# Resíduos Ponderados

Seja um problema descrito pela equação diferencial

$\mathcal{L}(u) = b$ em $\Omega$ (1)

sujeito às condições de contorno:

$\mathcal{S}(u) = g$ em $\Gamma$ (2)

onde $\mathcal{L}$ e $\mathcal{S}$ são operadores diferenciais lineares.

Devido às dificuldade ou impossibilidade de obtenção da solução analítica do problema, ela pode ser aproximada (substituída) por uma função $\bar{u}$, que tenha um grau de continuidade necessário para tornar o lado esquerdo da equação (1) não identicamente nulo e que pode, ou não, atender as condições de contorno do problema.

A função aproximada $\bar{u}$ pode ser definida como:

$$\bar{u} = \beta + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n \quad (3)$$

onde $\beta$ é uma função conhecida, incluída para satisfazer as condições de contorno, isto é, $\beta|_\Gamma = u|_\Gamma$, $\alpha_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, são coeficientes ainda não determinados e $\phi_n$ são funções de forma linearmente independentes e identicamente nulas no contorno. Além disso, as funções $\phi_n$ devem ser tais que a aproximação melhore quando o número $N$ cresce, ou seja, o conjunto de funções $\phi_n$ deve obedecer ao critério de completitude, dado por:

$$\lim_{N \to \infty} \left\{ \beta + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n \right\} = u \quad (4)$$

Se, na solução aproximada $\bar{u}$ não se inclui uma função $\beta$ que atende às condições de contorno do problema, isto é, se $\bar{u}$ é definida como:

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n \qquad (5)$$

A substituição de $\bar{u}$ em (1) e (2) gera dois erros ou resíduos:

$$\mathcal{L}(u) - b = 0 \qquad \varepsilon_\Omega = \mathcal{L}(\bar{u}) - b \neq 0 \text{ em } \Omega \qquad (6)$$

$$\mathcal{S}(u) - g = 0 \qquad \varepsilon_\Gamma = \mathcal{S}(\bar{u}) - g \neq 0 \text{ em } \Gamma \qquad (7)$$

Utilizando uma solução como a definida em (3), somente $\varepsilon_\Omega$ será diferente de zero.

A ideia básica do método dos resíduos ponderados é tornar $\varepsilon_\Omega$ tão ~~pequeque~~ pequeno quanto o possível em $\Omega$ (o que equivale a tornar $\bar{u}$ tão próximo quanto possível de $u$). Assim, definindo um conjunto de funções de ponderação $W_l$, $l = 1, 2, \ldots, N$, o erro é distribuído em $\Omega$ da seguinte maneira (observar que a integral indicada é calculada $N$ vezes).

$$\int_\Omega W_l \cdot \varepsilon_\Omega \, d\Omega = 0 \qquad (8)$$

Substituindo (3) em (6) e a expressão resultante em (8), tem-se:

$$\int_\Omega W_l \left[ \mathcal{L}(\beta) + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathcal{L}(\phi_n) - b \right] d\Omega = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, N. \qquad (9)$$

Sendo o número de funções de ponderação igual ao de funções de forma, os coeficientes $\alpha_n$ são obtidos após a solução do sistema de equações

$$\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{f} \qquad (10)$$

no qual os elementos da matriz $\underset{\sim}{K}$ e os do vetor $\underset{\sim}{f}$ são definidos como:

$$K_{ln} = \int_{\Omega} W_l \, \mathcal{L}(\phi_n) \, d\Omega \qquad (11)$$

e

$$f_l = \int_{\Omega} W_l \left[ b - \mathcal{L}(\beta) \right] d\Omega \qquad (12)$$

As funções de ponderação devem constituir um conjunto linearmente independente.

Dependendo do conjunto de funções de ponderação adotado, obtém-se um esquema correspondente de resíduos ponderados.

Os esquemas mais comuns são:

1- método da colocação

A equação diferencial é satisfeita em um determinado número de pontos, denominados pontos de colocação.

Se a equação é satisfeita, então $\varepsilon_\Omega = 0$. Para problemas unidimensionais, a condição $\varepsilon_\Omega = 0$ pode ser escrita como: $\varepsilon_\Omega \big|_{x_l} = 0, \ l = 1, 2, \ldots$

Como transformar $\int_{\Omega} W_l \cdot \varepsilon_\Omega \, d\Omega = 0$ em $\varepsilon_\Omega \big|_{x_l} = 0$?

Ou: qual deve ser a função $w_\ell$ para que $\varepsilon_\Omega|_{x_\ell} = 0$?

[ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$ (Delta de Dirac) ]

A função deve ser o delta de Dirac: $w_\ell = \delta(x - x_\ell)$.
Os elementos $K_{\ell n}$ e $f_\ell$ são definidos como:

$$K_{\ell n} = \int_\Omega \delta(x - x_\ell) \mathcal{L}(\phi_n(x)) \, d\Omega = \mathcal{L}(\phi_n(x_\ell)) \quad (14)$$

$$f_\ell = \int_\Omega \delta(x - x_\ell) [b - \mathcal{L}(\beta)] \, d\Omega = [b - \mathcal{L}(\beta)]\Big|_{x = x_\ell} \quad (15)$$

2- Método da Colocação por sub-domínios

Este também é um método de colocação no qual se impõe a condição de que a integral do erro é nula nos $N$ sub-domínios $\Omega_\ell$ nos quais o domínio original, $\Omega$, foi dividido, o que equivale a definir $w_\ell$ como:

$$w_\ell = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_\ell \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega_\ell \end{cases} \quad (16)$$

Os elementos $K_{\ell n}$ e $f_\ell$ são definidos como:

$$K_{\ell n} = \int_{\Omega_\ell} \mathcal{L}(\phi_n(x)) \, d\Omega \quad (17)$$

$$f_\ell = \int_{\Omega_\ell} [b - \mathcal{L}(\beta)] \, d\Omega \quad (18)$$

## 3- Método dos momentos

As funções de ponderação são potências de $x$:

$W_l = x^{l-1}$, $l = 1, 2, \dots N$ (19)

Assim, os elementos $K_{ln}$ e $f_l$ são definidos como:

$$K_{ln} = \int_{\Omega} x^{l-1} \cdot \mathcal{L}(\phi_n(x))\, d\Omega \quad (20)$$

$\to \in \Omega$

$$f_l = \int_{\Omega} x^{l-1} [b - \mathcal{L}(\beta)]\, d\Omega \quad (21)$$

## 4- Método de Galerkin

As funções de ponderação são as próprias funções $\phi_n$, então:

$$K_{ln} = \int_{\Omega} \phi_l \cdot \mathcal{L}(\phi_n(x))\, d\Omega \quad (22)$$

$$f_l = \int_{\Omega} \phi_l [b - \mathcal{L}(\beta)]\, d\Omega \quad (23)$$

Vantagem computacional: geralmente a matriz $\underset{\sim}{K}$ do sistema de equações (10) é simétrica.

Exemplo 1: Resolver a equação

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0,$$

com $u(0) = 0$, $u(1) = 1$

utilizando o método da colocação. Utilizar 1 e 2 parâmetros.

Solução: Se as condições de contorno são atendidas, pode-se escrever, quando se utiliza somente um parâmetro:

$\bar{u}(x) = \beta(x) + \alpha . \phi(x)$

$\phi$, $\beta \to$ escolhidos p/ satisfazer as condições de contorno

$\phi \to$ acompanha a mesma ordem da derivada

$\bar{u}(x) = x + \alpha . x(x-1)$

$\bar{u} = x + \alpha x^2 - \alpha x$

$\bar{u}' = 1 + 2\alpha x - \alpha$

$\bar{u}'' = 2\alpha$

$\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ou $\beta = x$

$\phi(x) = ?$ $\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi(1) = 0 \end{cases}$

O erro $\varepsilon_\Omega$ é calculado como:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + \bar{u} + x = \alpha . (x^2 - x + 2) + 2x$$

$2\alpha + \alpha x^2 - \alpha x + x + x$

$\alpha(x^2 - x + 2) + 2x$

0 — $x_1 = \frac{1}{2}$ — 1

↳ ponto de colocação

Adotando $x = \frac{1}{2}$ como ponto de colocação, tem-se:

$$\int_0^1 \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)\left[\alpha(x^2 - x + 2) + 2x\right] dx = 0$$

$\left[\int \delta(x-a) f(x) dx = f(a)\right]$

então

$$\left[\alpha(x^2 - x + 2) + 2x\right]\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0$$

$$\alpha\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2\right) + 2 . \frac{1}{2} = 0$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{4}{7}}$$

A solução aproximada é:

$$\boxed{\bar{u}(x) = x - \frac{4}{7} x(x-1)}$$

Com dois parâmetros, pode-se fazer:

$$\bar{u} = x + \alpha_1 x^2 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^3 - \alpha_2 x^2$$

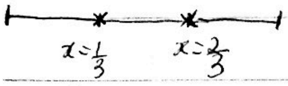
$$\bar{u}(x) = x + \alpha_1 . x(x-1) + \alpha_2 x^2 (x-1)$$

$$\bar{u}' = 1 + 2\alpha_1 x - \alpha_1 + 3\alpha_2 x^2 - 2\alpha_2 x$$

$$\bar{u}'' = 2\alpha_1 + 6\alpha_2 x - 2\alpha_2$$

O erro $\varepsilon_\Omega$, agora, é dado por: $2\alpha_1 + 6\alpha_2 x - 2\alpha_2 + x + \alpha_1 x^2 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^3 -$
$- \alpha_2 x^2 + x = \alpha_1(x^2 - x + 2) + \alpha_2(x^3 - x^2 + 6x - 2) + 2x$

$$\varepsilon_\Omega = \alpha_1 (x^2 - x + 2) + \alpha_2 (x^3 - x^2 + 6x - 2) + 2x$$




Adotando os pontos de colocação $x_1 = \frac{1}{3}$ e $x_2 = \frac{2}{3}$, a equação de resíduos ponderados pode ser escrita como:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \varepsilon_\Omega \, dx = 0$$

O resíduo $\varepsilon_\Omega$ pode ser reescrito como:

$$\varepsilon_\Omega = \left[ (x^2 - x + 2) \quad (x^3 - x^2 + 6x - 2) \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + 2x$$

Assim:

$$\int_0^1 \begin{matrix} \delta(x - 1/3) \\ \delta(x - 2/3) \end{matrix} \left[ (x^2 - x + 2) \quad (x^3 - x^2 + 6x - 2) \right] dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = - \int_0^1 \begin{Bmatrix} \delta(x - 1/3) \\ \delta(x - 2/3) \end{Bmatrix} 2x \, dx$$

Após a integração:

$$\begin{bmatrix} \frac{16}{9} & -\frac{2}{27} \\ \frac{16}{9} & \frac{50}{27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

resolvendo: $\alpha_1 = -\frac{81}{208}$ ; $\alpha_2 = -\frac{9}{26}$.

A solução aproximada é:

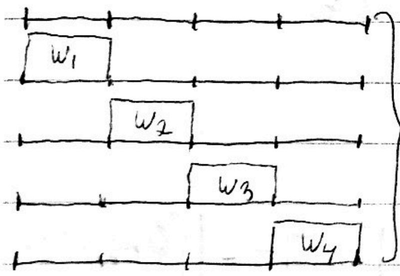
$$\bar{u}(x) = x - \frac{81}{208}x(x-1) - \frac{9}{26}x^2(x-1)$$

Pode-se comparar os valores aproximados com os valores exatos, por exemplo, em $x = 0.2, 0.4, 0.6$ e $0.8$:

| $x$ | Analítica | $\bar{u}_1$ (1 parâmetro) | $\bar{u}_2$ (2 parâmetros) |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 0.272195 | 0.291429 | 0.273385 |
| 0.4 | 0.525366 | 0.537143 | 0.526692 |
| 0.6 | 0.742037 | 0.737143 | 0.743308 |
| 0.8 | 0.905005 | 0.891429 | 0.902032 |

Exemplo 2: Idem, utilizando o método da colocação por sub-domínios.

solução: com somente um parâmetro, $w = 1$ para $0 \le x \le 1$.




interpretação para 4 parâmetros

A equação de resíduos ponderados é:

$$\int_0^1 w\,\varepsilon_\Omega\,dx = \int_0^1 \varepsilon_\Omega\,dx = 0$$

adotando $\bar{u}(x) = x + \alpha x(x-1)$,

$$\varepsilon_\Omega = \alpha(x^2 - x + 2) + 2x$$

Portanto:

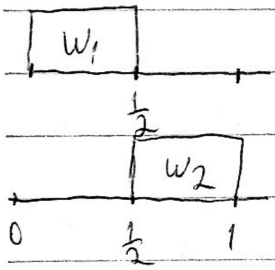
$$\int_0^1 [\alpha(x^2 - x + 2) + 2x]\, dx = 0$$

$$\alpha\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} + 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{6}{11}}$$

A solução aproximada é: $\boxed{\bar{u}(x) = x - \frac{6}{11}x(x-1)}$.

• Para 2 parâmetros:

Utilizando o ponto $x = \frac{1}{2}$, dividir o domínio $[0,1]$ em dois sub-domínios $[0,\frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2},1]$, as equações de resíduos ponderados são:



$$\int_0^{1/2} \varepsilon\Omega\, dx = 0$$

$$\int_{1/2}^1 \varepsilon\Omega\, dx = 0$$

Pode-se adotar:

$\bar{u}(x) = x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1)$, consequentemente

$$\varepsilon\Omega = \begin{bmatrix}(x^2 - x + 2) & (x^3 - x^2 + 6x - 2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix} + 2x$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \int_0^{1/2}(x^2 - x + 2)\,dx & \int_0^{1/2}(x^3 - x^2 + 6x - 2)\,dx \\ \int_{1/2}^1 (x^2 - x + 2)\,dx & \int_{1/2}^1 (x^3 - x^2 + 6x - 2)\,dx \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\int_0^{1/2} 2x\,dx \\ \int_{1/2}^1 2x\,dx\end{bmatrix}$$

integrando:

05/07/2017

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{12} & -\frac{53}{192} \\ \frac{11}{12} & \frac{229}{192} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

resolvendo: $\alpha_1 = -\frac{194}{517}$, $\alpha_2 = -\frac{16}{47}$,

a solução aproximada é: $\bar{u}(x) = x - \frac{194}{517} x(x-1) - \frac{16}{47} x^2(x-1)$

| $x$ | Analítica | $\bar{u}_1$ (1P) | $\bar{u}_2$ (2P) |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 0.272195 | 0.287273 | 0.270932 |
| 0.4 | 0.525566 | 0.530909 | 0.522739 |
| 0.6 | 0.742037 | 0.730909 | 0.739079 |
| 0.8 | 0.905005 | 0.887273 | 0.903613 |

Exemplo 3: Resolver o problema anterior utilizando o método dos momentos.

solução: quando se utiliza somente um parâmetro, o método dos momentos é igual ao método da colocação por subdomínios.

Quando se adota

$$\bar{u} = x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1)$$

as equações de resíduos ponderados são:

$$\int_0^1 \varepsilon_\Omega \, dx = 0 \quad e \quad \int_0^1 x \, \varepsilon_\Omega \, dx = 0$$

Em forma matricial:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \left[ (x^2 - x + 2) \quad (x^3 - x^2 + 6x - 2) \right] dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = -\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} 2x\,dx$$

ou $$\int_0^1 \begin{bmatrix} (x^2 - x + 2) & (x^3 - x^2 + 6x - 2) \\ (x^3 - x^2 + 2x) & (x^4 - x^3 + 6x^2 - 2x) \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = -\int_0^1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2x^2 \end{bmatrix} dx$$

Após a integração:

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{6} & \frac{11}{12} \\ \frac{11}{12} & \frac{19}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$$, resolvendo: $\alpha_1 = -\frac{244}{649}$ e $\alpha_2 = \frac{-20}{59}$

A solução aproximada é:

$$\bar{u} = x - \frac{244}{649} x(x-1) - \frac{20}{59} x^2(x-1),$$

os seguintes valores são obtidos

| $x$ | Método dos Momentos |
|---|---|
| 0.2 | 0.271002 |
| 0.4 | 0.522773 |
| 0.6 | 0.739045 |
| 0.8 | 0.903544 |

Exemplo 4: idem, utilizando o método de Galerkin.

Solução: se $\bar{u} = x + \alpha \underbrace{x(x-1)}_{\phi}$

A equação de resíduos ponderados, para o método de Galerkin, é:

$$\int_0^1 \phi \, \varepsilon_\Omega \, dx = 0$$

Substituindo as expressões de $\phi$ e de $\varepsilon_\Omega$ na integral, tem-se:

$$\int_0^1 x(x-1)\left[\alpha(x^2-x+2)+2x\right]dx = 0,$$

então:

$$\alpha\int_0^1 (x^2-x)(x^2-x+2)\,dx = -2\int_0^1 x(x^2-x)\,dx$$

$$\alpha\int_0^1 (x^4-2x^3+3x^2-2x)\,dx = -2\int_0^1 (x^3-x^2)\,dx$$

Após a integração, obtém-se: $\alpha = -\frac{5}{9}$

A solução aproximada é $\bar{u} = x - \frac{5}{9}x(x-1)$.

- Com dois parâmetros, pode-se escrever:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix} \varepsilon_\Omega \, dx = 0$$

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} x(x-1) \\ x^2(x-1)\end{bmatrix}\left[(x^2-x+2) \quad (x^3-x^2+6x-2)\right]dx \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = -2\int_0^1 \begin{bmatrix} x(x-1)\\ x^2(x-1)\end{bmatrix} x\,dx$$

ou ainda

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} (x^4-2x^3+3x^2-2x) & (x^5-2x^4+7x^3-8x^2+2x) \\ (x^5-2x^4+3x^3-2x^2) & (x^6-2x^5+7x^4-8x^3+2x^2) \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = -2\int_0^1 \begin{bmatrix} (x^3-x^2) \\ (x^4-x^3) \end{bmatrix} dx$$

Integrando:

$$\begin{bmatrix} -3/10 & -3/20 \\ -3/20 & -\frac{13}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$, resolvendo: $\alpha_1 = -\frac{142}{369}$ e $\alpha_2 = -\frac{14}{41}$,

assim: $\bar{u} = x - \frac{142}{369}x(x-1) - \frac{14}{41}x^2(x-1)$

Os valores aproximados podem ser comparados:

| $x$ | $G_1$ | $G_2$ |
|---|---|---|
| 0.2 | 0.288889 | 0.272499 |
| 0.4 | 0.533333 | 0.525138 |
| 0.6 | 0.733333 | 0.741528 |
| 0.8 | 0.888889 | 0.905279 |

* Se a solução aproximada $\bar{u}$, como definida em (5), não satisfaz as condições de contorno, então o resíduo $\varepsilon_\Gamma$ também deve ser ponderado no contorno e a equação de resíduos ponderados deve ser escrita como:

$$\int_\Omega W_l \varepsilon_\Omega \, d\Omega + \int_\Gamma \bar{W}_l \varepsilon_\Gamma \, d\Gamma = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, N \qquad (24)$$

O sistema de equações gerado por (24) também pode ser representado como:

/ /

$$\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{f} \qquad (25)$$

onde, agora:

$$K_{ln} = \int_\Omega w_l \mathcal{L}(\phi_n)\, d\Omega + \int_\Gamma \bar{w}\, \mathcal{S}(\phi_n)\, d\Gamma \qquad (26)$$

e

$$f_l = \int_\Omega w_l\, b\, d\Omega + \int_\Gamma \bar{w}_l\, g\, d\Gamma \qquad (27)$$

- Se o problema estudado apresenta condições de contorno naturais, a avaliação das integrais

$$\int_\Gamma \bar{w}_l\, \varepsilon_\Gamma\, d\Gamma$$

que aparecem na equação (24) pode apresentar dificuldades se o contorno $\Gamma$ é descrito por funções não lineares. Para evitar dificuldades adicionais à determinação das soluções aproximadas, o termo que contém o operador $\mathcal{L}$ na integral de domínio da equação (24):

$$\int_\Omega \bar{w}_l\, \varepsilon_\Omega\, d\Omega = \int_\Omega w_l [\mathcal{L}(\bar{u}) - b]\, d\Omega$$

pode ser integrado por partes e reescrito genericamente como:

$$\int_\Omega w_l \cdot \mathcal{L}(\bar{u})\, d\Omega = \int_\Omega C(w_l)\, \mathcal{D}(\bar{u})\, d\Omega + \int_\Gamma w_l \cdot \mathcal{E}(\bar{u})\, d\Gamma \qquad (28)$$

07/07/2017

Em (28), $C$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ são operadores diferenciais lineares de ordem inferior à do operador $\mathcal{L}$. Substituindo (28) em (24), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} C(w_\ell)\,\mathcal{D}(\bar{u})\,d\Omega - \int_{\Omega} w_\ell\, b\, d\Omega + \int_{\Gamma} [\bar{w}_\ell\, \varepsilon_\Gamma + w_\ell\, \mathcal{E}(\bar{u})]\, d\Gamma = 0 \qquad (29)$$

A equação (29) é denominada, usualmente forma fraca da equação de resíduos ponderados.

Na equação de contorno em (29) é possível eliminar a integral que envolve condições de contorno naturais mediante uma escolha apropriada da função de ponderação $\bar{w}_\ell$.

- Resolver a equação

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0 \,, \text{ com } u(0) = 0 \text{ e } u(1) = 1.$$

Utilizando uma solução aproximada que não atenda às condições de contorno do problema. Utilizar o método de Galerkin.

Solução: o contorno do problema é constituído pelos pontos $x=0$ e $x=1$ e o resíduo $\varepsilon_\Gamma$ é representado como:

$$\varepsilon_\Gamma : \begin{cases} (\bar{u} - 0)\big|_{x=0} = \varepsilon_\Gamma\big|_{x=0} \\ (\bar{u} - 1)\big|_{x=1} = \varepsilon_\Gamma\big|_{x=1} \end{cases}$$

A equação de resíduos ponderados é:

$$\int_0^1 w_\ell \, \varepsilon_\Omega \, dx + \bar{w}_\ell \, \varepsilon_\Gamma\Big|_{x=0} + \bar{w}_\ell \, \varepsilon_\Gamma\Big|_{x=1} = 0 \, ,$$

pode-se adotar:

$$\bar{u} = \alpha_i \phi_i , \quad \phi_i = x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Se $n = 3$, então

$$\bar{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

e

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + \bar{u} + x = \begin{bmatrix} 1 & x & (x^2+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + x$$

Adotando $\bar{w}_\ell = -w_\ell$, a equação de resíduos ponderados é escrita como:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & (x^2+2) \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} x \, dx +$$

$$\underbrace{- \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Bigg|_{x=0}}_{\varepsilon_\Gamma|_{x=0}} \underbrace{- \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} - 1 \right] \Bigg|_{x=1}}_{\varepsilon_\Gamma|_{x=1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & x & (x^2+2) \\ x & x^2 & (x^3+2x) \\ x^2 & x^3 & (x^4+2x^2) \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} dx - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Integrando e agrupando termos semelhantes, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 4/3 \\ -1/2 & -2/3 & 1/4 \\ -2/3 & -3/4 & -2/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -4/3 \\ -5/4 \end{bmatrix}$$, resolvendo encontra-se:

$\alpha_1 = -0,209174$ ; $\alpha_2 = 1,950459$ ; $\alpha_3 = -0,550459$

Assim:

$$\bar{u} = -0.209174 + 1.950459x - 0.550459x^2$$

| $x$ | $\bar{u}\ (\bar{w}_l = -w_l)$ | $\bar{u}\ (\bar{w}_l = w_l)$ |
|---|---|---|
| 0,0 | -0.209174 | 0.152203 |
| 0,2 | 0.158899 | 0.384780 |
| 0,4 | 0.482936 | 0.572497 |
| 0,6 | 0.762936 | 0.715354 |
| 0,8 | 0.998899 | 0.813351 |
| 1,0 | 1.190826 | 0.866489 |

• Outra opção: $\bar{w}_\ell = w_\ell$

O sistema de equações é:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3/2 & 10/3 \\ 3/2 & 4/3 & 9/4 \\ 4/3 & 5/4 & 28/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

Resolvendo:

$\alpha_1 = 0.152203$ ; $\alpha_2 = 1.275033$ ; $\alpha_3 = -0.560748$, então

$$\bar{u} = 0.152203 + 1.275033x - 0.560748x^2$$

*(testar opcional): $\bar{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$

• Resolver $\dfrac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0$ (Galerkin)

com $u(0) = 0$ e $\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=1} = 1$

solução: adotando $\phi_i = x^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tem-se:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i$$

a equação de resíduos ponderados, equação (24), é:

$$\int_0^1 w_\ell \underbrace{\left(\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + \bar{u} + x\right)}_{\varepsilon_\Omega} dx + \bar{w}_\ell \underbrace{\left.\left(\frac{d\bar{u}}{dx} - 1\right)\right|_{x=1}}_{\varepsilon_\Gamma} = 0 \qquad (*)$$

Observar que a condição de contorno em $x=0$ é automaticamente satisfeita quando $\phi_i = x^i$, $i=1,2,\dots,n$.

Integrando por partes o termo que contém $\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}$, encontra-se:

$$\int_0^1 w_\ell \frac{d^2\bar{u}}{dx^2}\,dx = w_\ell \frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dw_\ell}{dx}\cdot\frac{d\bar{u}}{dx}\,dx \qquad (**)$$

Substituindo (**) em (*):

$$-\int_0^1 \frac{dw_\ell}{dx}\cdot\frac{d\bar{u}}{dx}\,dx + \int_0^1 w_\ell \bar{u}\,dx + \int_0^1 w_\ell\, x\,dx + \boxed{w_\ell \frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=1}} - w_\ell \frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=0} +$$

$$+\boxed{\bar{w}_\ell \frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=1}} - \bar{w}_\ell\Big|_{x=1} = 0 \qquad (***)$$

Fazendo $\bar{w}_\ell = -w_\ell$ e como $w_\ell\Big|_{x=0} = 0$ (quando se emprega o método de Galerkin), a equação (***) se reduz a:

$$-\int_0^1 \frac{dw_\ell}{dx}\frac{d\bar{u}}{dx}\,dx + \int_0^1 w_\ell \bar{u}\,dx + \int_0^1 w_\ell\, x\,dx + w_\ell\Big|_{x=1} = 0$$

Adotando $n=2$:

$$\bar{u} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = [x \quad x^2]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = [1 \quad 2x]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

Utilizando Galerkin, $\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$ e $\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix}$

A equação de resíduos ponderados é:

$$-\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix} [1 \quad 2x]\, dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} [x \quad x^2]\, dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} x\, dx + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agrupando termos semelhantes

$$\left\{ -\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 2x & 4x^2 \end{bmatrix} dx + \int_0^1 \begin{bmatrix} x^2 & x^3 \\ x^3 & x^4 \end{bmatrix} dx \right\} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = -\int_0^1 \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} dx - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando a integração, o sistema de equações é: (*-1)

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 3/4 \\ 3/4 & 17/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

Resolvendo: $\alpha_1 = \frac{413}{139}$; $\alpha_2 = \frac{-120}{139}$

$$\bar{u} = \frac{413}{139} x - \frac{120}{139} x^2$$

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{413}{139} - \frac{240}{139} x \; ; \quad \left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=1} = \frac{173}{139} = 1,244604$$

- Adotando $n=3$

$$\bar{u} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = [x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix}$$

A equação de resíduos ponderados é:

$$-\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} x\,dx + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$\left\{ -\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 2x & 4x^2 & 6x^3 \\ 3x^2 & 6x^3 & 9x^4 \end{bmatrix} dx + \int_0^1 \begin{bmatrix} x^2 & x^3 & x^4 \\ x^3 & x^4 & x^5 \\ x^4 & x^5 & x^6 \end{bmatrix} dx \right\} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} dx + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Após a integração, o sistema de equações obtido é:

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 3/4 & 4/5 \\ 3/4 & 17/15 & 4/3 \\ 4/5 & 4/3 & \frac{58}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 5/4 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

A solução é: $\alpha_1 = 2.714125$

$\alpha_2 = -0.067530$

$\alpha_3 = -0.531795$

$$\bar{u} = 2.714125x - 0.067530x^2 - 0.531795x^3$$

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = 2.714125 - 0.13506x - 1.595385x^2$$

$$\left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=1} = 0.983680$$

Para os pontos do domínio, os resultados são:

| $x$ | $\bar{u}(n=2)$ | $\bar{u}(n=3)$ | $u = \frac{2\sinh(x)}{\cosh(1)} - x$ |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 0.539712 | 0.535869 | 0.535401 |
| 0.4 | 1.050360 | 1.040810 | 1.041483 |
| 0.6 | 1.471942 | 1.489296 | 1.490098 |
| 0.8 | 1.824460 | 1.855802 | 1.855388 |
| 1.0 | 2.107914 | 2.114800 | 2.114815 |

## Método dos Elementos Finitos

A idéia básica do método dos elementos finitos (MEF) consiste em dividir, inicialmente o domínio do problema em subdomínios de dimensões finitas, de tal maneira que o conjunto dos subdomínios seja igual ao domínio original. Em seguida, sobre cada domínio adota-se um comportamento aproximado, local, para as incógnitas do problema.

Em geral, esse comportamento local é descrito com o emprego de funções simples. Essa é a característica principal do MEF: utilizar aproximações locais nos subdomínios em vez de utilizar aproximações de caráter global.

Para a obtenção de respostas cada vez melhores, aumenta-se o número de subdomínios, mantendo o mesmo comportamento local, já adotado, em cada novo subdomínio, em vez de se adotar funções de ordem superior em