

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 0.983680$$

Para os pontos do domínio, os resultados são:

x	$\bar{u}(n=2)$	$\bar{u}(n=3)$	$u = \frac{2 \sin(x)}{\cos(1)} - x$
0.2	0.339712	0.535869	0.535401
0.4	1.050360	1.040810	1.041483
0.6	1.471942	1.489296	1.490098
0.8	1.824460	1.855802	1.855388
1.0	2.107914	2.114800	2.114815

Método dos Elementos Finitos

A ideia básica do método dos elementos finitos (MEF) consiste em dividir, inicialmente o domínio do problema em subdomínios de dimensões finitas, de tal maneira que o conjunto dos subdomínios seja igual ao domínio original. Em seguida, sobre cada domínio adota-se um comportamento aproximado, local, para as incógnitas do problema.

Em geral, esse comportamento local é descrito com o emprego de funções simples. Essa é a característica principal do MEF: utilizar aproximações locais nos subdomínios em vez de utilizar aproximações de caráter global.

Para a obtenção de respostas cada vez melhores, aumenta-se o número de subdomínios, mantendo o mesmo comportamento local, por adotado, em cada novo subdomínio, em vez de se adotar funções de ordem superior em

uma aproximação de caráter global. Os subdomínios são denominados Elementos Finitos.

Os Elementos Finitos são definidos por sua forma geométrica, pelas funções de aproximação adotadas e pelos tipos de problemas para os quais foram desenvolvidos. Cada elemento possui um determinado número de pontos nodais, ou nós, que podem ser internos ou externos.

Os nós externos fazem a conexão com os Elementos vizinhos. Nesses nós comuns a diferentes Elementos o valor das variáveis do problema é o mesmo, independentemente do Elemento que esteja sendo considerado.

Após a definição da malha de Elementos Finitos e do tipo de Elemento, as matrizes características correspondentes a cada Elemento podem ser formadas para, em seguida, ser agrupadas, formando um sistema global de equações. A solução desse sistema fornece os valores das incógnitas nos nós. Através do comportamento aproximado local, em qualquer ponto de um elemento as variáveis do problema são determinadas em função dos valores nodais dessas mesmas variáveis.

O trabalho de Turner, Clough, Martin e Topp: *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, publicado em 1956 no *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 23, pag. 805-823 é reconhecido como um dos primeiros a apresentar os fundamentos do MEF.

As bases teóricas do método foram melhor definidas no início da década de 60 com o estudo mais aprofundado dos métodos energéticos e das técnicas variacionais.

• Método dos Resíduos Ponderados

Se o domínio Ω é dividido em E subdomínios Ω_e , tais que:

$$\Omega = \sum_{e=1}^E \Omega_e \quad (1)$$

e se, em correspondência à divisão do domínio, o contorno Γ é dividido em B partes Γ_b , tais que

$$\Gamma = \sum_{b=1}^B \Gamma_b \quad (2)$$

Então a equação de resíduos ponderados, de caráter global, na qual as funções de aproximação são válidas em Ω e Γ :

$$\int_{\Omega} w_e \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_e \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (3)$$

é substituída por:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} w_e \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \sum_{b=1}^B \int_{\Gamma_b} \bar{w}_e \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0, \quad (4)$$

onde as funções de aproximação são definidas localmente, sendo válidas somente para Ω_e e Γ_b e não mais para Ω e Γ .

Se os integrais em (4) contêm derivadas de ordem "s" nos integrandos, deve-se assegurar que as funções de aproximação tenham derivadas de ordem (s-1) contínuas.

• Formulação fraca e o método de Galerkin

Resolva a equação

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0, \text{ com } u(0) = 0 \text{ e } u(1) = 1.$$

Em forma fraca da equação de resíduos ponderados é:

$$\int_0^1 \left(-\frac{dw}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} + \bar{u} + x \right) dx + w \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} = 0 \quad (5)$$

Obs: da equação (5), observa-se que é necessário que $\bar{u}$ (ou ϕ_i) e w sejam funções contínuas (a derivada de ordem zero deve ser contínua).

Por outro lado, a utilização da forma fraca da equação de resíduos ponderados

$$\int_0^1 w \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \bar{u} + x \right) dx = 0$$

requer uma continuidade das derivadas de primeira ordem de $\bar{u}$ (ou das funções ϕ_i).

Um conjunto de $(M+1)$ pontos é escolhido no domínio, isto é, no intervalo $0 \leq x \leq 1$, uma aproximação do tipo

$$\bar{u} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \phi_m \quad (6)$$

é adotada. Em (6), u_m é o valor da aproximação no nó m . Assim, as condições de contorno essenciais podem ser atendidas diretamente, especificando os valores nodais apropriados e fazendo, consequentemente, $E_0 = 0$. Na prática, os valores conhecidos só são introduzidos na etapa de solução do sistema de equações. Assim, no processo de formação do sistema de equações, todos os valores $u_1, u_2, \dots, u_{M+1}$ são considerados incógnitas.

Adotando-se o método de Galerkin, $u_\ell = \phi_\ell$, $1 \leq \ell$, $m \leq M+1$, e a equação (5) é reescrita como:

$$\int_0^1 \left(-\frac{d\phi_\ell}{dx} \sum_{m=1}^{M+1} u_m \frac{d\phi_m}{dx} + \phi_\ell \sum_{m=1}^{M+1} u_m \phi_m + \phi_\ell x \right) dx + \phi_\ell \frac{du}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad 1 \leq \ell \leq M+1 \quad (7)$$

Matricialmente tem-se um sistema do tipo:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{f} \quad (8)$$

onde os elementos da matriz $\underline{K}$ são dados por:

$$K_{\ell m} = \int_0^1 \left(-\frac{d\phi_\ell}{dx} \frac{d\phi_m}{dx} + \phi_\ell \phi_m \right) dx, \quad 1 \leq \ell, m \leq M+1 \quad (9)$$

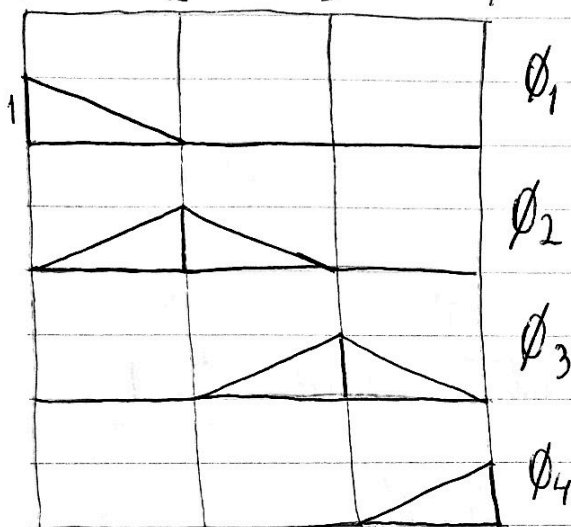
e os elementos do vetor $\underline{f}$ são dados por:

$$f_\ell = - \int_0^1 \phi_\ell x dx - \phi_\ell \frac{du}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1}, \quad 1 \leq \ell \leq M+1 \quad (10)$$

Interpretação das funções de ponderação

$\int_0^L u \, dx$, dividindo o domínio em três subdomínios, ou elementos, tem-se:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 \phi_1 + \bar{u}_2 \phi_2 + \bar{u}_3 \phi_3 + \bar{u}_4 \phi_4$$



Representação das ϕ_i , $i=1,2,3,4$ quando se adota uma aproximação linear.

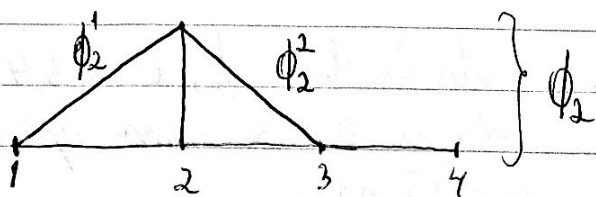
Na integração, de um ponto de vista global, pode-se escrever:

$$\int_0^L \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_1 & \phi_1 \phi_2 & \phi_1 \phi_3 & \phi_1 \phi_4 \\ \phi_2 \phi_1 & \phi_2 \phi_2 & \phi_2 \phi_3 & \phi_2 \phi_4 \\ \phi_3 \phi_1 & \phi_3 \phi_2 & \phi_3 \phi_3 & \phi_3 \phi_4 \\ \phi_4 \phi_1 & \phi_4 \phi_2 & \phi_4 \phi_3 & \phi_4 \phi_4 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} =$$

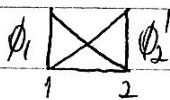
$$= \int_0^1 \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_1 & \phi_1 \phi_2 & 0 & 0 \\ \phi_2 \phi_1 & \phi_2 \phi_2 & \phi_2 \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_3 \phi_2 & \phi_3 \phi_3 & \phi_3 \phi_4 \\ 0 & 0 & \phi_4 \phi_3 & \phi_4 \phi_4 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Observa-se que a função ϕ_2 , por exemplo, é constituída por ϕ_2^1 (do elemento 1) e ϕ_2^2 (do elemento 2)



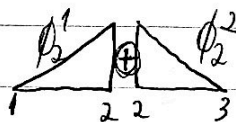
Assim: (2ª linha da matriz $*$)

$$1) \int_0^1 \phi_2 \phi_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} \phi_2^1 \phi_1 dx : \text{integração restrita ao elemento 1}$$

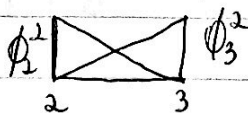


$$\phi_1 = \phi_1^1$$

$$2) \int_0^1 \phi_2 \phi_2 dx = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \phi_2^1 \phi_2^2 dx}_{\text{elemento 1}} + \underbrace{\int_{x_2}^{x_3} \phi_2^2 \phi_2^2 dx}_{\text{elemento 2}}$$



$$3) \int_0^1 \phi_2 \phi_3 dx = \int_{x_2}^{x_3} \phi_2^2 \phi_3^2 dx$$



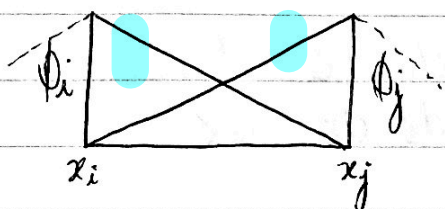
Os outros termos são calculados de forma análoga.

Do ponto de vista computacional, é mais vantajoso trabalhar com os elementos e calcular as suas contribuições para a formação da matriz K .

As contribuições de um elemento típico e , definido em $x_i \leq x \leq x_j$ e, portanto, de comprimento $h_e = x_j - x_i$, envolvem as funções ϕ_i e ϕ_j , definidas como (quando se adota uma aproximação linear):

$$\phi_i = \phi_i^e = 1 - \frac{(x - x_i)}{x_j - x_i} = 1 - \frac{(x - x_i)}{h_e}$$

$$\phi_j = \phi_j^e = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_i}{h_e}$$



As contribuições de um elemento "e" são calculadas a partir de:

$$\int_{x_i}^{x_j} \phi_i^e \phi_j^e dx, \quad \int_{x_i}^{x_j} \phi_j^e \phi_i^e dx$$

$$\int_{x_i}^{x_j} \phi_i^e \phi_i^e dx \quad \text{e} \quad \int_{x_i}^{x_j} \phi_j^e \phi_j^e dx$$

Observar que as duas primeiras integrais correspondem às integrais nas observações (1) e (3), enquanto que a terceira integral corresponde à segunda parcela da integral da observação (2) e a quarta integral corresponde à primeira parcela da integral da observação (2).

Para a equação dada, os elementos da matriz K correspondentes a um elemento genérico "e", $x_i \leq x \leq x_j$ são calculados como (ver equação (9)):

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e = \int_{x_i}^{x_j} \left(- \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} + \phi_i \phi_j \right) dx \quad \phi_i \begin{array}{|c|} \hline \diagup \quad \diagdown \\ \hline \end{array} \phi_j$$

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e = \int_{x_i}^{x_j} \left[- \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{(x-x_i)}{h_e} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{x-x_i}{h_e} \right) + \left(1 - \frac{(x-x_i)}{h_e} \right) \left(\frac{x-x_i}{h_e} \right) \right] dx$$

fazendo $X = x - x_i$, $dx = dx$ e $\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{dX} \frac{dX}{dx} = \frac{d\phi}{dX}$
 $\hookrightarrow \begin{cases} x = x_i \Rightarrow X = 0 \\ x = x_j \Rightarrow X = h_e \end{cases}$

$$\begin{aligned} K_{ij}^e = K_{ji}^e &= \int_0^{h_e} \left[- \frac{d}{dX} \left(1 - \frac{X}{h_e} \right) \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h_e} \right) - \left(1 - \frac{X}{h_e} \right) \frac{X}{h_e} \right] dX \\ &= \int_0^{h_e} \left[- \frac{(-1) \cdot 1}{h_e} + \frac{X}{h_e} - \frac{X^2}{h_e^2} \right] dX = \left(\frac{X}{h_e^2} + \frac{X^2}{2h_e} - \frac{X^3}{3h_e^2} \right) \Big|_{X=0}^{X=h_e} \end{aligned}$$

finalmente:

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e = \frac{1}{h_e} + \frac{h_e}{6}$$

$$K_{ii}^e = \int_0^{h_e} \left[- \frac{d}{dX} \left(1 - \frac{X}{h_e} \right) \frac{d}{dX} \left(1 - \frac{X}{h_e} \right) + \left(1 - \frac{X}{h_e} \right) \left(1 - \frac{X}{h_e} \right) \right] dX$$

$$K_{jj}^e = \int_0^{h_e} \left[- \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h_e} \right) \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{h_e} \right) + \frac{X}{h_e} \frac{X}{h_e} \right] dX$$

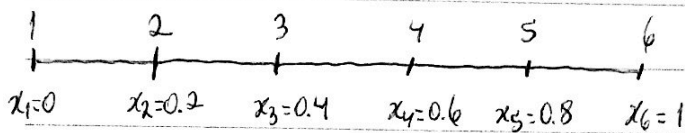
$$K_{ii}^e = K_{jj}^e = -\frac{1}{h_e} + \frac{h_e}{3}$$

Pode-se escrever

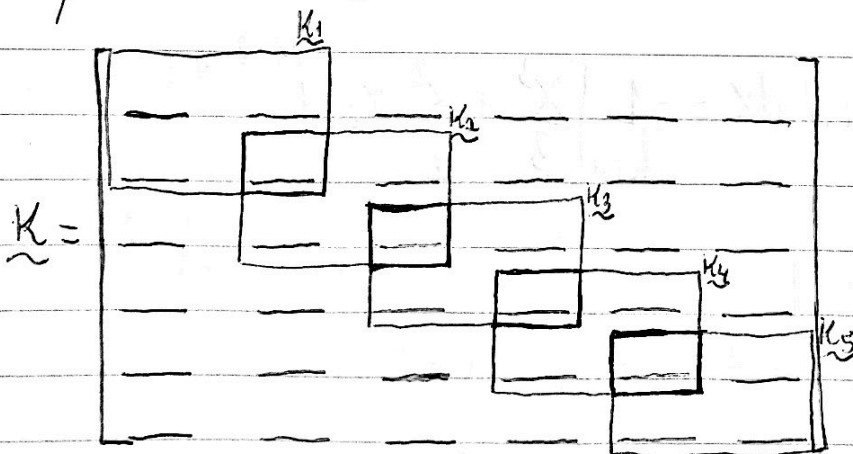
$$\underline{K_e} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{h_e} + \frac{h_e}{3}\right) & \left(\frac{1}{h_e} + \frac{h_e}{6}\right) \\ \left(\frac{1}{h_e} + \frac{h_e}{6}\right) & \left(-\frac{1}{h_e} + \frac{h_e}{3}\right) \end{bmatrix}$$

A posição da matriz $\underline{K_e}$ na matriz global $\underline{K}$ depende dos valores de i e de j .

Fazendo $E=M=5$, o domínio $[0,1]$ será dividido em cinco elementos de mesmo comprimento: $h_1=h_2=h_3=h_4=h_5=h=\frac{1}{5}$.



Esquematicamente



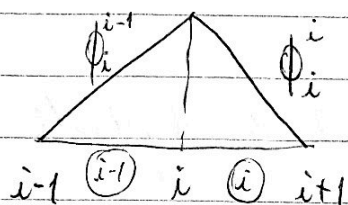
, assim:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{6}\right) & & & \\ \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{6}\right) & 2\left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{6}\right) & & \\ & \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{6}\right) & 2\left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{6}\right) & \\ & & \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{6}\right) & 2\left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{6}\right) \\ & & & \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{6}\right) & 2\left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{6}\right) \\ & & & & \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{6}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}$$

02/08/2017

• Formação do vetor f

Para um nó qualquer, o elemento correspondente do vetor f é composto por duas parcelas: a contribuição do elemento $(i-1)$ e a do elemento i



• Cálculo da contribuição do elemento $(i-1)$:

$$f_x^{i-1} = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) x dx$$

$$X = x - x_{i-1}$$

$$dX = dx$$

$$f_x^{i-1} = - \int_0^{h_{i-1}} \frac{X}{h_{i-1}} (X + x_{i-1}) dX = \frac{-1}{h_{i-1}} \left[\frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} x_{i-1} \right]_{X=0}^{X=h_{i-1}}$$

$$f_x^{i-1} = - \left(\frac{h_{i-1}^2}{3} + \frac{h_{i-1}}{2} x_{i-1} \right)$$

• Cálculo da contribuição do elemento i

$$f_x^i = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(1 - \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} \right) x dx$$

$$X = x - x_i$$

$$dX = dx$$

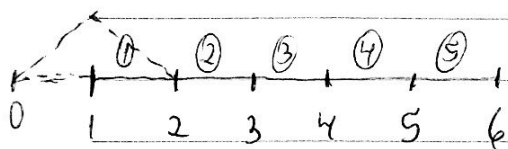
$$f_x^i = - \int_0^{h_i} \left(1 - \frac{X}{h_i} \right) (X + x_i) dX$$

$$f_i^i = - \int_0^{h_i} \left(x + x_i - \frac{x^2}{h_i} - \frac{x x_i}{h_i} \right) dx$$

$$= - \left[\frac{x^2}{2} + x_i \cdot x - \frac{x^3}{3h_i} - \frac{x^2 x_i}{2h_i} \right]_{x=0}^{x=h_i}$$

$$\Pi f_i^i = - \left(\frac{h_i^2}{6} + \frac{h_i x_i}{2} \right)$$

Assim: $f_i = f_i^{i-1} + f_i^i$



Elementos do vetor f

• No 1: $f_1 = \cancel{f_1^0} + f_1^1$ $-\left(\frac{h^2}{3} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^2}{2} \right) = -\frac{2h^2 + h^2 + 3h^2}{6} = -h^2$

$f_1 = - \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h x_1}{2} \right) = -\frac{h^2}{6}$ $-\left(\frac{h^2}{3} + 0 \right) - \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h h}{2} \right)$

• No 2: $f_2 = f_2^1 + f_2^2$ $-\left(\frac{h^2}{3} + \frac{h x_1}{2} \right) - \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h x_2}{2} \right) = -h^2$

$= - \left(\frac{h^2}{3} + \frac{h x_1}{2} \right) - \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h x_2}{2} \right) = -h^2$

• No 3: $f_3 = f_3^2 + f_3^3$

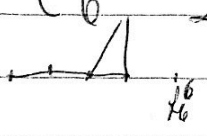
$= - \left(\frac{h^2}{3} + \frac{h x_2}{2} \right) - \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h x_3}{2} \right) = -2h^2$

• No 4: $f_4 = f_4^3 + f_4^4$

$= - \left(\frac{h^2}{3} + \frac{h x_3}{2} \right) - \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h x_4}{2} \right) = -3h^2$

no 5: $f_5 = f_5^4 + f_5^5$

$$= -\left(\frac{h^2}{3} + \frac{h}{2} \cdot x_4\right) - \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h}{2} \cdot x_5\right) = -4h^2$$

no 6: $f_6 = f_6^5 + f_6^6$ 

$$= -\left(\frac{h^2}{3} + \frac{h}{2} \cdot x_3\right) = -\frac{7h^2}{3}$$

$$\frac{2h^2 + 12h^2}{6} = \frac{14h^2}{6} = \frac{7h^2}{3}$$

levando em conta os termos

$-\left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=0}$, o vetor $\bar{f}$ é:

$$\bar{f} = \begin{Bmatrix} -\frac{h^2}{6} + \left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=0} \\ -h^2 \\ -2h^2 \\ -3h^2 \\ -4h^2 \\ -\frac{7h^2}{3} - \left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=1} \end{Bmatrix}$$

substituindo $h=0.2$ na matriz $\underline{K}$ e no vetor $\bar{f}$, o sistema de equações é

$$\begin{bmatrix} -\frac{74}{15} & \frac{131}{30} & & & & \\ \frac{131}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{131}{30} & & & \\ & \frac{131}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{131}{30} & & \\ & & \frac{131}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{131}{30} & \\ & & & \frac{131}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{131}{30} \\ & & & & \frac{131}{30} & -\frac{74}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{1}{150} - \left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=0} \\ \frac{4}{100} \\ \frac{8}{100} \\ \frac{12}{100} \\ \frac{16}{100} \\ \frac{7}{75} + \left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=1} \end{Bmatrix}$$

os valores de $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_6$ são iguais aos valores prescritos.
Portanto, são valores conhecidos:

$$\bar{u}_1 = \hat{u}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \bar{u}_6 = \hat{u}_6 = 1.$$

Substituindo os valores prescritos, o sistema de equações se reduz a:

$$\begin{bmatrix} -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} & & & \\ \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} & & \\ & \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} & \\ & & \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} & \\ & & & \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{4}{100} \\ \frac{8}{100} \\ \frac{12}{100} \\ \frac{16}{100} + \frac{151}{30} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.271926 \\ 0.525099 \\ 0.741514 \\ 0.904624 \end{bmatrix}$$

Nas equações removidas são obtidos os valores de $\frac{d\bar{u}}{dx}|_{x=0}$ e $\frac{d\bar{u}}{dx}|_{x=1}$.

• Na primeira equação:

$$-\frac{74}{15} \bar{u}_1 + \frac{151}{30} \bar{u}_2 = -\frac{1}{150} + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0}$$

$$\frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} = 1.375361$$

- Na sexta equação

$$\frac{131}{30} \bar{u}_5 - \frac{74}{15} \bar{u}_6 = -\frac{7}{75} - \left. \frac{d\bar{u}}{dx} \right|_{x=1}$$

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dx} \right|_{x=1} = 0.286726$$

A solução analítica é $u = \frac{2 \sin(x)}{\sin(1)} - x$;

Portanto: $\frac{du}{dx} = \frac{2 \cos(x)}{\sin(1)} - 1$, assim:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 1.376790$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 0.284185$$

- Se as condições de contorno forem:

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 1$$

A equação de resíduos ponderados é escrita como:

$$\int_0^1 w_2 \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \bar{u} + x \right) dx + \bar{u}_2 \cdot \left(\frac{d\bar{u}}{dx} - 1 \right) \Big|_{x=1} = 0$$

Efetuada integração por partes, obtém-se a forma-
praca da equação de resíduos ponderados (a condição
de contorno essencial em $x=0$ é atendida):

$$\int_0^1 \left(-\frac{dw_2}{dx} \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} + w_2 \bar{u} + w_2 x \right) dx + w_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} + \bar{w}_2 \left(\frac{d\bar{u}}{dx} - 1 \right) \Big|_{x=1} = 0$$

Fazendo $\bar{w}_2 = -w_2$

$$\int_0^1 \left(-\frac{dw_2}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} + \bar{u} + x \right) dx - w_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} + \bar{w}_2 \Big|_{x=1} = 0$$

Pelo método de Galerkin, a matriz K é a mesma do problema anterior. O novo sistema de equações é:

$$\begin{bmatrix} -\frac{74}{15} & \frac{151}{30} & & & & \\ \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} & & & \\ & \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} & & \\ & & \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} & \\ & & & \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} \\ & & & & \frac{151}{30} & -\frac{74}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{150} - \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} \\ \frac{4}{100} \\ \frac{8}{100} \\ \frac{12}{100} \\ \frac{16}{100} \\ \frac{7}{75} + 1 \end{bmatrix}$$

o valor de w_2^*

Como $\bar{u}_1 = \bar{u}_1$, a primeira equação pode ser eliminada. Substituindo $\bar{u}_1 = 0$ nas outras equações, o sistema de equações é reescrito como:

$$\begin{bmatrix} -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} & & & & \\ \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} & & & \\ & \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} & & \\ & & \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} & \\ & & & \frac{151}{30} & -\frac{148}{15} & \frac{151}{30} \\ & & & & \frac{151}{30} & -\frac{74}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{100} \\ \frac{8}{100} \\ \frac{12}{100} \\ \frac{16}{100} \\ \frac{82}{75} \end{bmatrix}$$

Resolvendo:

04/08/2017 Prova 16/08
↳ MDF e Resíduos Ponderados.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.533529 \\ 1.037911 \\ 1.485158 \\ 1.849350 \\ 2.108663 \end{bmatrix}$$

O valor de $\frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0}$ é calculado como:

$$-\frac{74}{15} \bar{u}_1 + \frac{151}{30} \bar{u}_2 = -\frac{1}{150} + \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0}$$

$$\frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} = 2.692096$$

A solução analítica é: $u = 2 \frac{\sin(x)}{\cos(1)} - x$

$$\text{Assim: } \frac{du}{dx} = 2 \frac{\cos(x)}{\cos(1)} - 1 \quad \text{e} \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = 2.701631$$

Método dos Elementos de Contorno

Seja a equação diferencial linear não homogênea, válida para todo x , na qual não são impostas condições de contorno:

$$L(u(x)) = f(x) \quad (1),$$

onde $L()$ é um operador linear de coeficientes constantes. Quando o termo $f(x)$ é substituído por um operador Delta de Dirac, $\delta(x-x')$, no qual x' é um parâmetro, a equação (1) é reescrita como: