

CAP. 2: DIFUSÃO DE CALOR E DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR (QML) UNIDIMENSIONAIS (1D) EM REGIME PERMANENTE

CONCEITOS ENVOLVIDOS:

- MALHAS UNIFORMES E NÃO-UNIFORMES
- PROBLEMAS LINEARES E NÃO-LINEARES
- COORDENADAS CARTESIANAS E CILÍNDRICAS
- CONDIÇÕES DE CONTORNOS:
 - DIRICHLET
 - NEUMANN
 - ROBIN
- PRINCÍPIO DO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

2.1. PRINCÍPIO DO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

MODELO MATEMÁTICO GERAL PARA PROBLEMAS DE REGIME PERMANENTE:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{J} \phi)}_{\text{CONVECÇÃO}} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \phi)}_{\text{DIFUSÃO DE } \phi \text{ COM TERMO-PONTE}} + S_{\phi} \quad (2.1)$$

$$\text{ONDE: } \vec{\nabla}: \text{OPERADOR NABLA} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.2)$$

(SIST. COORDENADAS CARTESIANAS)

 ρ : MASSA ESPECÍFICA DO FLUIDO $[\text{kg/m}^3]$ Γ : COEFICIENTE DE TRANSPORTE: μ, κ, D $\phi = 1$ (EQ. CONSERVAÇÃO DA MASSA) $= u$ (EQ. CONSERVAÇÃO DA QUANT. DE MOVIMENTO LINEAR EM x) $= v$ (EQ. CONSERVAÇÃO DA QUANT. DE MOVIMENTO LINEAR EM y) $= w$ (EQ. CONSERVAÇÃO DA QUANT. DE MOVIMENTO LINEAR EM z) $= T$ (EQ. CONSERVAÇÃO DA ENERGIA TÉRMICA)

$$\vec{J} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w \quad (\text{VETOR VELOCIDADE}) \quad (2.3)$$

 S_{ϕ} : TERMO-PONTE DE CADA ϕ : $-\frac{\partial p}{\partial x}, \dot{q}, \dots$ $\vec{\nabla} \phi$: GRADIENTE DE ϕ $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$: DIVERGENTE DE $\vec{J}$

BASICAMENTE, A APLICAÇÃO DO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS A UM MODELO MATEMÁTICO, COMO O DA EQ. (2.1), É FEITA EM 4 ETAPAS:

1) DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DE CÁLCULO COM VOLUMES DE CONTROIS:

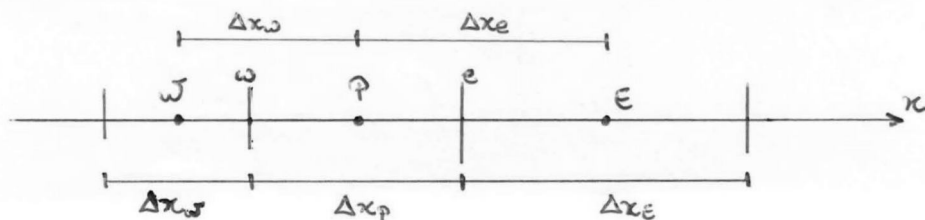


FIG. 2.1: MALHA UNIDIMENSIONAL NÃO-UNIFORME DE NÓS CENTRADOS ENTRE FACES.

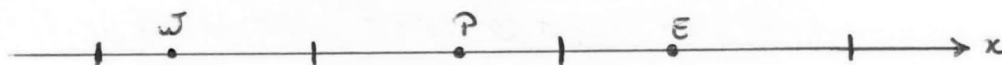


FIG. 2.2: MALHA UNIDIMENSIONAL NÃO-UNIFORME DE FACES CENTRADAS ENTRE NÓS

P: VOLUME DE CONTROLE OU NÓ GÊNÉRICO SOBRE O QUAL O MODELO MATEMÁTICO É DISCRETIZADO

J, E: VOLUMES DE CONTROLE (NÓS) VIZINHOS A P, À ESQUERDA E À DIREITA, RESPECTIVAMENTE

w, e: FACES DO VOLUME DE CONTROLE P, À ESQUERDA E À DIREITA, RESPECTIVAMENTE

MALHA: CONJUNTO DE TODOS OS NÓS OU VOLUMES DE CONTROLE QUE DISCRETIZAM O DOMÍNIO DE CÁLCULO.

NO CASO DE UMA MALHA DE NÓS CENTRADOS ENTRE FACES, A MALHA É GERADA DEFININDO-SE AS DIMENSÕES Δx_w , Δx_p , Δx_e E POSICIONANDO-SE OS NÓS NO CENTRO DE CADA VOLUME.

UMA MALHA É DITA UNIFORME QUANDO

$$\Delta x_w = \Delta x_e = \Delta x_J = \Delta x_P = \Delta x_E = \Delta x$$

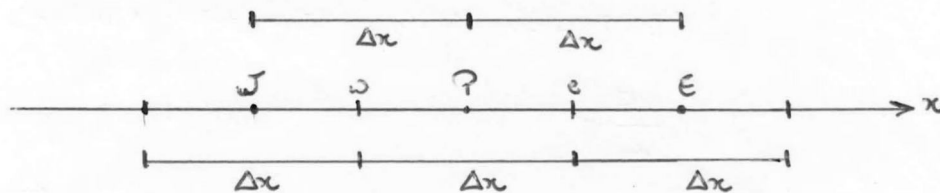


FIG. 2.3: MALHA UNIDIMENSIONAL UNIFORME

2) INTEGRAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO SOBRE CADA VOLUME DE CONTROLE (VC)

$$\iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \phi) dJ = \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \phi) dJ + \iint_{VC} S_\phi dJ \quad (2.4)$$

dJ : ELEMENTO DE VOLUME

3) APLICAÇÃO DO TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS:

DESSE MODO, A EQ. (2.4) RESULTA EM

$$\iint_A (\rho \vec{\nabla} \phi) \cdot \hat{n} dA = \iint_A (\Gamma \vec{\nabla} \phi) \cdot \hat{n} dA + \iiint_{Vc} S \phi dV \quad (2.5)$$

ONDE: dA : ELEMENTO DE ÁREA DA SUPERFÍCIE DO ELEMENTO DE VOLUME dV
 $\hat{n}$: VETOR NORMAL UNITÁRIO EM CADA PONTO DE dA .

DEVE-SE OBSERVAR QUE, ATÉ ESTE PONTO, NÃO FOI REALIZADA QUALQUER APROXIMAÇÃO NUMÉRICA.

4) APÓS A INTEGRAÇÃO DA EQ. (2.5), APLICAÇÃO DE FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO CONECTANDO O NÓ P A SEUS VIZINHOS.

AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO INTRODUZEM APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS.

2.2. CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA PAREDE PLANA COM GERAÇÃO DE CALOR E CONDIÇÕES DE CONTOURO DE DIRICHLET

2.2.1. MODELO MATEMÁTICO

EQUAÇÃO GERAL DA DIFUSÃO DE CALOR:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.6)$$

SIMPLIFICAÇÕES:

- REGIME PERMANENTE
- MODELO UNIDIMENSIONAL
- ÁREA DE SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE NA DIREÇÃO x

OBTEM-SE, NESSE CASO, A SEGUINTE EQUAÇÃO:

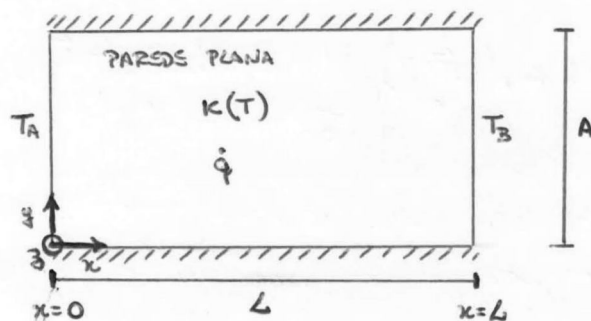
$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0 \quad (2.7)$$

QUE SE CONSTITUI EM UMA EQUAÇÃO DO TIPO POISSON. CONSIDERANDO-SE, ENTÃO, CONDIÇÕES DE CONTOURO (C.C.) DE DIRICHLET:

$$T(0) = T_A \quad (2.8)$$

$$T(L) = T_B \quad (2.9)$$

(VALORES CONHECIDOS DA TEMPERATURA NOS DOIS CONTOURNOS).



EXEMPLO: CONDUTOR ELÉTRICO
(EFEITO JOULE - $\dot{q}$)

FIG. 2.4: CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA PAREDE PLANA

ONDE: T : TEMPERATURA [$^{\circ}\text{C}$ ou K]

k : CONDUTIVIDADE TÉRMICA DO MATERIAL DA PAREDE [W/m K]

$\dot{q}$: TAXA VOLUMÉTRICA DE GERAÇÃO DE CALOR [W/m^3]

A : ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DA PAREDE [m^2]; CONSTANTE EM x .

2.2.2. VARIÁVEIS DE INTERESSE:

- CAMPO DE TEMPERATURAS, $T(x)$, DA EQ. (2.7)
- TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR (q) NOS CONTORNOS: (DA LEI DE FOURIER)

$$q|_{x=0} = q_0 = - \left[k A \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_{x=0} = - A \left[k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_{x=0} \quad (2.10)$$

$$q|_{x=L} = q_L = - A \left[k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_{x=L} \quad (2.11)$$

- TEMPERATURA MÉDIA DO DOMÍNIO, DEFINIDA POR

$$\bar{T} = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx \quad (2.12)$$

2.2.3. DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE.

INTEGRANDO-SE A EQ. (2.7) SOBRE O VOLUME DE CONTROLE P DA FIG. 2.1 (MALHA NÃO-UNIFORME DE NÓS CENTRADOS), OBTÉM-SE:

$$\int_3 \int_4 \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} \right] dx dy dz = 0 \quad (2.13)$$

SUS RESULTA EM

(6)

$$\left[\left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_w + \dot{q}_P \Delta x_P \right] A = 0 \quad (2.14)$$

ONDE SE OBSERVA QUE O VALOR DE $\dot{q}$ É AVALUADO NO NÓ P, SENDO CONSIDERADO CONSTANTE NO VOLUME DE CONTROLE P.

OUTRA POSSIBILIDADE DE OBTENÇÃO DA EQ. (2.14) É FEITA A SEGUIR: REESCREVENDO-SE A EQ. (2.7) COMO

$$\vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} T) + \dot{q} = 0 \quad (2.15)$$

E INTEGRANDO-SE A EQUAÇÃO ANTERIOR EM UM VOLUME DE CONTROLE P, APRESENTADO NA FIG. (2.1):

$$\iiint_{VC} [\vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} T) + \dot{q}] dV = 0 \quad (2.16)$$

APLICANDO-SE, ENTÃO, O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS:

$$\iint_S (\kappa \vec{\nabla} T) \cdot \hat{n} dA + \iiint_{VC} \dot{q} dx dy dz = 0 \quad (2.17)$$

RESULTANDO EM

$$\left[\left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_w + \dot{q}_P \Delta x_P \right] A = 0 \quad (2.18)$$

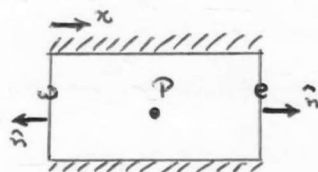


FIG. 2.5: VOLUME DE CONTROLE P, APRESENTANDO OS VETORES NORMAIS UNITÁRIOS NAS FACES W E E.

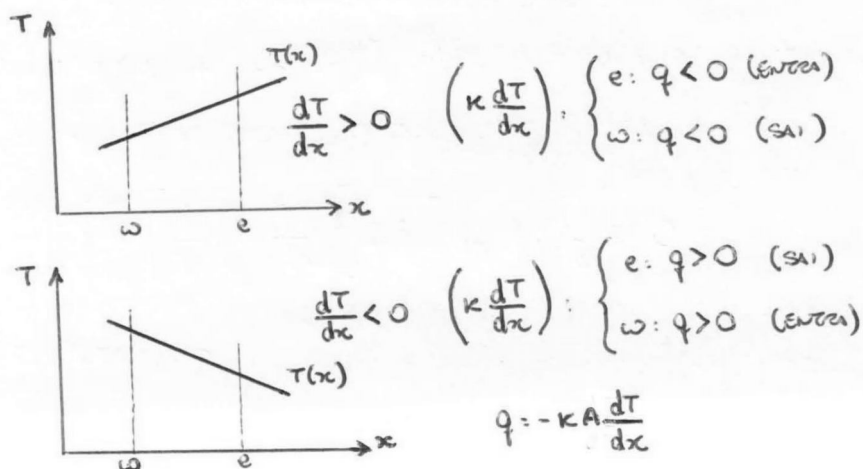


FIG. 2.6: PERFIS DE dT/dx E VALORES DE q .

OS TERMOS ENTRE PARENTÊSES DAS EQS. (2.14) E/W (2.18) SÃO APROXIMADOS COM FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES ENTRE OS NÓS, OU SEJA, CDS (CENTRAL DIFFERENCING SCHEME) OU DIFERENÇA CENTRAL:

$$\left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_e \approx K_e \frac{T_e - T_p}{\Delta x_e} \quad (2.19)$$

(mostre FIG.2.7-P.9)

$$\left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_w \approx K_w \frac{T_p - T_w}{\Delta x_w} \quad (2.20)$$

ALÉM DA INTERPRETAÇÃO DA APROXIMAÇÃO CDS COMO SENDO INTERPOLAÇÕES LINEARES, PODE-SE OBTER TAIS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO ATRAVÉS DE EXPANSSÕES DE SÉRIES DE TAYLOR:

$$T_p = T_e + \left. \frac{dT}{dx} \right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right) + \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.21)$$

$$T_e = T_e + \left. \frac{dT}{dx} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right) + \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.22)$$

SUBTRAINDO-SE A EQ. (2.21) DA EQ. (2.22), OBTÉM-SE:

$$T_e - T_p = \left. \frac{dT}{dx} \right|_e \Delta x_e + 2 \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + 2 \left. \frac{d^5T}{dx^5} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^5 \cdot \frac{1}{5!} + \dots \quad (2.23)$$

DA EQ. (2.23), ISOLANDO-SE $\left. \frac{dT}{dx} \right|_e$ OBTÉM-SE:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_e = \frac{T_e - T_p}{\Delta x_e} - 2 \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \frac{(\Delta x_e)^2}{2^3 \cdot 3!} - 2 \left. \frac{d^5T}{dx^5} \right|_e \frac{(\Delta x_e)^4}{2^5 \cdot 5!} + \dots \quad (2.24)$$

CONSIDERANDO-SE APENAS O PRIMEIRO TERMO DA EXPANSÃO DADA PELA EQ. (2.24) TEM-SE

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_e \approx \frac{T_e - T_p}{\Delta x_e} \quad (2.25)$$

QUE FOI EMPREGADA NA OBTENÇÃO DA EQ. (2.19).

OS VALORES DE K_w E K_e PODEM SER OBTIDOS CONFORME PATANKAR (p.44-46):

$$K_w = \frac{(\Delta x_w + \Delta x_p) K_w K_p}{(\Delta x_p K_w + \Delta x_w K_p)} \quad (2.26)$$

$$K_e = \frac{(\Delta x_p + \Delta x_e) K_p K_e}{(\Delta x_p K_e + \Delta x_e K_p)} \quad (2.27)$$

TAIS EXPRESSÕES RESULTAM EM q CONSTANTE ENTRE DOIS NÓS CONSECUTIVOS.

NO CASO PARTICULAR DE MALHA UNIFORME, FIG. 2.3, AS EQS. (2.26) E (2.27) SE TRANSFORMAM EM MÉDIAS HARMÔNICAS:

$$K_w = \frac{2 K_w K_p}{(K_w + K_p)} \quad (2.28)$$

$$K_e = \frac{2 K_p K_e}{(K_p + K_e)} \quad (2.29)$$

EMPREGANDO-SE AS EQS. (2.19) E (2.20) NA EQ. (2.18), OBTÉM-SE:

$$A K_e \frac{(T_e - T_p)}{\Delta x_e} - A K_w \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_w} + A \dot{q}_p \Delta x_p = 0$$

OU SEJA,

$$A \left(\frac{K_w}{\Delta x_w} + \frac{K_e}{\Delta x_e} \right) T_p = \left(A \frac{K_w}{\Delta x_w} \right) T_w + \left(A \frac{K_e}{\Delta x_e} \right) T_e + (\dot{q}_p \Delta x_p A) \quad (2.30)$$

UMA EQUAÇÃO DESSE TIPO É VÁLIDA PARA CADA NÓ $P = 2$ A $N-1$ (VOLUMES INTERNOS), ISTO É, NÓS P QUE POSSUEM NÓS VIZINHOS A OESTE E A LESTE. A EQ. (2.30) É NORMALMENTE ESCRITA NA FORMA

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + b_p \quad (2.31)$$

ONDE:

$$\text{COEFICIENTES} \begin{cases} a_w = \frac{K_w A}{\Delta x_w} \\ a_e = \frac{K_e A}{\Delta x_e} \\ a_p = a_w + a_e \end{cases} \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

$$(2.34)$$

$$\text{TERMO-FONTE: } b_p = \dot{q}_p \Delta x_p A \quad (2.35)$$

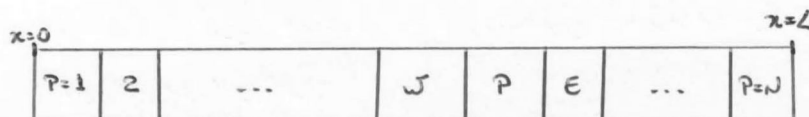


FIG. 2.8: DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO EM N VOLUMES DE CONTROLE

DEVE-SE OBSERVAR QUE N É O NÚMERO TOTAL DE VOLUMES DE CONTROLES QUE DISCRETIZAM O DOMÍNIO DE CÁLCULO.

2.2.4. APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTO RNO DE DIRICHLET.

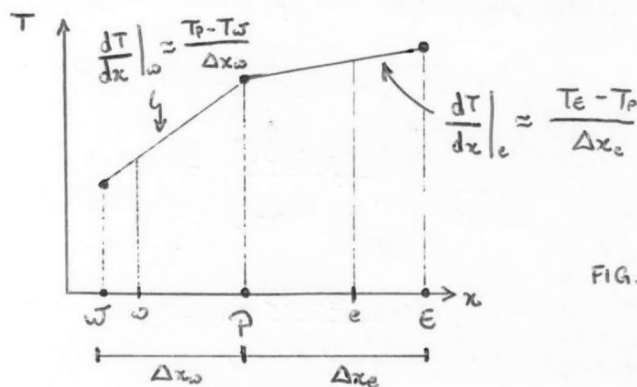


FIG. 2.7: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS APROXIMAÇÕES CDS

EXISTEM VÁRIAS FORMAS DE SE APLICAR CONDIÇÕES DE CONTO RNO AO SE EMPREGAR O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS, DENTRE OS QUAIS SE CITAM: INCORPORAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTO RNO NOS VOLUMES VIZINHOS AOS CONTO RNOS, USO DE VOLUMES FICTÍCIOS, USO DE VOLUMES DE ESPESSURA ZERO E USO DE MEIO VOLUME.

A SEGUIR, É UTILIZADA A TÉCNICA DE INCORPORAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTO RNO NOS VOLUMES VIZINHOS AOS CONTO RNOS DO DOMÍNIO.

- CONTO RNO ESQUERDO: $P=1$.

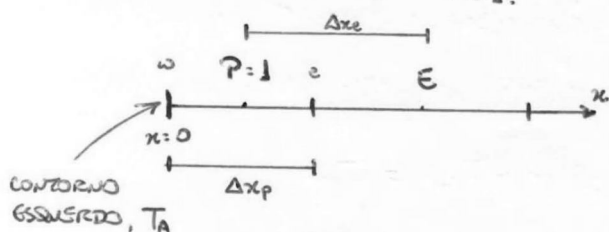


FIG. 2.9: CONTO RNO ESQUERDO, $P=1$. ($x=0$)

NO CASO DO VOLUME $P=1$, UMA FACE OESTE (w) COINCIDE COM O CONTO RNO DO DOMÍNIO, NOTA-SE QUE NÃO É POSSÍVEL REALIZAR UMA APROXIMAÇÃO DO TIPO CDS PARA A FACE w , UMA VEZ QUE NÃO EXISTE VOLUME À ESQUERDA DE $P=1$. NESTE CASO, É NECESSÁRIO UTILIZAR OUTRA FORMA DE APROXIMAÇÃO, QUE NESTE CASO É DENOMINADA DE FUNÇÃO DE INTERPO LAÇÃO A JUSANTE OU DDS (DOWNSTREAM DIFFERENCING SCHEME):

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_w \approx k_w \frac{T_P - T_A}{\Delta x_p / 2} = 2 k_w \frac{(T_P - T_A)}{\Delta x_p} \quad (2.36)$$

DEVE-SE NOTAR QUE NA APROXIMAÇÃO DE $\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e$ NÃO MUDA, POIS EXISTE UM VIZINHO À DIREITA (VOLUME DE CONTRO LE E).

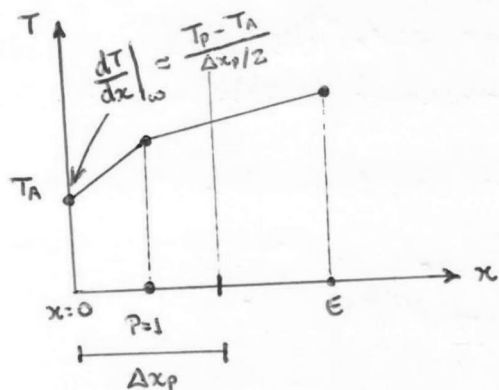


FIG. 2.10: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO ESQUEMA DDS.

EMPREGANDO-SE, ENTÃO, AS EQS. (2.19) E (2.36) NA EQ. (2.18), OBTÉM-SE:

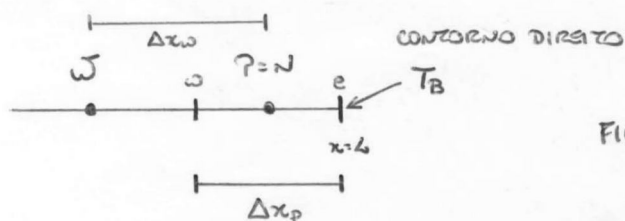
$$A k_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x_e} - 2 A k_w \frac{(T_P - T_A)}{\Delta x_P} + \dot{q}_P \Delta x_P A = 0 \quad (2.37)$$

QUE ESCRITA NA FORMA DA EQ. (2.31) APRESENTA COMO COEFICIENTES / TSMO-FONTE:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_w = 0 \\ q_e = \frac{k_e A}{\Delta x_e} \\ q_p = q_e + \frac{2 k_w A}{\Delta x_P} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.38) \\ (2.39) \\ (2.40) \end{array}$$

$$\text{TSMO-FONTE: } h_P = \dot{q}_P \Delta x_P A + \frac{2 k_w A}{\Delta x_P} T_A \quad (2.41)$$

- CONTOURNO DIREITO: $P=N$

FIG. 2.11: CONTOURNO DIREITO, $P=N$ ($x=L$).

NO CASO DO JOWME $P=N$, CUIA FACE LESTE (e) COINCIDE COM O CONTOURNO DO DOMÍNIO, DEVE-SE ALTERAR A APROXIMAÇÃO DE $(dT/dx)_e$ DO ESQUEMA CDS PARA OUTRA FORMA DE APROXIMAÇÃO, TENDO-SE EM VISTA QUE NÃO EXISTE JOWME DE CONTROLE À DIREITA DE $P=N$. NESTE CASO, RECORRE-SE À APROXIMAÇÃO DO TIPO A MONTANTE, OU FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO A MONTANTE, CHAMADA TAMBÉM DE UDS (UPSTREAM DIFFERENCING SCHEMS):

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e \approx k_e \frac{T_B - T_P}{\Delta x_P / 2} = 2 k_e \frac{(T_B - T_P)}{\Delta x_P} \quad (2.42)$$

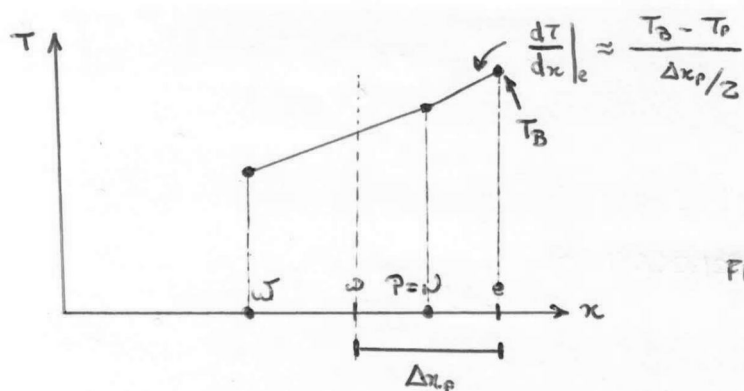


FIG. 2.12: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO ESQUEMA UDS.

NOTA-SE QUE, PARA A APROXIMAÇÃO DE $\left(k \frac{dT}{dx} \right)_\omega$ NÃO HÁ MUDANÇAS, POIS EXISTE UM VOLUME DE CONTROLE À ESQUERDA (VOLUME J).

UTILIZANDO-SE, ENTÃO, AS EQS. (2.20) E (2.42) NA EQ. (2.18), OBTÉM-SE:

$$2k_e A \frac{(T_B - T_P)}{\Delta x_p} - k_\omega A \frac{(T_P - T_J)}{\Delta x_\omega} + \dot{q}_p \Delta x_p A = 0 \quad (2.43)$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (2.31) FORNECE:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\omega = \frac{k_\omega A}{\Delta x_\omega} \end{array} \right. \quad (2.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_e = 0 \end{array} \right. \quad (2.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_p = a_\omega + \frac{2k_e A}{\Delta x_p} \end{array} \right. \quad (2.46)$$

$$\text{TERMOS-FONTE: } b_p = \dot{q}_p \Delta x_p A + \frac{2k_e A}{\Delta x_p} T_B \quad (2.47)$$

2.2.5. SISTEMA DE EQUAÇÕES E VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS.

A EQ. (2.31) PODE, TAMBÉM, SER EXPRESSA NA FORMA DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix} \quad \text{OU SEJA, } [A][T] = [b]$$

SENDO:

[A]: MATRIZ DOS COEFICIENTES, N x N (QUADRADA), TRIDIAGONAL
(VALORES NÃO-NULOS APENAS NAS DIAGONAIS CORRESPONDENTES A a_p , a_ω E a_e).

[T]: VETOR INCÓGNITA

O SISTEMA DE EQUAÇÕES OBTIDO PODE SER SOLUCIONADO DE DIVERSAS MANEIRAS. DENTRE ELAS, PODE-SE CITAR OS MÉTODOS DE GAUSS-SEIDEL, JACOBI, SOC (DENTRE OS MÉTODOS ITERATIVOS), DECOMPOSIÇÃO LU, TDMA (PARA MATRIZES TRIANGONAIS) (DENTRE OS MÉTODOS DIRETOS). TAIS MÉTODOS SÃO COMUMENTE APRESENTADOS EM CURSOS E LIVROS-TEXTOS SOBRE ANÁLISE NUMÉRICA / MÉTODOS NUMÉRICOS / CÁLCULO NUMÉRICO. NO CAP. 3 DA REF. 10 DA BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA (MARCHI, SCHNEIDER, 2004) SÃO APRESENTADOS OS MÉTODOS TDMA E GAUSS-SEIDEL.

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE q_0 E q_L , EQS. (2.10) E (2.11):

- NO CONTOURNO ESQUERDO, $x=0$, COM A EQ. (2.36):

$$q_0 = -2A k_0 \frac{(T_1 - T_A)}{\Delta x_1} \quad (2.48)$$

- NO CONTOURNO DIREITO, $x=L$, COM A EQ. (2.42):

$$q_L = -2A k_L \frac{(T_B - T_N)}{\Delta x_N} \quad (2.49)$$

• TEMPERATURA MÉDIA: APROXIMAÇÃO DA EQ. (2.12), POR MEIO DA REGRAS DO RETÂNGULO:

$$\bar{T} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^N (T_p \Delta x_p) \quad (2.50)$$

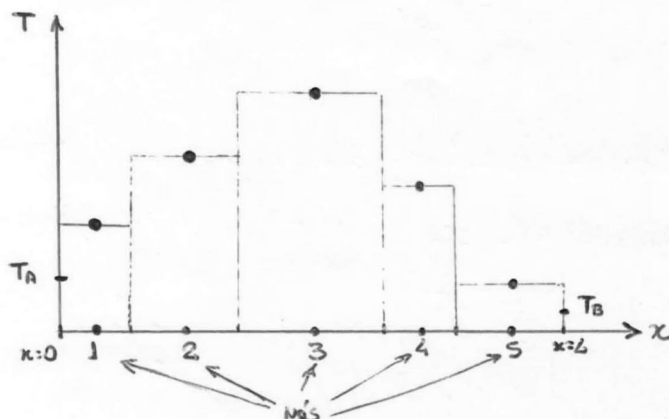


FIG. 2.13: REGRAS DO RETÂNGULO

2.2.6. ALGORITMO:

- 1) LER OS DADOS: T_A , T_B , FUNÇÃO $k(T)$, L , A , N , Δx_p (PARA CADA VOLUME), I (NÚMERO DE ITERAÇÕES), $\dot{q}_p$ (PARA CADA VOLUME)
- 2) OBTER x_p , Δx_0 , Δx_N DE CADA VOLUME DE CONTROLE
- 3) ESTIMAR T_p , USANDO POR EXEMPLO, $T_p = \frac{T_A + T_B}{2}$, $p=1, 2, \dots, N$.

- 4) CALCULAR $K_p(T_p)$, $p = 1, 2, \dots, N$.
- 5) CALCULAR K_w E K_e . (PARA TODOS OS VOLUMES DE CONTROLES)
- 6) CALCULAR OS COEFICIENTES (q_w, q_e, q_p) E TERMOS-FONTES (h_p) DE TODOS OS VOLUMES DE CONTROLES
- 7) COM O MÉTODO TDMA, RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA OBTER T_p .
- 8) VOLTAR AO ITEM 4 ATÉ ATINGIR I (NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES) OU ATÉ QUE ALGUM OUTRO CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA SEJA SATISFEITO.
- 9) IMPRIMIR E VISUALIZAR $T_p(x_p)$.
- 10) CALCULAR AS VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS: q_o, q_z E $\bar{T}$.

2.2.7. SOLUÇÕES ANALÍTICAS

CASO 1: CONSIDERANDO-SE k E $\dot{q}$ CONSTANTES. NESTE CASO, A EQ. (2.7) PODE SER ESCRITA COMO:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (2.51)$$

QUE SE TRATA DE UMA EQUAÇÃO TIPO POISSON. CONSIDERANDO-SE, ENTÃO, AS SEGUINTESS CONDIÇÕES DE CONTORNO:

$$\begin{cases} T(0) = T_A \\ T(L) = T_B \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} T(0) = T_A \\ T(L) = T_B \end{cases} \quad (2.53)$$

TEM-SE AS SEGUINTESS EXPRESSÕES PARA AS VARIÁVEIS DE INTERESSE:

$$T(x) = T_A + \frac{(T_B - T_A)}{L} x + \frac{\dot{q}}{2k} (L - x)x \quad (2.54)$$

(PERFIL QUADRÁTICO)

$$q(x) = \left[k \frac{(T_A - T_B)}{L} + \dot{q} x - \frac{\dot{q} L}{2} \right] A \quad (2.55)$$

$$\bar{T} = \frac{(T_A + T_B)}{2} + \frac{\dot{q} L^2}{12k} \quad (2.56)$$

CASO 2: BASEADO NAS SEGUINTESS HIPÓTESES / CONDIÇÕES DE CONTORNO:

$$\dot{q} = 0 \quad (2.57)$$

$$k(T) = e^T \quad (2.58)$$

$$T(0) = 0$$

(2.59) 14

$$T(L) = L = A = 1$$

(2.60)

A EQ. (2.7) PODE SER EXPRESSA COMO

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (2.61)$$

CUJAS EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA AS VARIÁVEIS DE INTERESSE SÃO:

$$T(x) = \ln [1 + (e-1)x] \quad (2.62)$$

$$\dot{q} = 1 - e \quad (2.63)$$

$$\bar{T} = \frac{1}{e-1} \quad (2.64)$$

CASO 3: TENDO-SE COMO BASE $\dot{q} = 0$ E k CONSTANTE, TEM-SE QUE A EQ. (2.7) PODE SER ESCRITA COMO

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2.65)$$

QUE SE CONSTITUI EM UMA EQUAÇÃO DE LAPLACE. NESTE CASO, AS EXPRESSÕES PARA AS VARIÁVEIS DE INTERESSE SÃO:

$$T(x) = T_A + \frac{(T_B - T_A)}{L} x \quad (2.66)$$

(PERFIL LINEAR)

$$\dot{q} = k \frac{(T_A - T_B)}{L} A \quad (2.67)$$

$$\bar{T} = \frac{T_A + T_B}{2} \quad (2.68)$$

QUE SÃO OBTIDAS AO SEREM CONSIDERADAS AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DADAS PELAS Eqs. (2.8) e (2.9).

2.3. CONDUÇÃO DE CALOR EM PAREDE PLANA E CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.

ADMITINDO-SE A EQ. (2.7), REESCRITA ABAIXO:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0$$

QUE REGE A CONDUÇÃO DE CALOR EM RÉGIME PERMANENTE EM UMA PAREDE PLANA

E AS SEGUINTESS CONDIÇÕES DE CONTO RNO

$$\begin{cases} T(0) = T_A & \text{(C.C. DIRICHLET)} \end{cases} \quad (2.69)$$

$$\begin{cases} -\left[kA \left(\frac{dT}{dx} \right) \right]_{x=L} = q_L & \text{(C.C. NEUMANN)} \end{cases} \quad (2.70)$$

DESEJA-SE VERIFICAR QUAIS SÃO AS MUDANÇAS A SEREM REALIZADAS COM RELAÇÃO AOS PROCEDIMENTOS APRESENTADOS NAS SEÇÕES 2.2.3 E 2.2.4. OBSERVANDO-SE A EQ. (2.70), NOTA-SE QUE TANTO $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L}$ QUANTO $T(L) = T_L$ SÃO DESCONHECIDOS.

NOTA-SE, TAMBÉM, QUE A ÚNICA MUDANÇA A SER REALIZADA COM RELAÇÃO AOS PROCEDIMENTOS JÁ APRESENTADOS DEVERÁ OCORRER PARA O ÚLTIMO NÓ ($P=N$), NO QUAL A CONDIÇÃO DE CONTO RNO DE NEUMANN SERÁ APLICADA.

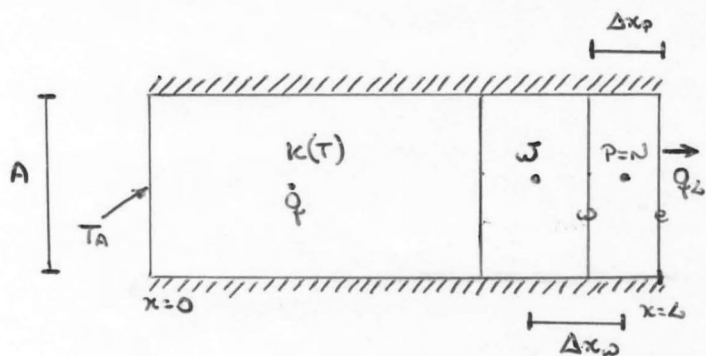


FIG. 2.14: CONDIÇÃO DE CONTO RNO DE NEUMANN

PARTINDO-SE DA EQ. (2.18), REESCRITA A SEGUIR,

$$\left[\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w + \dot{q}_p \Delta x_p \right] A = 0$$

APLICADA AO ÚLTIMO NÓ, $P=N$, TEM-SE:

$$-q_e - \left(kA \frac{dT}{dx} \right)_w + \dot{q}_p \Delta x_p A = 0 \quad (2.71)$$

UTILIZANDO-SE AS EQS. (2.20) E (2.70) - CONDIÇÃO DE CONTO RNO - NA EQ. (2.71), OBTÉM-SE

$$-q_L - k_\omega A \frac{(T_p - T_\omega)}{\Delta x_\omega} + \dot{q}_p \Delta x_p A = 0 \quad (2.72)$$

OU SEJA,

$$\left(\frac{k_\omega A}{\Delta x_\omega} \right) T_p = \left(\frac{k_\omega A}{\Delta x_\omega} \right) T_\omega + (\dot{q}_p \Delta x_p A - q_L) \quad (2.73)$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (2.31) POSSUI OS SEGUINTE COEFICIENTES/TERMO-FONTE:

$$\begin{cases} q_e = 0 & (2.74) \\ q_o = \frac{k_o A}{\Delta x_o} & (2.75) \\ q_p = q_o & (2.76) \end{cases}$$

$$h_p = \dot{q}_p \Delta x_p A - q_L \quad (2.77)$$

DEVE-SE NOTAR QUE, PARA O CONTO RNO CONSIDERADO ($x=L$), SE q ENTRA NO DOMÍNIO, SEU VALOR CONHECIDO (DADO) DEVE SER NEGATIVO.

APÓS OBTER A SOLUÇÃO DE T NOS NÓS $P=1, 2, \dots, N$, T_L PODE SER AVALIADO DA EQ. (2.75) APROXIMADA, OU SEJA,

$$-k_L A \frac{(T_L - T_N)}{\Delta x_N/2} = q_L \quad (2.78)$$

OU SEJA,

$$T_L = T_N - \frac{q_L \Delta x_N}{2 k_L A} \quad (2.79)$$

SE $k=k(T)$, DEVE-SE NOTAR QUE A OBTENÇÃO DE T_L É FEITA ITERATIVAMENTE.

2.4. CONDUÇÃO DE CALOR EM PAREDE PLANA E CONDIÇÃO DE CONTO RNO DE ROBIN
ADMITINDO-SE NOVAMENTE A EQ. (2.7):

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0$$

E AS SEGUINTE S CONDIÇÕES DE CONTO RNO:

$$\begin{cases} T(0) = T_A & \text{(C.C. DIRICHLET)} \end{cases} \quad (2.80)$$

$$\begin{cases} q_L = - \left(k A \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h A (T_L - T_\infty) \end{cases} \quad (2.81)$$

CONDUÇÃO CONVECÇÃO

NESTE CASO, SÃO DESCONHECIDOS T_L , $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L}$ E q_L .

DE MODO SEMELHANTE AO OCORRIDO NA SEÇÃO ANTERIOR, A ÚNICA MUDANÇA A SER REALIZADA EM RELAÇÃO AOS PROCEDIMENTOS DAS SEÇÕES 2.2.3 E 2.2.4 SERÁ REALIZADA PARA O ÚLTIMO VOLUME ($P=N$).

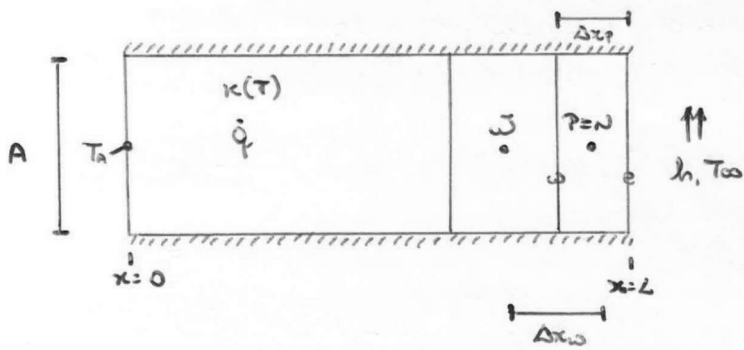


FIG. 2.15: CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE ROBIN.

NESTE CASO, TORNA-SE NECESSÁRIO AVALIAR T_L . PARA TANTO, É DISCRETIZADA A EQ. (2.81), OU SEJA,

$$-k_2 A \frac{(T_L - T_N)}{\Delta x_N / 2} = h A (T_L - T_\infty) \quad (2.82)$$

ISOLANDO-SE T_L , OBTÉM-SE:

$$T_L = \frac{(2k_2 T_N + h \Delta x_N T_\infty)}{(2k_2 + h \Delta x_N)} \quad (2.83)$$

EMPREGANDO-SE, ENTÃO, AS EDS. (2.20), (2.42) E (2.83) NA EQ. (2.18), OBTÉM-SE

$$\left[\frac{2k_2}{\Delta x_N} \frac{(2k_2 T_N + h \Delta x_N T_\infty)}{(2k_2 + h \Delta x_N)} - \frac{2k_2}{\Delta x_N} T_N - \frac{k_w}{\Delta x_w} T_N + \frac{k_w}{\Delta x_w} T_w + \dot{q}_p \Delta x_p \right] A = 0 \quad (2.84)$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (2.31) POSSUI COMO COEFICIENTES/TERMO-FONTE:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_e = 0 \end{array} \right. \quad (2.85)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{k_w A}{\Delta x_w} \end{array} \right. \quad (2.86)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_p = a_w + \frac{2k_2 A h}{2k_2 + h \Delta x_N} \end{array} \right. \quad (2.87)$$

$$b_p = \dot{q}_p \Delta x_p A + \frac{2k_2 A h T_\infty}{2k_2 + h \Delta x_N} \quad (2.88)$$

DEVE-SE NOTAR QUE, SE FOR MANTIDA T_L , EQ. (2.83), NO LUGAR DE T_B DA SEÇÃO 2.2.4, OS COEFICIENTES E TERMO-FONTE OBTIDOS SÃO EXATAMENTE OS MESMOS DAS EDS. (2.44) A (2.47).

CAP. 4: DIFUSÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE (1Dt)

CONCEITOS ENVOLVIDOS:

- MALHAS UNIFORMES NO ESPAÇO E NO TEMPO ($\Delta x = \text{const. 1}$; $\Delta t = \text{const. 2}$)
- PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS E PARÂMETROS CONSTANTES: α , k , ρ , c_p , $\dot{q}$
- COORDENADAS CARTESIANAS
- CONDIÇÕES DE CONTORNO DE DIRICHLET
- VARIÁVEL DE INTERESSE (TEMPERATURA) EM FUNÇÃO DO ESPAÇO E DO TEMPO: $T(x, t)$
- FORMULAÇÃO NO TEMPO BASEADA NO PARÂMETRO θ .
- CONDIÇÕES INICIAIS (C.I) $\rightarrow$ PROBLEMA DEPENDENTE DO TEMPO.

4.1. MODELO MATEMÁTICO.

DADA A EQ. GERAL DA DIFUSÃO DE CALOR:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

SIMPLIFICAÇÕES:

- MODELO UNIDIMENSIONAL
- PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS CONSTANTES.
- ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE NA DIREÇÃO x .

OBTEM-SE, NESSE CASO, A SEGUINTE EQUAÇÃO:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} \quad (4.2)$$

CONHECIDA COMO EQUAÇÃO DE FOURIER. CONSIDERANDO-SE, ENTÃO, CONDIÇÕES DE CON-
TORNHO (C.C) DE DIRICHLET, CONSTANTES NO TEMPO:

$$\begin{cases} T(0, t) = T_A \\ T(L, t) = T_B \end{cases} \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

E A CONDIÇÃO INICIAL PARA A DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS (C.I):

$$T(x, 0) = T_i(x) \quad (4.5)$$

SENDO T_i UMA FUNÇÃO DEPENDENTE DA COORDENADA ESPACIAL.

OBS.: PARA AS CONDIÇÕES DE CONTOURNO, EM CERTOS CASOS COMO PROBLEMAS QUE ENVOLVEM
RADIACÃO SOLAR, AS CONDIÇÕES DE DIRICHLET PODEM SER FUNÇÕES DEPENDENTES DO
TEMPO.

AS VARIÁVEIS/PROPRIEDADES EXISTENTES NA EQ. (4.2) SÃO:

T : TEMPERATURA [$^{\circ}\text{C}$ ou K]

κ : CONDUTIVIDADE TÉRMICA DO MEIO [W/mK]

ρ : MASSA ESPECÍFICA DO MEIO [kg/m^3]

c_p : CALOR ESPECÍFICO DO MEIO [J/kgK]

x : COORDENADA ESPACIAL [m]

t : COORDENADA TEMPORAL [s]

A : ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DA PAREDE [m²]

$\dot{q}$: TAXA DE GERAÇÃO VOLUMÉTRICA DE CALOR [W/m³]

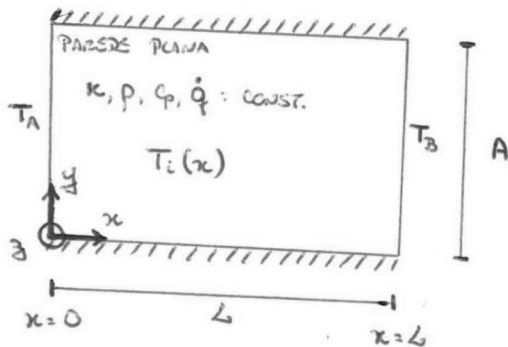


FIG. 4.1: CONDUÇÃO DE CALOR EM REGIME TRANSIENTE EM UMA PAREDE PLANA.

4.2. VARIÁVEIS DE INTERESSE

- DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS, $T(x,t)$ DA EQ. (4.2)
- TEMPERATURA MÉDIA ($\bar{T}$) NO DOMÍNIO PARA CADA INSTANTE DE TEMPO t .

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L T(x,t) dx \quad (4.6)$$

4.3. SOLUÇÃO NUMÉRICA EMPREGANDO-SE A FORMULAÇÃO θ .

CONSIDERANDO-SE O VOLUME P DA FIG. 4.2:

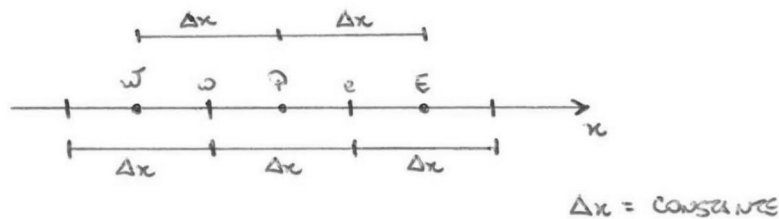


FIG. 4.2: MALHA UNIDIMENSIONAL UNIFORME

E INTEGRANDO-SE A EQ. (4.2) AO LONGO DO TEMPO, DESDE $(t-\Delta t)$ ATÉ (t) TEM-SE:

$$\int_{t-\Delta t}^t \int_3 \int_y \int_{x_w}^{x_e} \left[\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] dx dy dz dt = \int_{t-\Delta t}^t \int_3 \int_y \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} \right] dx dy dz dt \quad (4.7)$$

- INTEGRAIS ESPACIAIS:

(4)

$$\int_{\delta} \int_{\gamma} \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} \right] dx dy dz = \left[\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w + \dot{q}_p \Delta x \right] \Delta y \Delta z$$

ADMITINDO-SE κ E $\dot{q}$ CONSTANTES E $\Delta y \Delta z = A$, TEM-SE:

$$= \kappa A \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \dot{q} \Delta x A$$

UTILIZANDO-SE FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES (CDB-2) PARA AVALIAR AS DERIVADAS $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e$ E $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w$, OBTÉM-SE:

$$\begin{aligned} &= \kappa A \left[\frac{(T_e - T_p)}{\Delta x} - \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x} \right] + \dot{q} \Delta x A \\ &= \frac{\kappa A}{\Delta x} (T_w + T_e - 2T_p) + \dot{q} \Delta x A \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\int_{\delta} \int_{\gamma} \int_{x_w}^{x_e} \left[\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] dx dy dz = (\rho)_p (c_p)_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_p \Delta x \Delta y \Delta z$$

ADMITINDO-SE ρ E c_p CONSTANTES E $\Delta y \Delta z = A$, TEM-SE:

$$= \rho c_p \Delta x A \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_p \quad (4.9)$$

- INTEGRAIS TEMPORAIS:

$$\int_{t-\Delta t}^t \left[\rho c_p \Delta x A \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_p \right] dt = \rho c_p \Delta x A (T_p - T_p^0) \quad (4.10)$$

ONDE: T_p REFERE-SE À TEMPERATURA DO VOLUME P AVALIADA NO TEMPO t (SOLUÇÃO A DETERMINAR).

T_p^0 REFERE-SE À TEMPERATURA DO VOLUME P AVALIADA NO TEMPO $t - \Delta t$ (SOLUÇÃO CONHECIDA OU CONDIÇÃO INICIAL OU ANTERIOR).

$$\int_{t-\Delta t}^t \left\{ \frac{\kappa A}{\Delta x} (T_w + T_e - 2T_p) + \dot{q} \Delta x A \right\} dt = \left[\frac{\kappa A}{\Delta x} (T_w^0 + T_e^0 - 2T_p^0) + \dot{q} \Delta x A \right] \Delta t \quad (4.11)$$

ONDE:

$$T_p^0 = T_p^0 + \theta (T_p - T_p^0) \quad (4.12)$$

com

$$0 \leq \theta \leq 1$$

(4.13)

- Se $\theta = 0$: $T_p^0 = T_p^0$: TEMPERATURA DO VOLUME P NO INSTANTE $(t - \Delta t)$
- Se $\theta = 1$: $T_p^0 = T_p$: TEMPERATURA DO VOLUME P NO INSTANTE (t)

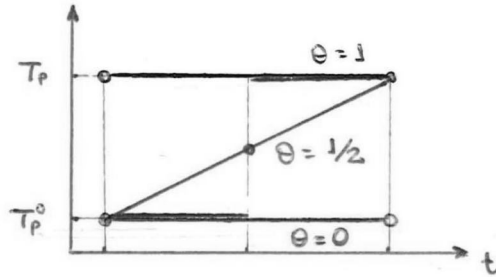
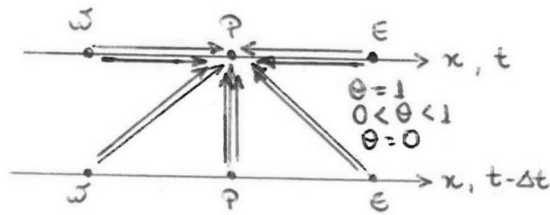


FIG. 4.3: INTEGRAÇÃO NO TEMPO COM A FORMULAÇÃO θ .

NOMES ESPECIAIS: $\theta = 0$: FORMULAÇÃO EXPLÍCITA

$\theta = 1/2$: FORMULAÇÃO CRANK-NICOLSON

$\theta = 1$: FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA

UTILIZANDO-SE AS EQS. (4.10) A (4.12) NA EQ. (4.7) CHEGA-SE A

$$\rho C_p \Delta x A (T_p - T_p^0) = \frac{\kappa A}{\Delta x} \left[T_E^0 + \theta (T_E - T_E^0) + T_W^0 + \theta (T_W - T_W^0) - 2T_p^0 - 2\theta (T_p - T_p^0) \right] \Delta t + \dot{q} \Delta x A \Delta t \quad (4.14)$$

QUE PODE SER REESCRITA NA FORMA:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + b_p \quad (4.15)$$

NA QUAL:

$$a_e = a_w = \frac{\theta \kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \vphantom{\frac{\theta \kappa A \Delta t}{\Delta x}} \right\} \text{COEFICIENTES} \quad (4.16)$$

$$a_p = a_w + a_e + \rho C_p \Delta x A \quad (4.17)$$

$$b_p = b' T_p^0 + b'' (T_W^0 + T_E^0) + \dot{q} \Delta x A \Delta t \quad (4.18)$$

$$b' = \rho C_p \Delta x A + 2(\theta - 1) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \vphantom{\rho C_p \Delta x A + 2(\theta - 1) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x}} \right\} \text{TERMO-FONTE} \quad (4.19)$$

$$b'' = (1 - \theta) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.20)$$

QUE SÃO VÁLIDOS PARA OS VOLUMES INTERNOS ($P = 2, \dots, N-1$).

ALTERAÇÕES PARA O VOLUME ADJACENTE AO CONTORNO ESQUERDO ($P=1$)

Em $x=0$, onde a condição de contorno é dada pela Eq.(4.3), $T(0,t) = T_A$, tem-se:

$$a_w = 0 \quad (4.21)$$

$$a_e = \frac{\theta \kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{COEFICIENTES} \quad (4.22)$$

$$a_p = 3a_e + \rho c_p \Delta x A \quad (4.23)$$

$$b_p = b'_p T_p^o + b''_p T_E^o + \dot{q} A \Delta x \Delta t + 2T_A \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.24)$$

$$b'_p = \rho c_p \Delta x A + 3(\theta-1) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{TERM-FONTE} \quad (4.25)$$

$$b''_p = (1-\theta) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.26)$$

ALTERAÇÕES PARA O VOLUME ADJACENTE AO CONTORNO DIREITO ($P=N$)

Em $x=L$, onde a condição de contorno é dada pela Eq. (4.4), $T(L,t) = T_B$, tem-se

$$a_e = 0 \quad (4.27)$$

$$a_w = \frac{\theta \kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{COEFICIENTES} \quad (4.28)$$

$$a_p = 3a_w + \rho c_p \Delta x A \quad (4.29)$$

$$b_p = b'_p T_p^o + b''_p T_W^o + \dot{q} A \Delta x \Delta t + 2T_B \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.30)$$

$$b'_p = \rho c_p \Delta x A + 3(\theta-1) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{TERM-FONTE} \quad (4.31)$$

$$b''_p = (1-\theta) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.32)$$

APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DA EQ. (4.6) PELA REGRAS DO TRAPÉZIO.

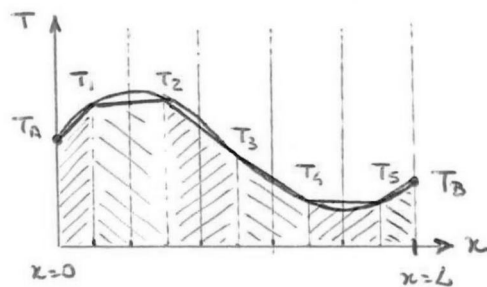


FIG. 4.4: EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA REGRAS DO TRAPÉZIO.

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{L} \left[\frac{(T_A + T_1)}{2} x_1 + \sum_{p=2}^N \frac{(T_{p-1} + T_p)}{2} (x_p - x_{p-1}) + \frac{(T_{N-1} + T_B)}{2} (L - x_{N-1}) \right] \quad (4.33)$$

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{L} \left[\frac{(T_A + T_1)}{2} \frac{\Delta x}{2} + \sum_{p=2}^N \frac{(T_p + T_{p-1})}{2} \Delta x + \frac{(T_N + T_B)}{2} \frac{\Delta x}{2} \right] \quad (4.34)$$

CONSIDERANDO-SE UMA MALHA UNIFORME ($\Delta x = \text{CONST.}$); T_A E T_B SÃO AS CONDIÇÕES DE CON-
TORNIO E N É O NÚMERO TOTAL DE VOLUMES DE CONTROLE.

SE A MALHA EMPREGADA FOR DO TIPO NÃO-UNIFORME, A EQ. (4.33) PODE SER EMPREGADA.

ALGORITMO:

1) USR OS DADOS: T_A , T_B , p , q , K , A , L , $\dot{q}$, θ , T_i (QUE PODE SER UMA FUNÇÃO), t_F , N , m

ONDE: t_F É O INSTANTE DE TEMPO NO QUAL SE DESEJA $T(x)$ OU O INSTANTE NO QUAL SE
DESEJA PARAR O AVANÇO NO TEMPO.

m É O NÚMERO TOTAL DE AVANÇOS NO TEMPO, DE $t=0$ A $t=t_F$.

2) OBTÉR: $\Delta x = \frac{L}{N}$ (4.35)

3) OBTÉR: $\Delta t = \frac{t_F}{m}$ (4.36)

4) FAZER $T_p^0(x, 0) = T_i(x)$ E $t=0$ (APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO INICIAL)

5) FAZER $t = t + \Delta t$

6) CALCULAR OS COEFICIENTES (q_w , q_e , q_p) E TERMOS-FONTES (I_p) DE TODOS OS VOLUMES
DE CONTROLE

7) COM O MÉTODO TDMA, RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA OBTÉR $T_p(x_p, t)$

8) OBTÉR $\bar{T}(t)$

9) FAZER $T_p^0 = T_p$

10) VOLTAR AO ITEM 5 ATÉ ATINGIR $t = t_F$.

11) IMPRIMIR E VISUALIZAR $T(x, t_F)$.

12) IMPRIMIR E VISUALIZAR $\bar{T}(t)$.

CASO SE TENHA $K = K(T)$, SERÁ NECESSÁRIO ITERAR OS ITENS 6 E 7 EM CADA t ATÉ
QUE SE ATINJA ALGUM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA PRÉ-DEFINIDO.

A FORMULAÇÃO APRESENTADA ATÉ O MOMENTO É A CHAMADA FORMULAÇÃO IMPLÍCITA ($0 < \theta < 1$),
ESQUEMATIZADA NA FIG. 4.5.

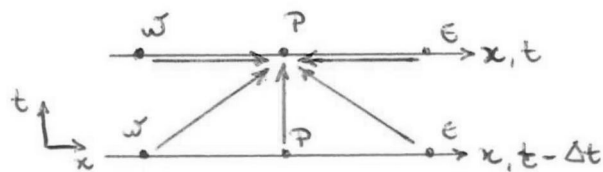


FIG. 4.5: FORMULAÇÃO IMPLÍCITA ($0 < \theta < 1$)

4.4. FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA ($\theta = 1$)

PARA $\theta = 1$, AS EQS. (4.15) E (4.20) SE REDUZEM A:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + b_p \quad (\text{TRIDIAGONAL}) \quad (4.37)$$

$$a_w = a_e = \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.38)$$

$$a_p = a_w + a_e + \rho c_p \Delta x A \quad (4.39)$$

$$b_p = \dot{q} \Delta x A \Delta t + \rho c_p A \Delta x T_p^o \quad (4.40)$$

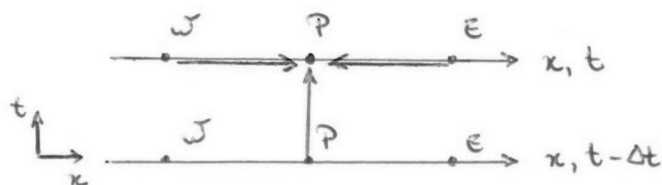


FIG. 4.6: FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA ($\theta = 1$)

4.5. FORMULAÇÃO EXPLÍCITA ($\theta = 0$)

PARA $\theta = 0$, AS EQS. (4.15) E (4.20) SE REDUZEM A:

$$a_p T_p = b_p \quad (4.41)$$

ONDE:

$$a_p = \rho c_p \Delta x A \quad (4.42)$$

$$b_p = b' T_p^o + b'' (T_w^o + T_e^o) + \dot{q} A \Delta x \Delta t \quad (4.43)$$

$$b' = \rho c_p A \Delta x - 2\kappa A \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.44)$$

$$b'' = \kappa A \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.45)$$

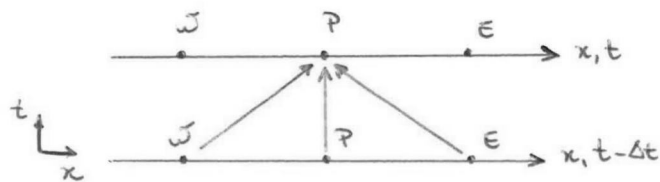


FIG. 4.7: FORMULAÇÃO EXPLÍCITA

4.6. SOLUÇÃO ANALÍTICA

CONSIDERANDO-SE p, c_p, k CONSTANTES E $\dot{q} = 0$, A EQ. (4.2) SE REDUZ A

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.46)$$

SE PARA TAL EQUAÇÃO FOREM CONSIDERADAS, AINDA:

$$T(0, t) = T(L, t) = 0 \quad (\text{CONDIÇÕES DE CONTORNO}) \quad (4.47)$$

E

$$T(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (\text{CONDIÇÃO INICIAL}) \quad (4.48)$$

TEM-SE QUE A SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O CAMPO DE TEMPERATURAS SERÁ

$$T(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\alpha \pi^2 t}{L^2}} \quad (4.49)$$

E

$$\bar{T}(t) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\alpha \pi^2 t}{L^2}} \quad (4.50)$$

ONDE $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ É A DIFUSIVIDADE TÉRMICA DO MATERIAL $[m^2/s]$ (4.51)

4.7. SOLUÇÃO NUMÉRICA CONVERGENTE

CONSISTÊNCIA: UM MODELO NUMÉRICO É CONSISTENTE SE A EQUAÇÃO DISCRETIZADA TENDE À EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORIGINAL QUANDO Δx E Δt TENDEM A ZERO.

POR EXEMPLO, AO SE CONSIDERAR A EQ. (4.46), UMA POSSIBILIDADE DE DISCRETIZAÇÃO CONDUZ A

$$\frac{(T_P - T_P^0)}{\Delta t} = \alpha \frac{(T_E + T_J - 2T_P)}{(\Delta x)^2} \quad (4.52)$$

NESTE CASO, AO SE FAZER $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ E APLICANDO-SE TANTO A DEFINIÇÃO DE DERIVADA QUANTO SÉRIES DE TAYLOR, PODE-SE MOSTRAR QUE A EQ. (4.52) TENDE À EQ. (4.46), DE MODO QUE O MODELO É DITO CONSISTENTE.

ESTABILIDADE: UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA É ESTÁVEL SE O ERRO NUMÉRICO (E_n) TENDE A

UM VALOR FINITO (S) QUANDO O NÚMERO DE ITERAÇÕES TENDE AO INFINITO, MANTENDO-SE Δx E Δt FIXOS:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |E_n(T_p)| = S_p \quad (4.53)$$

POR EXEMPLO, PARA AS DISCRETIZAÇÕES VISTAS NESTE CAPÍTULO E $\dot{q} = 0$ TEM-SE QUE:

- A SOLUÇÃO NUMÉRICA É INCONDICIONALMENTE ESTÁVEL SE $1/2 \leq \theta \leq 1$.
- PARA $0 \leq \theta < 1/2$, A SOLUÇÃO NUMÉRICA É ESTÁVEL APENAS SE

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2-4\theta} \quad (4.54)$$

SE $\theta = 0$, A CONDIÇÃO A SER SATISFEITA É

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4.55)$$

JÁ PARA $\theta = 1/2$, TEM-SE

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \infty \quad (4.56)$$

DE MODO QUE A SOLUÇÃO É INCONDICIONALMENTE ESTÁVEL.

HIRSCH, EM SUA OBRA INTITULADA "NUMERICAL COMPUTATION OF INTERNAL AND EXTERNAL FLOWS" (REF. 8) APRESENTA ALGUNS MÉTODOS PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE. ESTE TIPO DE ANÁLISE VERIFICA SE A SOLUÇÃO NUMÉRICA TENDE À SOLUÇÃO EXATA DO SISTEMA DE EQUAÇÕES OU DIVERGE.

A ESTABILIDADE PODE DEPENDER DE UM FATOR DE RELAXAÇÃO (COMO O NO MÉTODO SOR).

CONVERGÊNCIA: UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA É CONVERGENTE QUANDO O MODELO NUMÉRICO É CONSISTENTE E A SOLUÇÃO NUMÉRICA É ESTÁVEL.

$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ \Delta x, \Delta t \rightarrow 0}} |E_n(T_p)| = 0 \quad (4.57)$$

UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA CONVERGENTE TENDE À SOLUÇÃO EXATA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL QUANDO $i \rightarrow \infty$ (NÚMERO DE ITERAÇÕES TENDE AO INFINITO) E $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ (TAMANHO DOS ELEMENTOS ESPACIAL E TEMPORAL TENDEM A ZERO).