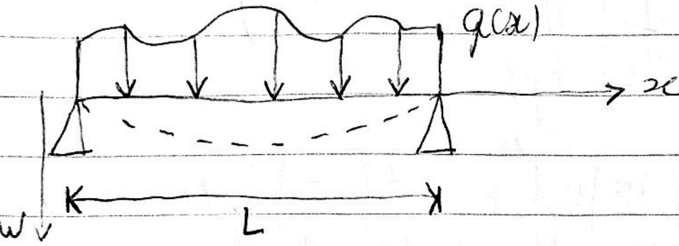
A função $y(x)$ que extremiza o funcional deve atender à equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right) - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (34)$$

e às condições de contorno:

cinematicas	ou	naturais	
y'' prescrito ($\delta y'' = 0$)		$\frac{\partial F}{\partial y'''} = 0$	(35)
y' prescrito ($\delta y' = 0$)		$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right) - \frac{\partial F}{\partial y''} = 0$	
y prescrito ($\delta y = 0$)		$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$	

Flexão de uma viga



A energia potencial total do sistema é:

$$I = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 - qw \right] dx$$

onde

qw: energia potencial da carga

$\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)$: energia potencial de deformação

E: módulo de elasticidade longitudinal do material

I: momento de inércia da seção transversal da viga.

Para o problema:

$$F = \frac{EI}{2} \cdot (w'')^2 - qw = F(x, w, w'')$$

Pelo princípio da energia potencial mínima, a configuração de equilíbrio corresponde à extremização do funcional.

Da equação de Euler-Lagrange (34):

$$\underbrace{\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial w'''}\right)}_{=0} - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) + \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right)}_{=0} - \frac{\partial F}{\partial w} = 0$$

Assim: $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) + \frac{\partial F}{\partial w} = 0$

Admitindo que EI = constante

$$\frac{\partial F}{\partial w''} = EIw''$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) = \frac{d^2}{dx^2}(EI.w'') = EI\frac{d^4w}{dx^4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -q$$

Então:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = q \longrightarrow \text{equação da linha elástica}$$

Condições de contorno: $x=0$ e $x=L$.

Das equações (35), obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial w''} \cdot \delta w' = 0 : \underset{\text{rotação}}{w'} \text{ prescrito } (\delta w'=0) \longrightarrow \text{cinemática}$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial w''} = 0 \longrightarrow \text{natural}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right)\delta w = 0 : \; w \text{ prescrito } (\delta w=0) \longrightarrow \text{cinemática}$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) = 0 \longrightarrow \text{natural}$$

As condições naturais podem ser escritas como:

$$\frac{\partial F}{\partial w''} = EIw'' = 0 \quad \text{ou} \quad M=0$$

M : momento fletor

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) = \frac{d}{dx}(EIw'') = EI.w''' = 0 \quad \text{ou} \quad Q=0$$

Q : esforço cortante

/ /

usei $F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$

• **Trabalho**: 380 → análises
331

Extremizar os funcionais

8 1) $I = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\left[y^2 + (y')^2 - 2y\,\sin(x)\right]}_{F} dx$ $\quad y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$

7 2) $I = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} y'(1 + x^2 y')\, dx$ $\quad y = \dfrac{c_1}{x} + c_2$

5 3) $I = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \left[(y')^2 + 2yy' - 16y^2\right] dx$ $\quad y = c_1 \sin(4x - c_2)$

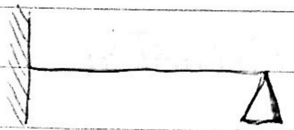
4) Indicar as condições de contorno para as vigas:

L, EI = constante

a) 

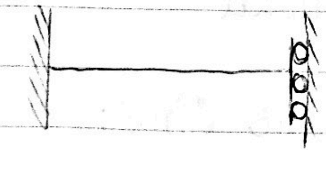
$W(0) = 0$ e $W'(0) = 0$

$W''(L) = W'''(L) = 0$

b) 

$W(0) = 0$ $\quad W'(0) = 0$

$W(L) = 0$ e $W''(L) = 0$

c) 

$W(0) = 0$ e $W'(0) = 0$

$W'(L) = 0$ e $W'''(L) = 0$