04/08/2017 Prova 16/08
↳ MDF e Resíduos Ponderados.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.533529 \\ 1.037911 \\ 1.485158 \\ 1.849350 \\ 2.108663 \end{Bmatrix}$$

O valor de $\left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=0}$ é calculado como:

$$-\frac{74}{15}\bar{u}_1 + \frac{151}{30}\bar{u}_2 = -\frac{1}{150} + \left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=0}$$

$$\left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=0} = 2.692096$$

A solução analítica é: $u = 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(1)} - x$.

Assim: $\frac{du}{dx} = 2\frac{\cos(x)}{\cos(1)} - 1$ e $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = 2.701631$

Método dos Elementos de Contorno

Seja a equação diferencial linear não homogênea, válida para todo x, na qual não são impostas condições de contorno:

$$\mathcal{L}u(x) = f(x) \qquad (1),$$

onde $\mathcal{L}()$ é um operador linear de coeficientes constantes. Quando o termo $f(x)$ é substituído por um operador Delta de Dirac, $\delta(x-x')$, no qual x' é um parâmetro, a equação (1) é reescrita como:

$$\mathcal{L}\, G(x,x') = \delta(x-x') \qquad (2)$$

A função $G(x,x')$, solução da equação (2), chama-se <u>solução fundamental</u> do operador $\mathcal{L}$ e representa o efeito em x de um Delta em x'. Para resolver (1) com o auxílio de (2), os termos à esquerda e à direita de (2) são inicialmente multiplicados por $f(x')$. Em seguida é efetuada a integração no domínio $-\infty < x < \infty$.

Assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\, G(x,x') f(x')\,dx' = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x') f(x')\,dx'}_{f(x)} \qquad (3)$$

Trocando em (3) a ordem do operador diferencial e do sinal de integração, obtém-se:

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} G(x,x') f(x')\,dx'\right] = f(x) \qquad (4)$$

Comparando as equações (4) e (1), conclui-se que:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,x') f(x')\,dx' \qquad (5)$$

Dada a equação

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0 \quad , \text{com } u(0) = \hat{u} \text{ e } \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \frac{d\hat{u}}{dx}$$

A equação de resíduos ponderados, considerando o não atendimento das condições de contorno, é escrita como:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}+\bar{u}+x\right) w\,dx + (\bar{u}-\hat{u})\bar{w}\Big|_{x=0} + \left(\frac{d\bar{u}}{dx}-\frac{d\hat{u}}{dx}\right)\bar{\bar{w}}\Big|_{x=1} = 0 \qquad (1)$$

Integrando por partes duas vezes o termo que contém a derivada de segunda ordem, obtém-se:

$$\int_0^1 \frac{d^2\bar{u}}{dx^2}\, w\,dx = w.\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_0^1 - \bar{u}\frac{dw}{dx}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{d^2w}{dx^2}\,\bar{u}\,dx \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$\int_0^1 \frac{d^2w}{dx^2}\,\bar{u}\,dx + \int_0^1 w\bar{u}\,dx + \int_0^1 wx\,dx + w\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_0^1 - \bar{u}\frac{dw}{dx}\Big|_0^1 + (\bar{u}-\hat{u})\bar{w}\Big|_{x=0} +$$

$$+\left(\frac{d\bar{u}}{dx}-\frac{d\hat{u}}{dx}\right)\bar{\bar{w}}\Big|_{x=1} = 0 \qquad (3)$$

A equação (3) é reescrita como:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2w}{dx^2}+w\right)\bar{u}\,dx + \int_0^1 wx\,dx + w.\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=1} - w\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=0} - \bar{u}\frac{dw}{dx}\Big|_{x=1} +$$

eliminar   eliminar

$$+\bar{u}\frac{dw}{dx}\Big|_{x=0} + \bar{u}.\bar{w}\Big|_{x=0} - \hat{u}.\bar{w}\Big|_{x=0} + \frac{d\bar{u}}{dx}.\bar{\bar{w}}\Big|_{x=1} - \frac{d\hat{u}}{dx}\bar{\bar{w}}\Big|_{x=1} = 0 \qquad (4)$$

Fazendo $\overline{w} = -\dfrac{dw}{dx}$ e $\overline{\overline{w}} = -w$, a equação (4) fica:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2w}{dx^2} + w\right)\bar{u}\,dx + \int_0^1 w\,x\,dx + w\frac{d\hat{u}}{dx}\Big|_{x=1} - w\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=0} - \bar{u}\frac{dw}{dx}\Big|_{x=1} +$$

$$+ \hat{u}\frac{dw}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \qquad (5)$$

A função de ponderação w é a solução da equação:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + w = \delta(x-\xi), \qquad (6)$$

Então: $$\int_0^1 \left(\frac{d^2w}{dx^2} + w\right)\bar{u}\,dx = \int_0^1 \delta(x-\xi)\,\bar{u}\,dx = \bar{u}(\xi) \qquad (7)$$

Substituindo (7) em (5):

$$\bar{u}(\xi) = \bar{u}\frac{dw}{dx}\Big|_{x=1} - \hat{u}\frac{dw}{dx}\Big|_{x=0} - \frac{d\hat{u}}{dx}w\Big|_{x=1} + \frac{d\bar{u}}{dx}w\Big|_{x=0} - \int_0^1 w\,x\,dx \qquad (8)$$

No método dos elementos de contorno, usualmente a função de ponderação w é representada como $u^*(\xi, x)$, representando o efeito no ponto x, denominado ponto campo, de um delta de Dirac aplicado em ξ, que é denominado ponto fonte.

Para o problema estudado

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{2}\sin|x-\xi|.$$

09/08/2017

A equação (8) foi obtida considerando as condições de contorno $u(0)=\hat{u}$ e $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \frac{d\hat{u}}{dx}$

Para outras condições de contorno, por exemplo, $u(0)=\hat{u}$ e $u(1)=\hat{\hat{u}}$, uma equação similar seria obtida. Assim, a equação básica do método pode ser escrita sem a imposição das condições de contorno, para depois ser particularizada de acordo com o problema.

Fazendo $q=\frac{du}{dx}$ e $q^*=\frac{du^*}{dx}$, pode-se escrever:

$$u(\xi)=u(x).q^*(\xi,x)\Big|_{x=1} - u(x)\,q^*(\xi,x)\Big|_{x=0} - q(x)u^*(\xi,x)\Big|_{x=1} + q(x)u^*(\xi,x)\Big|_{x=0} - \int_0^{\xi} x u^*(\xi,x)\,dx - \int_{\xi}^{1} x.u^*(\xi,x)\,dx \quad (9)$$

Determinação de q^*

1) $x>\xi$, $u^*=\frac{\sin(x-\xi)}{2}$, $q^*=\frac{\cos(x-\xi)}{2}$

2) $x<\xi$, $u^*=\frac{\sin(\xi-x)}{2}$, $q^*=\frac{-\cos(\xi-x)}{2}$

Considerando as expressões de $u^*(\xi,x)$ e $q^*(\xi,x)$, a equação (9) é reescrita como:

$$u(\xi) = \hat{u}(1).\frac{\cos(1-\xi)}{2} + \hat{u}(0).\frac{\cos(\xi-0)}{2} - \hat{q}(1).\frac{\sin(1-\xi)}{2} + \hat{q}(0).\frac{\sin(\xi-0)}{2} - \int_0^{\xi} x\frac{\sin(\xi-x)}{2}\,dx - \int_{\xi}^{1} x\frac{\sin(x-\xi)}{2}\,dx \quad (10)$$

Das variáveis $u(0), u(1), q(0), q(1)$, duas são conhecidas – são as condições de contorno – e as outras duas são incógnitas. Para a determinação das duas incógnitas são necessárias duas equações. Essas equações são obtidas escrevendo a equação (10) para $\xi=0$ e para $\xi=1$.

Para $\xi=0$

$$u(0) = \bar{u}(1)\cdot\frac{\cos(1-0)}{2} + u(0)\cdot\frac{\cos(0)}{2} - q(1)\cdot\frac{\sin(1-0)}{2} + \cancel{q(0)\cdot\frac{\sin(0)}{2}} - \int_0^1 \frac{x\sin(x)}{2}\,dx$$

Para $\xi=1$

$$u(1) = u(1)\cdot\frac{\cos(1-1)}{2} + u(0)\cdot\frac{\cos(1)}{2} - q(1)\cdot\frac{\sin(1-1)}{2} + \bar{q}(0)\cdot\frac{\sin(1)}{2} - \int_0^1 x\cdot\frac{\sin(1-x)}{2}\,dx$$

$$\int_0^1 x\sin(x)\,dx = -\cos(1) + \sin(1)$$

$$\int_0^1 x\sin(1-x)\,dx = 1 - \sin(1)$$

Assim:

$$u(0) = \bar{u}(1)\cdot\frac{\cos(1)}{2} + u(0)\cdot\frac{1}{2} - q(1)\cdot\frac{\sin(1)}{2} - \frac{1}{2}(\sin(1) - \cos(1))$$

(11a)

$$u(1) = u(1)\cdot\frac{1}{2} + u(0)\cdot\frac{\cos(1)}{2} + \bar{q}(0)\frac{\sin(1)}{2} - \frac{1}{2}(1 - \sin(1))$$

/ /

Agrupando termos semelhantes, a equação (11a) pode ser escrita em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\cos(1)}{2} \\ -\frac{\cos(1)}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sin(1)}{2} \\ \frac{\sin(1)}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ q(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sin(1)-\cos(1)}{2} \\ \frac{1-\sin(1)}{2} \end{bmatrix} \quad (11b)$$

$$u(0) = \hat{u}(0) = 0$$

$$q(1) = \left.\frac{d\hat{u}}{dx}\right|_{x=1} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\cos(1)}{2} \\ -\frac{\sin(1)}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}(0) \\ \bar{u}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sin(1)}{2} \\ \frac{\cos(1)}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sin(1)-\cos(1)}{2} \\ \frac{1-\sin(1)}{2} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{\cos(1)}{2} \cdot \bar{u}(1) = -\frac{\sin(1)}{2} - \frac{(\sin(1)-\cos(1))}{2}$$

$$\boxed{\bar{u}(1) = 2\frac{\sin(1)}{\cos(1)} - 1}$$

$$-\frac{\sin(1)}{2} \cdot q(0) + \frac{1}{2}\left(2\frac{\sin(1)}{\cos(1)} - 1\right) = -\frac{(1-\sin(1))}{2}$$

$$\boxed{\bar{q}(0) = \frac{2}{\cos(1)} - 1}$$

Solução Analítica

$$u(x) = 2\frac{\sin(x)}{\cos(1)} - x \rightarrow u(1) = 2\frac{\sin(1)}{\cos(1)} - 1 = \bar{u}(1)$$

$$q(x) = \frac{du}{dx} = 2\frac{\cos(x)}{\cos(1)} - 1 \rightarrow \hat{q}(0) = \frac{2}{\cos(1)} - 1 = \bar{q}(0)$$

Para $\xi \in (0,1)$

$$u(\xi) = \frac{\cos(1-\xi)}{2}\cdot\left(2\frac{\sin(1)}{\cos(1)} - 1\right) + \frac{\cos(\xi)}{2}\cdot 0 - 1\cdot\frac{\sin(1-\xi)}{2} + \left(\frac{2}{\cos(1)} - 1\right)\cdot\frac{\sin(\xi)}{2}$$
$$- \frac{(\xi - \sin(\xi))}{2} - \frac{(\xi - \cos(1-\xi) + \sin(1-\xi))}{2}$$

$$u(\xi) = \frac{1}{2}\Big[2\frac{\sin(1)}{\cos(1)}\cdot(\cos(1)\cdot\cos(\xi) + \sin(1)\cdot\sin(\xi)) - (\cancel{\cos(1)\cdot\cos(\xi)} + \cancel{\sin(1)\cdot\sin(\xi)}) -$$
$$(\sin(1)\cos(\xi) - \sin(\xi)\cdot\cos(1)) + \frac{2}{\cos(1)}\cdot\sin(\xi) - \cancel{\sin(\xi)} - \xi + \cancel{\sin(\xi)} - \xi$$
$$+ \cancel{\cos(1)\cos(\xi)} + \cancel{\sin(1)\sin(\xi)} - \sin(1)\cos(\xi) + \sin(\xi)\cos(1)\Big]$$

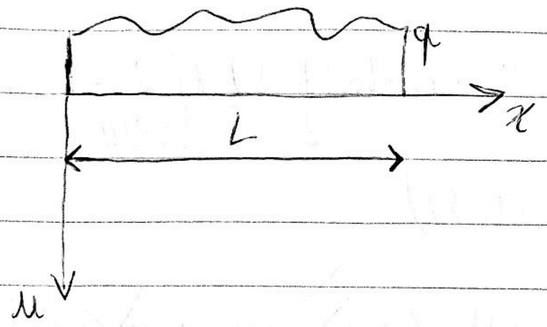
$$u(\xi) = \frac{1}{2}\Big[2\sin(1)\cancel{\cos(\xi)} + 2\frac{\sin^2(1)\cdot\sin(\xi)}{\cos(1)} - 2\sin(1)\cancel{\cos(\xi)} + 2\sin(\xi)\cos(1) +$$
$$+ 2\frac{\sin(\xi)}{\cos(1)} - 2\xi\Big]$$

$$u(\xi) = \frac{1}{2}\left[\frac{2\sin^2(1)\sin(\xi) + 2\sin(\xi)\cos^2(1) + 2\sin(\xi)}{\cos(1)} - 2\xi\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{4\sin(\xi)}{\cos(1)} - 2(\xi)\right] =$$
$$= 2\frac{\sin(\xi)}{\cos(1)} - \xi$$

- Resolver p/ $\hat{u}(0) = 0$ e $\hat{u}(1) = 1$ a partir de (11a)

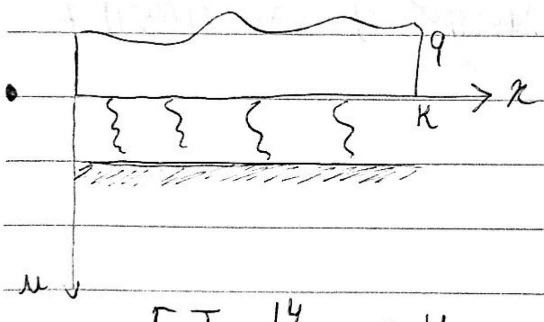
Soluções Fundamentais

- $EI \dfrac{d^4q}{dx^4} = q$ (teoria clássica)



$$EI \frac{d^4u^*}{dx^4} = \delta(x-\xi)$$

$$u^*(\xi, x) = \frac{|x-\xi|^3}{12EI}$$

- 

$$EI \frac{d^4u}{dx^4} + Ku = q$$

$$EI \frac{d^4u^*}{dx^4} + Ku^* = \delta(x-\xi)$$

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{2a^3} \cdot e^{\left(\frac{-a|x-\xi|}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \text{sen}\left(\frac{a|x-\xi|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a^4 = \frac{K}{EI}$$

Seja $\frac{d^2u}{dx^2} + f = 0$ $\qquad x=0,\ u=\hat{u}$

$\qquad x=L,\ \frac{du}{dx}=\hat{q}$

e

$$\frac{d^2u^*}{dx^2} = \delta(x-\xi)$$

Equação de Resíduos Ponderados

$$\int_0^L\left(\frac{d^2u}{dx^2}+f\right)u^*\,dx + (u-\hat{u})\bar{w}\Big|_{x=0} + (q-\hat{q})\bar{\bar{w}}\Big|_{x=L} = 0$$

Integrando por partes duas vezes:

$$\int_0^L \frac{d^2u}{dx^2}u^*\,dx = u^*\frac{du}{dx}\Big|_{x=0}^{L} - \frac{du^*}{dx}u\Big|_0^L + \int_0^L \frac{d^2u^*}{dx^2}u\,dx \qquad (**)$$

Substituindo (**) em (*) fazendo

$\bar{w} = -\frac{du^*}{dx}$ e $\bar{\bar{w}} = -u^*$, resulta:

$$u(\xi) = -\hat{u}.q^*\Big|_0 + u.q^*\Big|_L + qu^*\Big|_0 - \hat{q}.u^*\Big|_L - \int_0^L fu^*dx.$$

Equação da Onda

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{f = -\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial t^2}}$$

/ /

informação $\ddot{u}\Big|_{t_n} = \dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta t^2}$

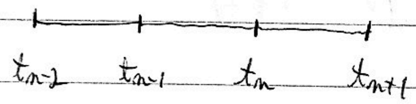
Então:

$$u(\xi) = -uq^*\Big|_0 + uq^*\Big|_L + qu^*\Big|_0 - qu^*\Big|_L + \frac{1}{c^2}\int_0^L u^* \ddot{u}\, dx$$

$\int_0^L u^* \ddot{u}\, dx \Rightarrow$ discretização do domínio

↳ célula

$$\ddot{u}\Big|_{t_{n+1}} = \frac{1}{\Delta t^2}\left[2u_{n+1} - 5u_n + 4u_{n-1} - u_{n-2}\right] \qquad \text{método de Houbolt}$$



$$u(t) = L_{n+1}(t)u_{n+1} + L_n(t)u_n + L_{n-1}(t)u_{n-1} + L_{n-2}(t)u_{n-2}$$

L: Polinômios de Lagrange

$$L_{n+1}(t) = \frac{(t - t_n)(t - t_{n-1})(t - t_{n-2})}{(t_{n+1} - t_n)(t_{n+1} - t_{n-1})(t_{n+1} - t_{n-2})}$$

De $u(t)$, pode-se calcular:

$\ddot{u}\Big|_{t = t_{n+1}}$ e obter a expressão do método de Houbolt

notação: $u_{n+1} = u(x, t_{n+1}), \ldots$

tilibra

$$u_{n+1}(\xi) = -u_{n+1} \cdot q^*\Big|_0 + u_{n+1} \cdot q^*\Big|_L + q_{n+1} \cdot u^*\Big|_0 - q_{n+1} \cdot u^*\Big|_L +$$

$$+ \frac{1}{c^2}\int_0^L u^* \cdot \frac{[2u_{n+1} - 5u_n + 4u_{n-1} - 2u_{n-2}]}{\Delta t^2}\, dx$$

$$u^*(\xi, x) = \frac{|x-\xi|}{2}$$

Seja agora:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau} = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$$

A equação de resíduos ponderados é:

$$\int_0^{t^+}\int_0^L \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right) u^*\, dx\, d\tau + \int_0^{t^+} (u - \hat{u})\bar{w}\Big|_{x=0} d\tau + \int_0^{t^+} (q - \hat{q})\bar{\bar{w}}\Big|_{x=L} d\tau = 0$$

Integrando por partes duas vezes em relação a x:

$$\int_0^{t^+}\left(u^* \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^L - q^* u\Big|_0^L\right) d\tau + \int_0^{t^+}\int_0^L u \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}\, dx\, d\tau - \frac{1}{c^2}\int_0^{t^+}\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} u^*\, dx\, d\tau +$$

$$+ \int_0^{t^+} (u - \hat{u})\bar{w}\Big|_{x=0} d\tau + \int_0^{t^+} (q - \hat{q})\bar{\bar{w}}\Big|_{x=L} d\tau = 0 \qquad (\Delta)$$

Considerando agora:

/ /

$$\int_0^{t^+} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} u^* d\tau = u^* \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t^+} - \frac{\partial u^*}{\partial \tau} u \Big|_{\tau=0}^{\tau=t^+} + \int_0^{t^+} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} u \, d\tau$$

$$= -u_0^* v_0 + v_0^* u_0 + \int_0^{t^+} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} u \, d\tau \qquad (11)$$

onde: $u_0^* = u^*\Big|_{\tau=0}$ $\qquad v_0^* = \frac{\partial u^*}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}$

$$v_0 = \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}$$

e

$$u^*\Big|_{\tau=t^+} = \frac{\partial u^*}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t^+} = 0$$

Substituindo (11) em (1) e fazendo $\bar{w} = -q^*$ e $\bar{\bar{w}} = -u^*$

$$\underbrace{\int_0^{t^+}\int_0^{L} \overbrace{\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right)}^{\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)} u \, dx \, d\tau}_{u(\xi,t)} = -\int_0^{t^+} q^* u \Big|_{x=0} d\tau + \int_0^{t^+} q^* u \Big|_{x=L} + \int_0^{t^+} u^* q \Big|_{x=0} d\tau -$$

$$- \int_0^{t^+} u^* q \Big|_{x=L} d\tau - \frac{1}{c^2} \int_0^{L} u_0^* v_0 \, dx + \frac{1}{c^2} \int_0^{L} v_0^* u_0 \, dx$$

$$u^* = u^*(x, t; \xi, \tau) = -\frac{c}{2} H\left[c(t-\tau) - |x-\xi| \right].$$

- dissertação → Viviane Costa