

Marcio Augusto Villela Pinto  
Sebastião Romero Franco

# **MÉTODO *MULTIGRID* PARA O PROBLEMA DA POROELASTICIDADE**

Universidade Federal do Paraná – UFPR

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – PPGMNE

Curitiba

2018

# Sumário

	<b>Sumário</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>2.1</b>	<b>Método das Diferenças Finitas (MDF)</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1.1	Expansão em fórmula de Taylor . . . . .	9
<b>2.2</b>	<b>Notação estêncil</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2.3</b>	<b>Métodos iterativos</b> . . . . .	<b>13</b>
2.3.1	Método de Jacobi . . . . .	14
2.3.2	Método de Gauss-Seidel . . . . .	14
2.3.3	Suavizador Vanka . . . . .	14
2.3.4	Ordenação das atualizações das incógnitas . . . . .	16
<b>2.4</b>	<b>Métodos para a aproximação temporal</b> . . . . .	<b>18</b>
2.4.1	Formulações temporais de EDPs . . . . .	19
2.4.2	Método de <i>Euler</i> . . . . .	19
2.4.3	Método de Crank-Nicolson . . . . .	21
<b>3</b>	<b>MÉTODO <i>MULTIGRID</i></b> . . . . .	<b>22</b>
<b>3.1</b>	<b>Caracterização do método <i>multigrid</i></b> . . . . .	<b>22</b>
3.1.1	Análise de convergência . . . . .	23
3.1.2	Análise de erros . . . . .	25
<b>3.2</b>	<b>Operadores de transferência entre malhas</b> . . . . .	<b>26</b>
3.2.1	Operadores de restrição . . . . .	26
3.2.2	Operadores de prolongação . . . . .	30
<b>3.3</b>	<b>Esquema de correção e ciclos</b> . . . . .	<b>32</b>
<b>4</b>	<b>MODELOS PARA OS PROBLEMAS DA POROELASTICIDADE</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>4.1</b>	<b>Modelos matemáticos</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>4.2</b>	<b>Modelos numéricos</b> . . . . .	<b>38</b>
4.2.1	Caso unidimensional . . . . .	38
4.2.2	Caso bidimensional . . . . .	48
<b>4.3</b>	<b>Ordenação colorida para o suavizador Vanka</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>5</b>	<b>MÉTODOS DE SOLUÇÃO</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>5.1</b>	<b>Método <i>Time-Stepping</i></b> . . . . .	<b>73</b>

---

**REFERÊNCIAS** . . . . . **75**

# 1 Introdução

A área do conhecimento denominada CFD trata dos estudos de métodos computacionais para simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento com ou sem trocas de calor, cujo interesse principal é obter grandezas físicas, como velocidade, temperatura e pressão, na região do escoamento (FORTUNA, 2000). Estes modelos matemáticos, em geral, não têm soluções analíticas conhecidas. Buscam-se então soluções numéricas transformando-se o modelo contínuo em um modelo discreto.

De acordo com Maliska (2004), o engenheiro ou projetista tem à sua disposição, fundamentalmente, três ferramentas para desenvolver seu projeto ou analisar seu problema: os métodos analíticos, os métodos numéricos e os métodos de experimentação em laboratório. Aqui discutiremos os métodos numéricos.

As simulações numéricas podem resolver problemas com condições de contorno gerais e definidos em praticamente todos os tipos de geometrias. Para isso, transforma-se o domínio contínuo (com um número infinito de pontos) em um domínio discreto (com um número finito de pontos) através do uso de uma malha. Para aproximar as derivadas, os métodos tradicionais de discretização do modelo matemático são os Métodos das Diferenças Finitas (MDF) (TANNEHILL et al., 1997; GOLUB; ORTEGA, 1992; FERZIGER; PERIC, 2002; SAAD, 2003), Método dos Elementos Finitos (SAAD, 2003), Método dos Volumes Finitos (GOLUB; ORTEGA, 1992; MALISKA, 2004), entre outros.

Os fenômenos físicos geralmente podem ser modelados por Equações Diferenciais Parciais (EDPs). As EDPs que não dependem da variável temporal dão origem ao regime denominado de permanente (ou estacionário), enquanto que as EDPs que dependem da variável temporal dão origem ao regime transiente.

Após a discretização das EDPs, tem-se um sistema linear a ser resolvido. A resolução desse sistema linear através de métodos diretos não é recomendável, visto que na prática, a matriz dos coeficientes é muito grande e o custo da inversão da matriz é alto (GOLUB; LOAN, 1989). Para problemas de grande porte os métodos iterativos são mais adequados (BURDEN; FAIRES, 2016).

Os métodos iterativos mais usados para aproximar a solução (variáveis espaciais) são o método de Jacobi ponderado e o método de Gauss-Seidel. Para aproximar a variável temporal, tem-se os métodos de Euler, Crank-Nicolson (CN), entre outros (BURDEN; FAIRES, 2016; LENT, 2006). Porém, esses métodos iterativos geralmente perdem a eficiência quando o número de iterações aumenta ou a malha é refinada. Por isso, pretende-se usar o método *multigrid* para acelerar a convergência (BRIGGS et al., 2000).

Para o caso de sistemas de equações diferenciais, como os decorrentes das equações da poroelasticidade, os métodos que suavizam as variáveis ponto a ponto de forma desacoplada não são eficientes, sendo necessário o uso de métodos que suavizam todas as variáveis em um ponto de forma acoplada, como por exemplo o suavizador Vanka, ver [Oosterlee e Gaspar \(2008\)](#) e [Rodrigo \(2010\)](#).

O método *multigrid*, proposto originalmente por [Fedorenko \(1964\)](#), é apresentado como uma técnica numérica alternativa para resolver iterativamente sistemas de equações obtidos com a discretização de uma equação diferencial que modela algum fenômeno físico. Suas conclusões mostraram que a velocidade de convergência com o uso da técnica *multigrid* é melhor que a dos métodos iterativos puros (sem o uso de *multigrid*). A ideia básica deste método é usar um conjunto de malhas e alternar suavizações em cada nível de malha e as aproximações destas soluções em uma malha mais grossa através de operadores que transferem informações da malha fina para a malha imediatamente mais grossa (operador de restrição), ou transferir informação da malha grossa para a malha imediatamente mais fina (operador de prolongação) ([WESSELING, 1992](#); [BRIGGS et al., 2000](#); [TROTTEMBERG et al., 2001](#)).

A sequência com que as diversas malhas são visitadas caracteriza um ciclo *multigrid*, que pode ser do tipo  $V$ ,  $W$ ,  $F$ , entre outros. Os sistemas lineares em cada malha são suavizados com um método iterativo que goza das propriedades de reduzir rapidamente os erros oscilatórios (propriedades de suavização). Podem ser usados dois tipos de esquemas ([BRIGGS et al., 2000](#)): o esquema de correção (em inglês, *Correction Scheme*, CS) e o esquema de aproximação completa (em inglês, *Full Approximation Scheme*, FAS). De acordo com [Briggs et al. \(2000\)](#) e [Trottenberg et al. \(2001\)](#), o esquema CS é geralmente recomendado a problemas lineares e o FAS, a problemas não-lineares. [Trottenberg et al. \(2001\)](#) comentam que uma simples modificação no algoritmo do *multigrid* pode resultar em uma grande variação no tempo computacional (ou tempo de CPU,  $t_{CPU}$ ).

O objetivo do método *multigrid* é acelerar a convergência de um esquema iterativo ([TANNEHILL et al., 1997](#)). Os melhores desempenhos do método *multigrid* são obtidos em problemas totalmente dominados pela difusão, ou seja, elípticos ([WESSELING, 1992](#)). [Ferziger e Peric \(2002\)](#) comentam que para problemas dominados pela advecção, os resultados ainda não se mostram totalmente satisfatórios e [Stüben \(2001\)](#), [Brandt \(1977\)](#), [Wesseling e Oosterlee \(2001\)](#) relatam que a eficiência ideal do método *multigrid* não tem sido totalmente alcançada em aplicações realísticas em CFD.

Se por um lado tem-se a grande importância de modelos matemáticos para equações transientes, como a equação do calor (eq. de Fourier) e as equações da poroelasticidade, por outro lado, têm-se as dificuldades em se resolver numericamente esses tipos de problemas. Sabe-se ainda que a eficiência de certas ferramentas numéricas, como o método *multigrid*, ainda não tem sido totalmente alcançada em aplicações realísticas da Engenharia ([BRIGGS](#)

et al., 2000; TROTTENBERG et al., 2001), em especial para problemas transientes. Diante desta situação, pensou-se em buscar métodos que ajudem a suprir tal necessidade. A equação do calor, por exemplo, é uma equação bastante referenciada na literatura dos métodos numéricos aplicados na resolução de EDPs (FORTUNA, 2000; INCROPERA et al., 2008). Para tal equação, usam-se principalmente como metodologias de solução: o método *Time-Stepping* (TANNEHILL et al., 1997; STRIKWERDA, 1989; LENT, 2006), o método *Waveform Relaxation* (VANDEWALLE, 1993; JANSSEN, 1997; LENT, 2006) e o método *Space-Time* (HORTON; VANDEWALLE, 1995), contudo ainda sem atingir a plena eficiência, principalmente no que diz respeito à paralelização. As equações da poroelasticidade (dadas por um sistema de equações em regime transiente), por exemplo, têm uma ampla área de aplicações em escoamentos em meios porosos, como reservatório de petróleo, processamento de alimentos, medicina, etc. Para tal equação, usa-se principalmente a metodologia *Time-Stepping* (GASPAR et al., 2003; WIENANDS et al., 2004; RODRIGO et al., 2016), também sem atingir a plena eficiência. Devido à grande importância de tais equações, suas aplicações e também à dificuldade em suas resoluções numéricas, pretende-se desenvolver métodos com baixo erro de discretização, baixo consumo de memória, alta velocidade de resolução e paralelizáveis.

## 2 Fundamentação teórica

Neste capítulo faz-se uma breve descrição dos principais temas abordados nesta tese. Primeiramente, faz-se uma abordagem sobre o Método das Diferenças Finitas (MDF), que é um método clássico e que apesar da base matemática não ser nova, pode apresentar diferentes formulações de aproximação numérica (TANNEHILL et al., 1997; STRIKWERDA, 1989). Depois disso, mostra-se uma das notações usadas neste trabalho, que é a notação estêncil. Também faz-se uma abordagem dos métodos iterativos e os métodos usados para aproximar a variável temporal, como o método de Euler, o método de Crank-Nicolson (CN), entre outros, veja por exemplo, Strikwerda (1989), Hirsch (2007) e Burden e Faires (2016). O método *multigrid* está exposto no capítulo seguinte.

### 2.1 Método das Diferenças Finitas (MDF)

De acordo com Ferziger e Peric (2002), o primeiro passo para a obtenção de uma solução numérica é discretizar o domínio geométrico, isto é, definir ao longo do domínio em quais pontos se deseja conhecer o valor da variável dependente através do auxílio de uma malha geométrica discreta. O princípio fundamental do MDF é aproximar, através de expressões algébricas, cada termo do modelo matemático em cada ponto (nó) dessa malha discretizada. Para isso, no MDF a malha geométrica é geralmente estruturada localmente, ou seja, cada ponto (nó) pode ser considerado como a origem de um sistema de coordenadas local, cujos eixos coincidem com as linhas da malha. A Fig. 1 e a Fig. 2 mostram exemplos de malhas cartesianas unidimensional (1D) e bidimensional (2D) usadas no MDF, respectivamente. Nessas figuras e nas demais figuras desta seção, o símbolo (•) denota os nós sobre os contornos e o símbolo (○) denota os nós internos da malha. No caso 1D, cada nó é representado pela posição  $i$ . No caso 2D, cada nó é unicamente definido pela interseção das linhas de malhas na posição  $(i, j)$ . Os nós vizinhos são definidos aumentando-se ou diminuindo-se uma unidade de cada índice  $i$  ou  $j$ . Assim o nó  $(i - 1, j)$  representa a posição Oeste,  $(i + 1, j)$  representa o nó na posição Leste,  $(i, j - 1)$  representa o nó na posição Sul e  $(i, j + 1)$  representa o nó na posição Norte.

A Fig. 3 mostra o MDF aplicado a um modelo 1D usando a discretização uniforme, isto é, uma malha de nós igualmente espaçados, com espaço entre os nós dado por  $h$ .

A filosofia do MDF é fazer aproximações diretamente da definição de derivada através da série de Taylor. Uma interpretação geométrica das aproximações central, adiantada e atrasada é mostrada na Fig. 4 com o auxílio de uma função contínua  $\Phi$ . A primeira derivada  $\frac{d\Phi}{dx}$  em um ponto  $x_i$  indica a inclinação da reta tangente à curva no ponto  $(x_i, \Phi(x_i))$  e isso é mostrado com a reta marcada "Exata" na Fig. 4. Essa inclinação pode

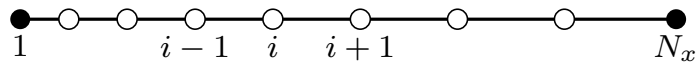


Figura 1 – Exemplo de uma malha unidimensional não uniforme.

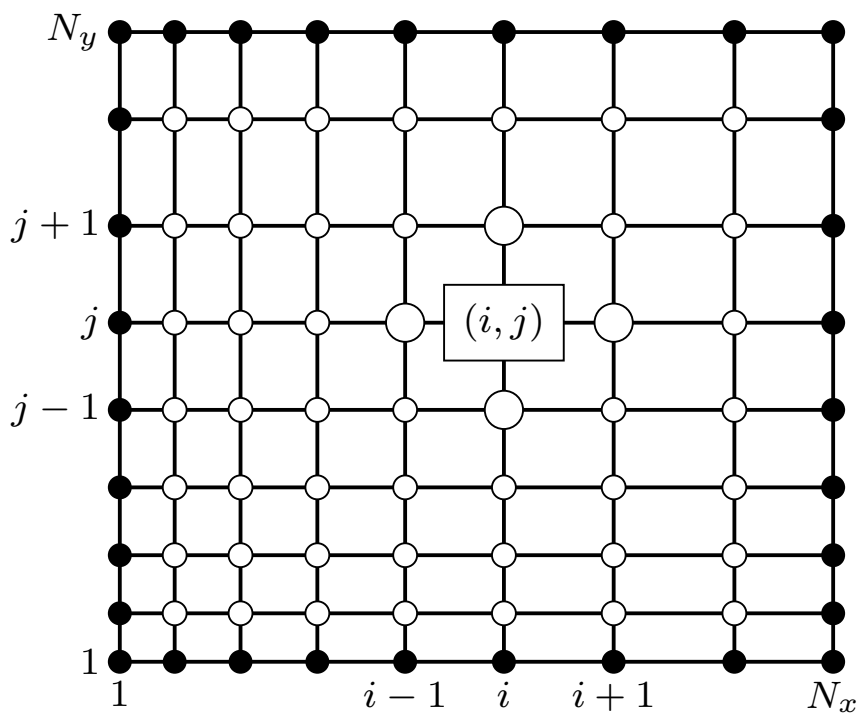


Figura 2 – Exemplo de uma malha bidimensional não uniforme.

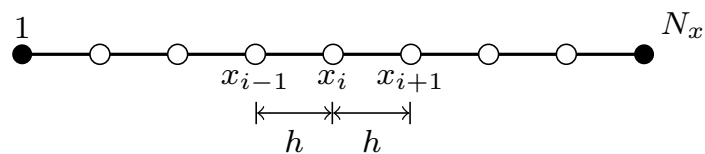


Figura 3 – Malha unidimensional uniforme com tamanho dos elementos de malha  $h$ .

ser aproximada pela inclinação da reta que passa por dois pontos vizinhos na curva. A reta marcada como "Adiantada" mostra que a derivada no ponto  $(x_i, \Phi(x_i))$  é aproximada pela inclinação de uma reta que passa pelos pontos  $(x_i, \Phi(x_i))$  e  $(x_{i+1}, \Phi(x_{i+1}))$ . A reta denotada "Atrasada" ilustra que a derivada no ponto  $(x_i, \Phi(x_i))$  é aproximada pela inclinação de



uma reta que passa pelos pontos  $(x_i, \Phi(x_i))$  e  $(x_{i-1}, \Phi(x_{i-1}))$ . A reta denominada "Central" representa aproximação por uma diferença central, ou seja, a inclinação da reta tangente no ponto  $(x_i, \Phi(x_i))$  é aproximada pela inclinação de uma reta que passa pelos pontos  $(x_{i-1}, \Phi(x_{i-1}))$  e  $(x_{i+1}, \Phi(x_{i+1}))$ , que são pontos situados em lados opostos do ponto em que a derivada é aproximada.

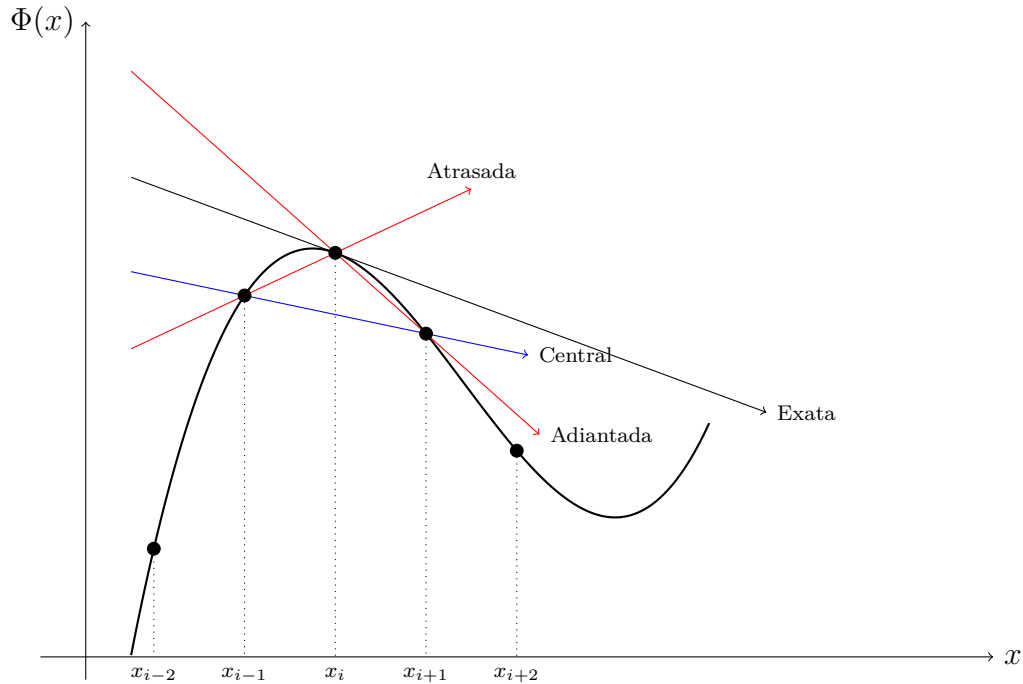


Figura 4 – Reta tangente (Exata) à curva  $\Phi$  no ponto  $P$  e as aproximações Atrasada, Adiantada e Central através da discretização pelo MDF.

Na Fig. 4 observa-se que algumas aproximações para a derivada são melhores que outras (em relação a inclinação com o eixo  $x$ ). Para a reta "Central", verifica-se que ocorre uma melhor aproximação em relação a reta "Exata". Verifica-se também que se  $h$  tende a zero ( $h \rightarrow 0$ ), todas as aproximações (Atrasada, Adiantada e Central) se aproximam da solução "Exata".

**Definição 2.1.** Uma função  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida num intervalo aberto  $I$ , chama-se *analítica* quando, para cada  $x \in I$  existe um  $\varepsilon > 0$  tal que a série de Taylor  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Phi^{(n)}(a)}{n!} h^n$  converge para  $\Phi(a + h)$  desde que  $|h| < \varepsilon$ .

### 2.1.1 Expansão em fórmula de Taylor

Para expressar cada tipo de aproximação e a respectiva ordem do erro, usa-se a série de Taylor (KREYSZIG, 1999; FERZIGER; PERIC, 2002; MARCHI, 2001). Qualquer função  $\Phi(x)$  analítica na vizinhança de  $x_i$ , pode ser expressa como uma série de Taylor:

$$\Phi_x = \Phi_i + (x - x_i) \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left( \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right)_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left( \frac{d^3\Phi}{dx^3} \right)_i + \dots \quad (2.1)$$

em que  $\Phi_x$  representa  $\Phi(x)$ ,  $\Phi_i$  representa  $\Phi(x_i)$  e  $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i$  representa  $\frac{d\Phi}{dx}(x_i)$ .

O valor de  $\Phi_x$  é exato se forem considerados todos os termos da série de Taylor. Para aplicar a Eq. (2.1) aos nós  $i - 1$  e  $i + 1$ , a partir do ponto  $i$ , como é mostrado na Fig. 3 e com o valor de  $h$  sendo constante, pode-se fazer

$$\begin{aligned} x = x_{i+1} &\implies (x - x_i) = (x_{i+1} - x_i) = h, \\ \Phi_{i+1} &= \Phi_i + h \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i + \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + \dots, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} x = x_{i-1} &\implies (x - x_i) = (x_{i-1} - x_i) = -h, \\ \Phi_{i-1} &= \Phi_i - h \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i - \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

De acordo com [Tannehill et al. \(1997\)](#), [Marchi \(2001\)](#) e [Burden e Faires \(2016\)](#) as expressões para a derivada de primeira ordem podem ser obtidas por combinação das Eqs. (2.2) e (2.3). A escolha de quais equações usar define o tipo de esquema e a ordem do erro de truncamento cometido. A seguir serão apresentados alguns dos esquemas mais comuns e que serão usados no decorrer deste texto. Para outras aproximações, veja por exemplo [Burden e Faires \(2016\)](#) e [Ferziger e Peric \(2002\)](#).

Isolando-se a derivada de primeira ordem,  $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i$ , na Eq. (2.2), tem-se

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \underbrace{\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h}}_{\text{considerado}} - \underbrace{\frac{h}{2} \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i - \frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + \dots}_{\text{desprezado (erro de truncamento)}} \quad (2.4)$$

Assim, a derivada de primeira ordem de  $\Phi$  é aproximada de forma adiantada (em inglês, *Downstream Difference Scheme*, DDS) a partir do ponto  $i$  através de

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i^{DDS} = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h} + O(h), \quad (2.5)$$

e o erro de truncamento  $\left(\varepsilon \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i^{DDS}\right)$  é dado por

$$\varepsilon \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i^{DDS} = -\frac{h}{2} \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i - \frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i - \frac{h^3}{24} \left(\frac{d^4\Phi}{dx^4}\right)_i - \dots = O(h). \quad (2.6)$$

Isolando-se a primeira derivada na Eq. (2.3), tem-se

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \underbrace{\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h}}_{\text{considerado}} + \underbrace{\frac{h}{2} \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i - \frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + \dots}_{\text{desprezado (erro de truncamento)}} \quad (2.7)$$

Assim, a derivada de primeira ordem de  $\Phi$  é aproximada de forma atrasada (em inglês, *Upstream Difference Scheme*, UDS) a partir do ponto  $i$ , através de

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i^{UDS} = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h} + O(h), \quad (2.8)$$

e o erro de truncamento é dado por

$$\varepsilon \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i^{UDS} = \frac{h}{2} \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i - \frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + \frac{h^3}{24} \left(\frac{d^4\Phi}{dx^4}\right)_i - \dots = O(h). \quad (2.9)$$

Subtraindo-se a Eq. (2.3) da Eq. (2.2), tem-se que

$$\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1} = 2h \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \frac{2h^3}{6} \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + \frac{2h^5}{120} \left(\frac{d^5\Phi}{dx^5}\right)_i + \dots, \quad (2.10)$$

ou

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \underbrace{\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2h}}_{\text{considerado}} - \underbrace{\frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i - \frac{h^4}{120} \left(\frac{d^5\Phi}{dx^5}\right)_i - \dots}_{\text{desprezado (erro de truncamento)}}. \quad (2.11)$$

Assim, a derivada de primeira ordem de  $\Phi$  é aproximada de forma centrada (em inglês, *Central Difference Scheme*, CDS) para o ponto  $i$ , através de

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i^{CDS} = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad (2.12)$$

e o erro de truncamento é dado por

$$\varepsilon \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i^{CDS} = -\frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i - \frac{h^4}{120} \left(\frac{d^5\Phi}{dx^5}\right)_i - \dots = O(h^2). \quad (2.13)$$

De forma semelhante ao que foi feito na aproximação da derivada de primeira ordem, seguem-se de [Tannehill et al. \(1997\)](#), [Marchi \(2001\)](#) e [Burden e Faires \(2016\)](#), as relações para expressar as aproximações da derivada de segunda ordem.

Somando-se a Eq. (2.2) e a Eq. (2.3), tem-se

$$\Phi_{i-1} + \Phi_{i+1} = 2\Phi_i + h^2 \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i + \frac{h^4}{12} \left(\frac{d^4\Phi}{dx^4}\right)_i + \frac{h^6}{360} \left(\frac{d^6\Phi}{dx^6}\right)_i + \dots, \quad (2.14)$$

ou

$$\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i = \underbrace{\frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{h^2}}_{\text{considerado}} - \underbrace{\frac{h^2}{12} \left(\frac{d^4\Phi}{dx^4}\right)_i - \frac{h^4}{360} \left(\frac{d^6\Phi}{dx^6}\right)_i - \dots}_{\text{desprezado (erro de truncamento)}} \quad (2.15)$$

Assim, a derivada de segunda ordem de  $\Phi$  é aproximada de forma centrada com 3 pontos (CDS) para o ponto  $P$ , através de

$$\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i^{CDS} = \frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{h^2} + O(h^2), \quad (2.16)$$

e o erro de truncamento é dado por

$$\varepsilon \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i^{CDS} = -\frac{h^2}{12} \left(\frac{d^4\Phi}{dx^4}\right)_i - \frac{h^4}{360} \left(\frac{d^6\Phi}{dx^6}\right)_i - \frac{h^6}{20160} \left(\frac{d^8\Phi}{dx^8}\right)_i - \dots = O(h^2). \quad (2.17)$$

## 2.2 Notação estêncil

A notação estêncil é apropriada para definir um operador diferencial discreto  $L_h$  em uma malha cartesiana retangular  $\Omega^h$ . Trottenberg et al. (2001) e Wienands e Joppich (2005) afirmam que é conveniente usar a terminologia estêncil para descrever funções de malhas do tipo  $\omega_h : \Omega^h \rightarrow \mathbb{R}$  e também para facilitar o uso da análise de Fourier local. Assim, considera-se a função de malha

$$\begin{aligned} \omega_h : \Omega^h &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \omega_h(x, y). \end{aligned}$$

Um estêncil geral  $[S_{\kappa_1\kappa_2}]_h$  dado por

$$[S_{\kappa_1\kappa_2}]_h = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & S_{-1,1} & S_{0,1} & S_{1,1} & \cdots \\ \cdots & S_{-1,0} & S_{0,0} & S_{1,0} & \cdots \\ \cdots & S_{-1,-1} & S_{0,-1} & S_{1,-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad S_{\kappa_1\kappa_2} \in \mathbb{R},$$

em que  $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}$  indicam as posições no estêncil, define um conjunto de funções de malha dadas por

$$[S_{\kappa_1\kappa_2}]_h \omega_h(x, y) = \sum_{\kappa_1, \kappa_2} S_{\kappa_1\kappa_2} \omega_h(x + \kappa_1 h_x, y + \kappa_2 h_y), \quad (2.18)$$

em que  $h_x$  e  $h_y$  indicam as distâncias entre os nós espaciais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Aqui, assume-se que somente um número finito de coeficientes  $S_{\kappa_1\kappa_2}$  são diferentes de zero.

Os estêncis mais comuns são os compactos de cinco pontos e de nove pontos, dados na malha  $h$ , respectivamente por

$$\begin{bmatrix} & S_{0,1} & \\ S_{-1,0} & S_{0,0} & S_{1,0} \\ & S_{0,-1} & \end{bmatrix}_h \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} S_{-1,1} & S_{0,1} & S_{1,1} \\ S_{-1,0} & S_{0,0} & S_{1,0} \\ S_{-1,-1} & S_{0,-1} & S_{1,-1} \end{bmatrix}_h. \quad (2.19)$$

Para ilustrar este procedimento, considera-se o operador Laplaciano  $Lu = -\Delta u = -(u_{xx} + u_{yy})$ . A discretização em uma malha  $\Omega^h : [0, 1] \times [0, 1]$  através do Método das Diferenças Finitas usando aproximação de segunda ordem do tipo CDS, conduz a

$$\begin{aligned} L_h u_h(x, y) &= -\Delta_h u_h(x, y) \\ &= \frac{1}{h^2} [4u_h(x, y) - u_h(x - h, y) - u_h(x + h, y) - u_h(x, y - h) - u_h(x, y + h)] \\ &= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}_h u_h(x, y). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Assim

$$L_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}_h$$

representa o estêncil de cinco pontos do operador Laplaciano discreto  $-\Delta_h$ .

## 2.3 Métodos iterativos

Os métodos mais comuns usados para resolver sistemas de equações lineares são os métodos diretos e os métodos iterativos. Os métodos diretos são mais usados para matrizes de pequeno porte e densas, enquanto que os métodos iterativos são mais eficazes quando aplicados a matrizes de grande porte e esparsas (muitos elementos iguais a zero) (BURDEN; FAIRES, 2016). Como neste caso a discretização é feita através do MDF, as matrizes obtidas com as discretizações possuem como característica a esparsidade.

Os métodos iterativos, ao contrário dos métodos diretos, fornecem a resposta como uma aproximação da solução, e isso pode ser variável. De acordo com Saad (2003), os métodos iterativos começam com uma solução aproximada dada e modificam as componentes da aproximação, uma variável ou um bloco de variáveis, em uma determinada ordem, até que um critério de convergência seja atingido. Cada uma dessas modificações, chamadas de passos de relaxamento, destina-se a suavizar as componentes do erro.

Considerando o sistema de equações lineares dado por

$$Au = f, \quad (2.21)$$

com  $A$  sendo uma matriz quadrada de ordem  $n \times n$  e  $u$  e  $f$  vetores de ordem  $n$ , tem-se

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n = f_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n = f_2 \\ \vdots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + a_{nn}u_n = f_n \end{cases}. \quad (2.22)$$

A matriz dos coeficientes  $A$  do sistema (2.22) pode ser dividida na forma:

$$A = -L + D - U, \quad (2.23)$$

em que  $-L$  é uma matriz triangular inferior formada pela parte inferior da matriz  $A$ ,  $D$  é a matriz formada pela diagonal de  $A$  e  $-U$  é uma matriz triangular superior formada pela parte superior da matriz  $A$ .

### 2.3.1 Método de Jacobi

Seguindo Ruggiero e Lopes (1996), Saad (2003) e Ferziger e Peric (2002) e considerando a matriz  $D$  não singular, ou seja  $d_{ii} \neq 0 \forall i$ , pode-se reescrever o sistema linear dado na Eq. (2.21) na forma

$$\begin{aligned} (-L + D - U)u &= f \\ Du &= (L + U)v + f. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Isolando-se  $u$  na iteração atual e considerando-se  $v$  como sendo sua aproximação, o procedimento que caracteriza o método de Jacobi na forma matricial é dado por

$$v^{\nu+1} = D^{-1}(L + U)v^{\nu} + D^{-1}f. \quad (2.25)$$

### 2.3.2 Método de Gauss-Seidel

Da mesma forma que o método de Jacobi, considerando-se a matriz  $D$  não singular, pode-se escrever o sistema linear dado na Eq. (2.21) na forma

$$\begin{aligned} (-L + D - U)u &= f, \\ (-L + D)u &= Uu + f. \end{aligned}$$

Isolando-se  $u$  na iteração atual e considerando-se  $v$  como sendo sua aproximação, o procedimento que caracteriza o método de Gauss-Seidel na forma matricial é dado por

$$v^{\nu+1} = (-L + D)^{-1}Uv^{\nu} + (-L + D)^{-1}f. \quad (2.26)$$

Nos procedimentos descritos anteriormente, para Jacobi e Gauss-Seidel, a matriz de iteração é constante ao longo do processo iterativo. Os métodos iterativos que possuem esta propriedade são chamados métodos iterativos básicos ou estacionários (TROTTEBERG et al., 2001).

### 2.3.3 Suavizador Vanka

O suavizador chamado de Vanka faz parte de uma classe de suavizadores que realizam suavização por blocos (em inglês, *box-relaxation*) e é indicado para resolver

problemas que são modelados por sistemas de equações e possuem pontos de sela ( $K\Delta p \approx 0$ ). De acordo com [Rodrigo \(2010\)](#), esse suavizador Vanka consiste em um algoritmo iterativo na forma de Gauss-Seidel com um sistema pontual e que atualiza simultaneamente todas as incógnitas do deslocamento que estão ao redor de um nó, em que também é atualizado o valor da pressão. Um esboço dos blocos de incógnitas é mostrado na Fig. 5. Portanto, todas as incógnitas no sistema são consideradas acopladas, e um sistema de equações deve ser resolvido para cada ponto da malha.

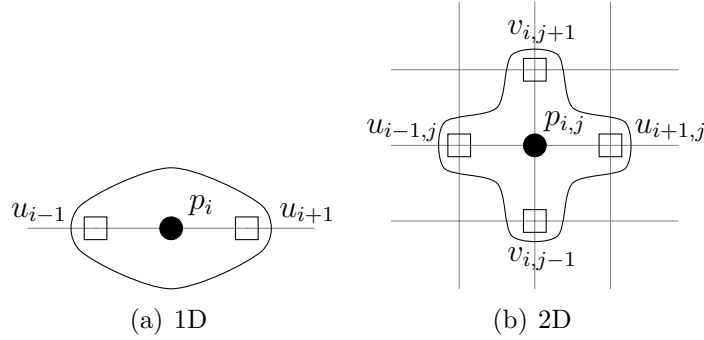


Figura 5 – Suavizador Vanka (usado para o problema da poroelasticidade).

Para resolver o sistema de equações em cada ponto da malha com as incógnitas dadas pelos deslocamentos e pressão, como mostra a Fig. 5, tem-se o sistema de equações descrito na Eq. (2.27)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{d}^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^u \\ x^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ f \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

em que se considera  $\mathbf{A}$  uma matriz contendo os coeficientes associados aos deslocamentos desconhecidos nas equações correspondentes ao deslocamento,  $\mathbf{b}$  o vetor dos coeficientes correspondentes à pressão desconhecida nas equações correspondentes ao deslocamento,  $\mathbf{d}$  o vetor consistindo dos coeficientes associados aos deslocamentos desconhecidos na equação correspondente a pressão e  $c$  o coeficiente do ponto relacionado à pressão na respectiva equação da pressão. Dessa forma  $\mathbf{x}^u$  são as incógnitas relacionadas ao deslocamento e  $x^p$  é a incógnita da pressão. Finalmente  $\mathbf{f}$  e  $f$  são os correspondentes lados direitos.

Para a solução do sistema de equações descrito na Eq. (2.27) pode-se usar qualquer método direto.

Para o uso do suavizador Vanka aplicado às equações da poroelasticidade, por exemplo, [Rodrigo \(2010\)](#), [Gaspar et al. \(2004\)](#) e [Gaspar e Rodrigo \(2015\)](#) comentam que seu uso se dá pelo fato de existirem pontos de sela no problema da poroelasticidade. A iteração com o Vanka ocorre sobre todos os pontos da malha seguindo uma ordem (lexicográfica ou colorida) e em cada um dos pontos, o correspondente sistema de equações é resolvido (de forma direta). Para o caso unidimensional é resolvido um sistema de  $3 \times 3$  equações simultaneamente em cada um dos pontos da malha, centrado em torno do ponto

da pressão, ou seja, são resolvidos de forma acoplada para cada ponto, a pressão  $p_i$  e os deslocamentos adjacentes  $u_{i-1}$  e  $u_{i+1}$ , ver a Fig. 5(a). Para o caso bidimensional é resolvido um sistema de  $5 \times 5$  equações simultaneamente em cada ponto da discretização, também centrado em torno do ponto da pressão, ou seja, são resolvidos de forma acoplada para cada ponto, a pressão  $p_{i,j}$  e os deslocamentos adjacentes  $u_{i-1,j}$ ,  $u_{i+1,j}$ ,  $v_{i,j-1}$  e  $v_{i,j+1}$ , ver a Fig. 5(b). Dessa forma pode-se perceber que para cada iteração com o suavizador Vanka, a variável relacionada à pressão é atualizada uma vez, enquanto que as variáveis relacionadas aos deslocamentos são atualizadas duas vezes.

### 2.3.4 Ordenação das atualizações das incógnitas

A eficiência destes métodos iterativos está fortemente ligada à ordenação em que as incógnitas são determinadas ou atualizadas. As ordens mais comuns são a ordenação lexicográfica (Lex) (Fig. 6), a ordenação *red-black* (RB) (Fig. 7) e algumas variantes, como a ordenação de varredura para os métodos de suavização por blocos gerando os métodos por linhas (Fig. 8), zebra (Fig. 9), entre outros (WESSELING, 1992; TROTTEBERG et al., 2001; WIENANDS; JOPPICH, 2005). Um dos objetivos das ordens de atualização coloridas (ou zebras) é possibilitar o desenvolvimento de algoritmos paralelizáveis.

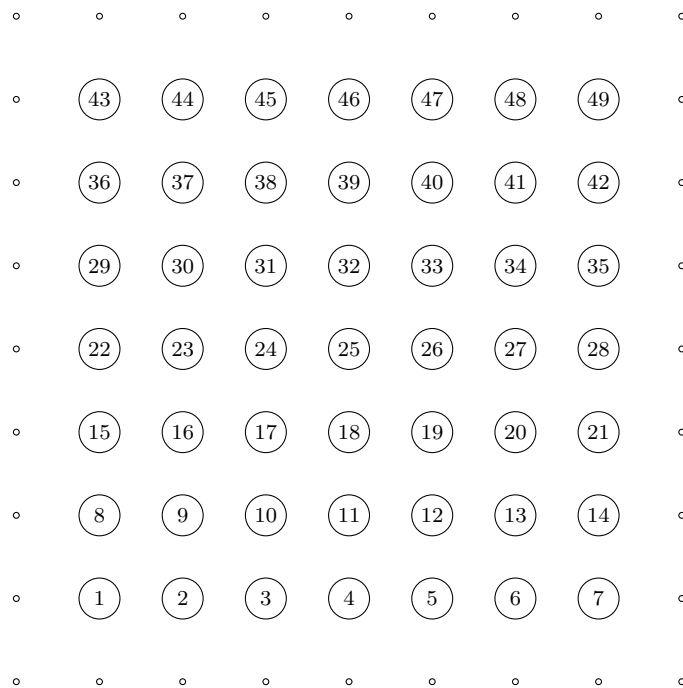


Figura 6 – Ordenação lexicográfica para atualização das incógnitas.



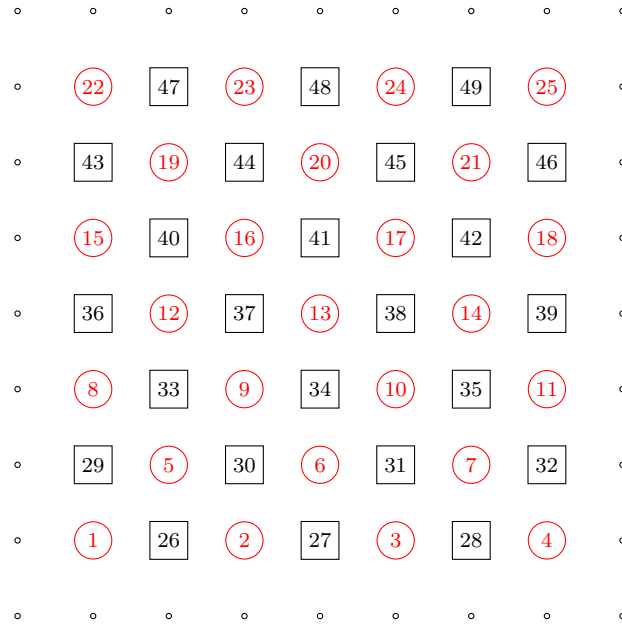
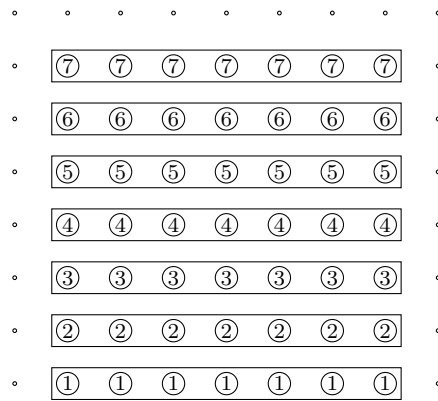
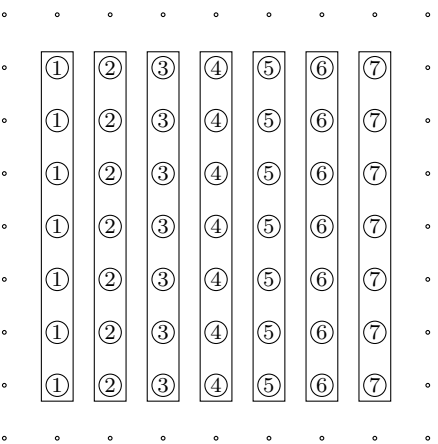


Figura 7 – Ordenação *red-black* para atualização das incógnitas: (○) *red* e (□) *black*.

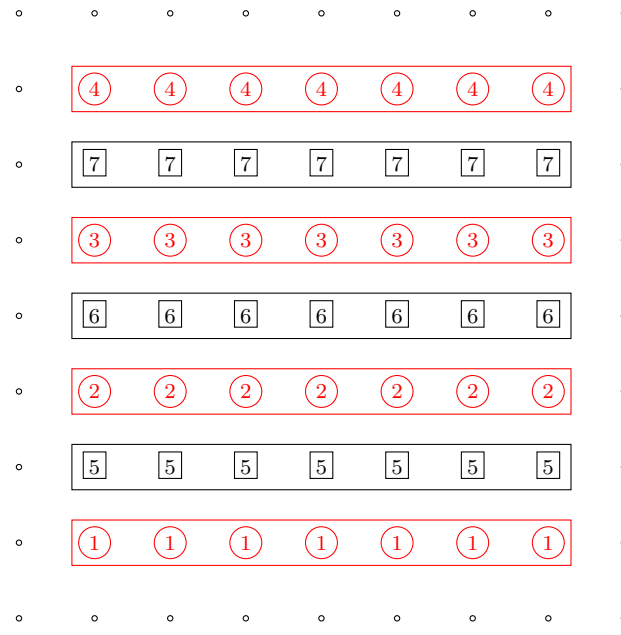


(a) Linha horizontal.

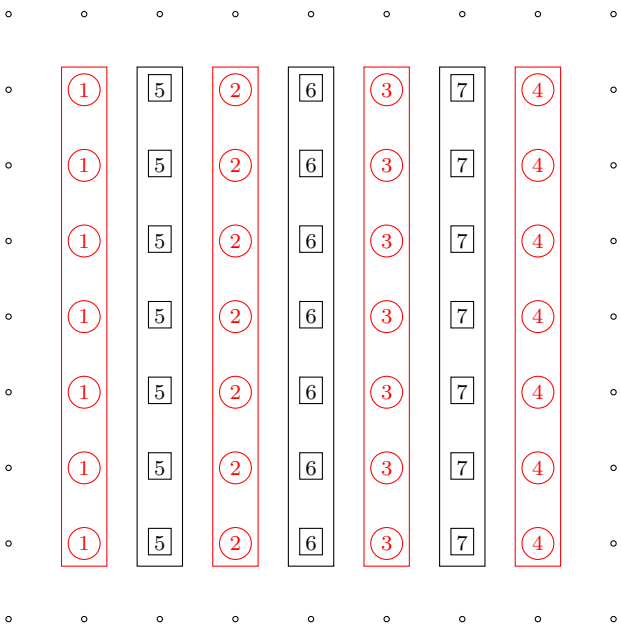


(b) Linha Vertical.

Figura 8 – Ordenação para atualização das incógnitas com um método linha.



(a) Zebra horizontal.



(b) Zebra Vertical.

Figura 9 – Ordenação para atualização das incógnitas com um método zebra.

## 2.4 Métodos para a aproximação temporal

Dado um Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f \\ u(x, y, t_0) = u^0 \end{cases} \quad (2.28)$$

com  $u$  e  $f$  funções das variáveis  $(x, y, t)$ , em que  $[x, y]$  está contido em um domínio espacial,  $t \in [t_0, t_f]$ , em que  $t_0$  representa o tempo inicial e  $t_f$  o tempo final,  $u^0$  é a condição inicial

(função das variáveis espaciais  $x$  e  $y$ ). Nesta tese, as condições para existência e unicidade da solução são garantidas, ver (BURDEN; FAIRES, 2016). Observa-se que a derivada temporal é ordinária, pois apesar de depender dos valores espaciais  $(x, y)$ , consideram-nos conhecidos durante o cálculo da variável temporal.

### 2.4.1 Formulações temporais de EDPs

Maliska (2004) relata que uma formulação é dita explícita a um passo de tempo quando todas as incógnitas vizinhas ao ponto  $i$  são avaliadas nos passos de tempo anteriores e, portanto, já são conhecidas, como mostra a Fig. 10(a).

Uma formulação é dita totalmente Implícita a um passo de tempo quando todas as incógnitas vizinhas ao ponto  $i$  são avaliadas no passo de tempo atual e, portanto, não são conhecidas em sua totalidade (depende da ordenação de atualização das incógnitas), como mostra a Fig. 10(b).

A formulação implícita a um passo de tempo ocorre quando as incógnitas vizinhas ao ponto  $i$  são avaliadas nos passos de tempo atual e anterior, como mostra a Fig. 10(c).

### 2.4.2 Método de Euler

O método de *Euler* consiste em obter uma aproximação para a solução  $u(t)$  de (2.28) de forma discreta em diversos valores no intervalo  $[t_0, t_f]$ , chamados pontos de malha. Para isso, estipula-se que os pontos de malha têm distribuição uniforme no intervalo  $[t_0, t_f]$ , seleciona-se um número positivo inteiro  $N_t$  e os pontos de malha (em  $t$ ) são dados por

$$t_{m+1} = t_0 + (m + 1)\tau \quad \text{para cada } m = 0, 1, \dots, N_t - 1. \quad (2.29)$$

A distância entre os pontos  $\tau = \frac{t_f - t_0}{N_t}$  é chamada de tamanho do passo de tempo.

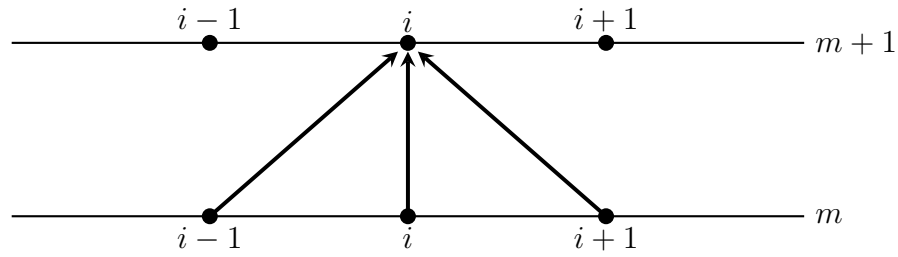
Seja  $u(t)$  a única solução da Eq. (2.28), com duas derivadas contínuas em  $[t_0, t_f]$ , de modo que sua expansão em série de Taylor para cada  $m = 0, 1, \dots, N_t - 1$  é dada por

$$u(t_{m+1}) = u(t_m) + \tau \frac{d}{dt} u(t_m) + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} u(\xi_m), \quad (2.30)$$

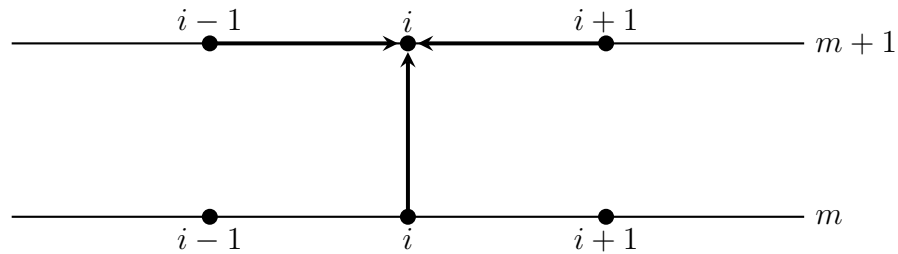
para algum  $\xi_m \in (t_0, t_f)$ .

Considerando-se  $v$  uma aproximação para  $u$ , o método de Euler constrói  $v^m \approx u(t_m)$  para cada  $m = 0, 1, \dots, N_t - 1$  ao desprezar os termos  $\frac{\tau^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} u(\xi_k)$ , de segunda ordem de aproximação em  $\tau$ . Dessa forma, o método de *Euler Implícito* (primeira ordem de aproximação no tempo) é dado por

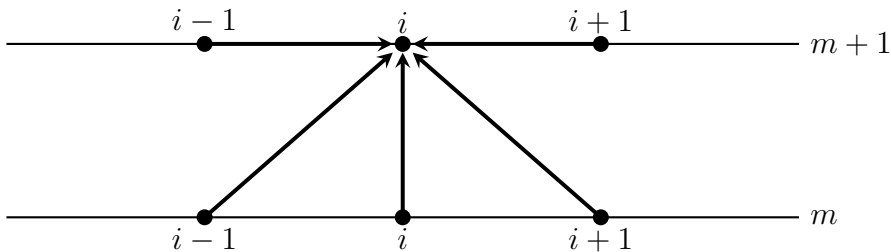
$$\begin{cases} v^0 = y^0 \\ v^{m+1} = v^m + \tau f(v^{m+1}, t_{m+1}) \end{cases} \quad \text{para cada } m = 0, 1, \dots, N_t - 1. \quad (2.31)$$



(a) Formulação Explícita.



(b) Formulação Totalmente Implícita.



(c) Formulação Implícita.

Figura 10 – Conexão espacial e temporal em um ponto  $i$  com formulações Explícita, Totalmente Implícita e Implícita (MALISKA, 2004, p. 39).

Esse método é chamado de método de *Euler Implícito*, pois para obter o valor de  $v^{m+1}$  são necessários valores relacionados aos passos de tempo  $m$  e  $m + 1$ . Se para obter o valor de  $v^{m+1}$  utilizar apenas valores relacionados ao passo de tempo  $m + 1$  o método de Euler é dito método de Euler Totalmente Implícito e se são necessários apenas valores relacionados ao passo de tempo  $m$  o método de Euler é dito método de Euler Explícito (BURDEN; FAIRES, 2016; HIRSCH, 2007).

O método Explícito é condicionalmente estável, ou seja, converge quando satisfaz um critério de convergência (BURDEN; FAIRES, 2016) que relaciona o tamanho

da discretização espacial ao tamanho do passo temporal. Os métodos Implícitos e Totalmente Implícitos são incondicionalmente estáveis, ou seja, independem do tamanho da discretização espacial e do tamanho do passo temporal (BURDEN; FAIRES, 2016; STRIKWERDA, 1989).

### 2.4.3 Método de Crank-Nicolson

De acordo com Tannehill et al. (1997), Burden e Faires (2016), Strikwerda (1989) e Hirsch (2007), o método de Crank-Nicolson (CN) é um método incondicionalmente estável, ou seja, a sua convergência não depende da relação entre o tamanho do passo de tempo e o tamanho da discretização espacial e possui segunda ordem de aproximação temporal ( $O(\tau^2)$ ).

Considerando por exemplo a Eq. (2.28), o método de CN consiste em fazer

$$\begin{cases} v^0 = y^0 \\ v^{m+1} = v^m + \frac{\tau}{2} [f(v^{m+1}, t_{m+1}) + f(v^m, t_m)] \end{cases} \quad m = 0, 1, \dots, N_t - 1, \quad (2.32)$$

em que os subíndices  $m+1$  e  $m$  indicam os passos de tempo atual e anterior, respectivamente.

## 3 Método *multigrid*

Quando o problema proposto é discretizado e resolvido em apenas uma malha, diz-se que este problema está sendo resolvido com o método *singlegrid*. Se usar duas malhas para resolver o problema, diz-se que está sendo usado o método de duas malhas (ou *two-grid*). Porém, com o uso de três ou mais malhas para a solução do problema, diz-se que está sendo usado o método *multigrid*.

O método *multigrid* é uma técnica eficiente para acelerar a suavização das fortes oscilações do resíduo usando um método de relaxação (método iterativo básico). Proposto originalmente por Fedorenko (1964), esse método é atualmente muito utilizado para acelerar a convergência de sistemas de equações do tipo  $Au = f$ . O princípio de funcionamento desse método está fortemente relacionado ao comportamento de convergência dos métodos iterativos básicos (Gauss-Seidel e Jacobi, por exemplo). Esses métodos apresentam propriedades de suavização dos erros de alta frequência (componentes oscilatórias), enquanto as baixas frequências são mantidas praticamente inalteradas. Assim, nas primeiras iterações reduzem-se rapidamente as componentes oscilatórias do erro e à medida que esse número vai aumentando, o erro começa a cair mais lentamente, indicando a predominância das componentes suaves (BRANDT, 1977; STÜBEN; TROTTEBERG, 1981; WESSELING, 1992; BRIGGS et al., 2000; TROTTEBERG et al., 2001). Assim, o método *multigrid* consiste no uso de discretização do problema em diversas malhas, ou seja, após a suavização das componentes oscilatórias em uma malha fina, as componentes dos erros (suaves) são transferidas para uma malha mais grossa, tornando-se oscilatórias. Esse processo pode ser repetido até a malha mais grossa possível e faz com que o método iterativo usado não perca a eficiência, pois agirá sempre nas componentes oscilatória dos erros.

Como dito anteriormente, o método *multigrid* geométrico utiliza-se de informações das malhas consideradas na discretização do problema, o que significa que ele é recomendado para problemas em malhas estruturadas. Como neste trabalho serão usadas apenas malhas estruturadas, o método *multigrid* geométrico será a ferramenta de trabalho adotada.

### 3.1 Caracterização do método *multigrid*

A ideia principal do método *multigrid* consiste em usar uma discretização de malha adequada para que, usando um suavizador (Gauss-Seidel, Jacobi, ...), as componentes oscilatórias do erro sejam suavizadas rapidamente nas primeiras iterações. Após a suavização, o método *multigrid* procura trabalhar com uma sequência de malhas cada vez mais grossas, de tal forma que os comprimentos de ondas do erro, que são longos em

malhas finas, sejam transformados em curtos em malhas mais grossas, tornando-se mais oscilatórios, situação na qual as componentes do erro são suavizadas mais rapidamente.

A razão de engrossamento entre as malhas  $q$  é dada por

$$q = \frac{h_2}{h_1}, \quad (3.1)$$

em que  $h_1$  e  $h_2$  são o tamanhos dos elementos da malha consecutivamente mais grossa e fina, respectivamente. A Fig. 11 mostra uma sequência de três malhas bidimensionais ( $\Omega^h$ ,  $\Omega^{2h}$  e  $\Omega^{4h}$ ) com razão de engrossamento padrão  $q = 2$ .

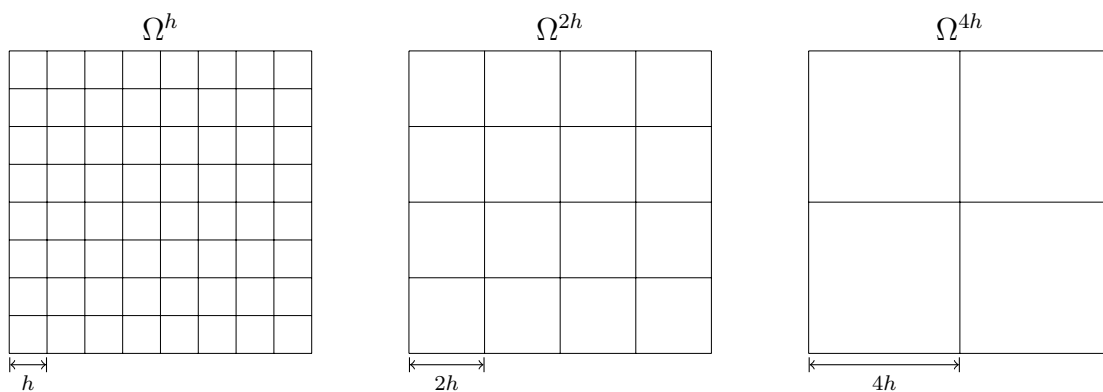


Figura 11 – Sequência de 3 malhas bidimensionais e uniformes com engrossamento padrão.

### 3.1.1 Análise de convergência

Seja o sistema linear na forma

$$Au = f. \quad (3.2)$$

Supondo que este sistema tenha uma única solução e que  $v$  é uma aproximação para  $u$ , pode-se definir duas medidas importantes de  $v$  como aproximação de  $u$ .

**Definição 3.1.** O erro (ou erro algébrico) é dado por:

$$e = u - v. \quad (3.3)$$

Porém, o erro de uma solução numérica é inacessível quando não se conhece a solução analítica. Assim, uma medida calculável para verificar o quanto  $v$  se aproxima de  $u$  é o resíduo.

**Definição 3.2.** O resíduo da Eq. (3.2) para uma aproximação  $v$  é dado por

$$r = f - Av. \quad (3.4)$$

Como a solução aproximada  $v$  é obtida através de um processo iterativo, pode-se escrever o erro e o resíduo em função da iterada atual  $\nu$ , respectivamente, como

$$e^\nu = u - v^\nu, \quad (3.5)$$

$$r^\nu = f - Av^\nu, \quad (3.6)$$

sendo que a magnitude de ambos pode ser medida pelas normas vetoriais conhecidas (BURDEN; FAIRES, 2016).

Uma importante relação entre erro e resíduo é mostrado em Briggs et al. (2000), através da expressão

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|r\|}{\|f\|} \leq \frac{\|e\|}{\|u\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|f\|}, \quad (3.7)$$

com  $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  sendo o número de condicionamento da matriz  $A$ .

Observe que, pelas inequações (3.7),  $\|r\| \approx 0$  implica em  $\|e\| \approx 0$  somente se  $\text{cond}(A)$  é pequeno, ou seja, próximo da unidade ( $\text{cond}(A) \approx 1$ ). Neste caso, diz-se que a matriz  $A$  é bem condicionada.

A partir das Eqs. (2.25) e (2.26) pode-se construir o método iterativo dado por

$$v^{\nu+1} = Sv^\nu + g, \quad (3.8)$$

em que  $v$  é uma aproximação para a solução desejada. Nota-se que  $S$  dependerá do método iterativo utilizado.

**Definição 3.3.** O método iterativo  $v^{\nu+1} = Sv^\nu + g$  é chamado de convergente se e somente se  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|S\|^\nu = 0$ .

**Definição 3.4.** O fator de convergência do método iterativo dado na Eq. (3.8) é

$$\rho(S) = \max |\lambda(S)|.$$

Na definição 3.4,  $\lambda(S)$  representa os autovalores da matriz  $S$  e o fator de convergência  $\rho$  (máximo autovalor, em módulo, de  $S$ ) é também chamado de raio espectral da matriz  $S$ . Este  $\rho$  indica a pior redução do erro com o passo iterativo (BRIGGS et al., 2000).

**Teorema 3.1.** O método iterativo  $v^{\nu+1} = Sv^\nu + g$  é convergente se e somente se  $\rho(S) \leq 1$ .

Prova: ver Burden e Faires (2016).

O raio espectral ou fator de convergência pode ser aproximado numericamente como descrito em Janssen (1997, p. 43) por

$$\rho^{\nu+1} = \frac{\|e^{\nu+1}\|}{\|e^\nu\|}. \quad (3.9)$$



O mesmo autor comenta que se usar o resíduo ao invés do erro na Eq. (3.9), os resultados serão semelhantes.

O fator de convergência médio pode ser definido como a média geométrica dos fatores de convergência de (3.9). Assim,

$$\rho_m = \sqrt[n]{\rho^{(1)} \cdot \rho^{(2)} \cdot \dots \cdot \rho^{(n)}} , \quad (3.10)$$

em que  $n$  representa o número de iteradas ou ciclos *multigrid* realizados.

### 3.1.2 Análise de erros

Para uma análise do comportamento dos erros, Briggs et al. (2000) afirmam que é suficiente utilizar o sistema homogêneo  $Au = 0$ . Neste caso, tem-se a vantagem da solução exata ( $u = 0$ ) ser conhecida e o erro da aproximação dada por  $v$  é simplesmente  $-v$ .

Para facilitar os cálculos, considera-se aqui o caso unidimensional da equação de Poisson com condições de contorno de Dirichlet com estimativa inicial, ou modos de Fourier, dada por  $v_j = \text{sen}\left(\frac{jk\pi}{N}\right)$ ,  $1 \leq j \leq N - 1$  e  $k \leq N - 1$ , em que  $v$  é uma aproximação da solução  $u$ ,  $N$  é o número de pontos da discretização,  $k$  é o número de em que ou modos de Fourier e  $j$  é a componente do vetor  $v$ .

**Definição 3.5.** Os modos de Fourier localizados na metade inferior do espectro, com  $1 \leq k < \frac{N}{2}$ , são chamados de modos de Fourier de baixa frequência ou modos suaves. Os modos de Fourier localizados na metade superior do espectro, com  $\frac{N}{2} \leq k \leq N - 1$ , são chamados de modos de Fourier de alta frequência ou modos oscilatórios.

A Fig. 12(a) e a Fig. 12(b) mostram os efeitos do engrossamento de malhas para suavizar os modos de Fourier. Observa-se que o número de ondas  $k$  permanece inalterado, enquanto que o número de pontos é reduzido, fazendo com que a onda torne-se mais oscilatória ( $\frac{N}{2} \leq k \leq N - 1$ ).

Ao se projetar um modo suave com número de ondas  $1 \leq k < \frac{N}{2}$  da malha fina  $\Omega^h$  para a malha grossa  $\Omega^{2h}$ , transforma-se o modo em oscilatório (BRIGGS et al., 2000; TROTTEBERG et al., 2001; WESSELING, 1992). Por isso é recomendável transferir o problema de relaxação para a malha grossa após a suavização dos erros oscilatórios, pois lá os modos de erros suaves se apresentarão mais oscilatórios, e o processo de relaxação será mais eficiente.

Com essa filosofia para suavizar os erros de baixa frequência com o uso de malhas mais grossas, o método *multigrid* possui uma taxa (ou fator) de convergência ideal (teórica) que independe do tamanho da malha, isto é, independe do número de pontos da discretização da malha (FERZIGER; PERIC, 2002; ROACHE, 1998). Para obter um bom desempenho do método *multigrid*, devem-se usar diversos níveis de malhas (TANNEHILL et al., 1997; PINTO; MARCHI, 2007).

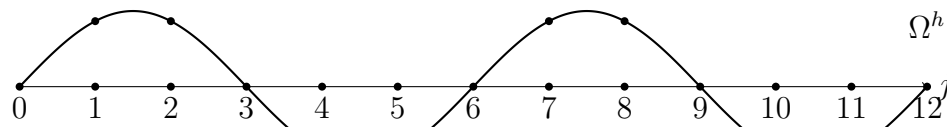
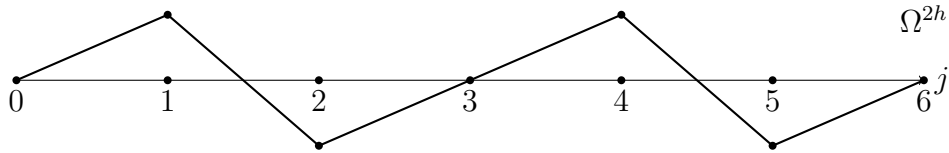
(a)  $k = 4$  ondas sobre a malha com  $N = 12$  pontos.(b)  $k = 4$  ondas sobre a malha com  $N = 6$  pontos.

Figura 12 – Número de ondas  $k = 4$  sobre uma malha fina com  $N = 12$  pontos e sobre uma malha grossa com  $N = 6$  pontos (BRIGGS et al., 2000, p. 32).

## 3.2 Operadores de transferência entre malhas

Os elementos essenciais do método *multigrid* são os operadores de restrição  $(I_h^{2h})$  e de prolongação  $(I_{2h}^h)$ . Com o problema representado em uma malha fina ( $\Omega^h$ ) é necessário transferir as informações para as malhas mais grossas ( $\Omega^{2h}, \Omega^{4h}, \dots$ ). Isto é feito por um operador chamado *operador de restrição*. Para fazer o caminho contrário e transferir as informações das malhas grossas para as malhas mais finas, faz-se necessário um operador chamado *operador de prolongação*.

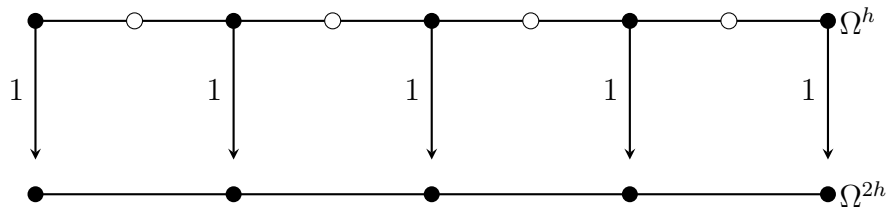
Nas figuras deste capítulo, o símbolo ( $\bullet$ ) representa os nós que pertencem a ambas as malhas, o símbolo ( $\circ$ ) representa os nós que pertencem apenas à malha fina e os números (ao lado das setas) representam os pesos atribuídos a cada tipo de restrição ou prolongação.

### 3.2.1 Operadores de restrição

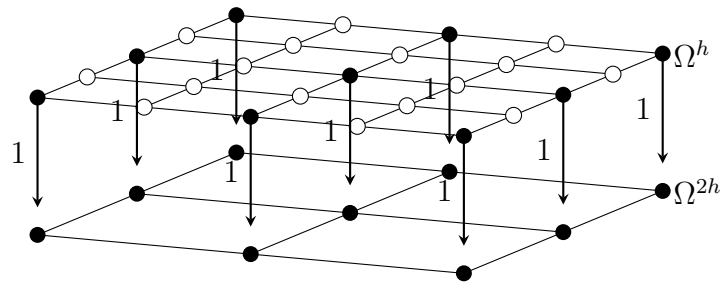
O operador de restrição  $(I_h^{2h})$  é responsável por transferir informações (resíduo e/ou solução) de uma determinada malha  $\Omega^h$ , com discretização de malhas de tamanho  $h$  (em todas as direções espaciais), para a malha mais grossa  $\Omega^{2h}$  com  $2h$ . A restrição pode ser por Injeção (Inj), por meia ponderação (HW), por ponderação completa (FW), entre outros (BRIGGS et al., 2000; TROTTEBERG et al., 2001; HORTON; VANDEWALLE, 1995).

O operador de restrição por injeção  $(I_h^{2h})_{Inj}$  apenas transfere a informação de um ponto na malha fina em seu correspondente ponto na malha mais grossa. A Fig. 13(a) e a Fig. 13(b) ilustram este procedimento para os casos unidimensional (1D) e bidimensional (2D), respectivamente.

Por exemplo, no caso 2D, o resíduo calculado pelo operador  $(I_h^{2h})_{Inj}$  na malha



(a) Problema 1D.



(b) Problema 2D.

Figura 13 – Operadores de restrição por injeção 1D e 2D.

grossa, é dado por

$$\begin{aligned} r_{2h}(x, y) &= \left( I_h^{2h} \right)_{Inj} r_h(x, y) \\ &= r_h(x, y). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Em notação estêncil, tem-se

$$\left( I_h^{2h} \right)_{Inj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_h^{2h}. \tag{3.12}$$

O operador de restrição por meia ponderação  $\left( I_h^{2h} \right)_{HW}$ , no caso 2D, utiliza as informações dos 4 pontos mais próximos ao ponto calculado na malha fina para o correspondente ponto na malha mais grossa. A Fig. 14 ilustra esse procedimento.

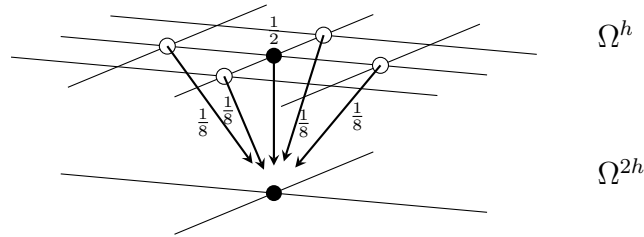


Figura 14 – Operador de restrição por meia ponderação.

O resíduo para o caso 2D, por exemplo, calculado pelo operador  $(I_h^{2h})_{HW}$  na malha grossa é dado por

$$\begin{aligned} r_{2h}(x, y) &= (I_h^{2h})_{HW} r_h(x, y) \\ &= \frac{1}{8} [4r_h(x, y) + r_h(x, y - h) + r_h(x - h, y) + r_h(x + h, y) + r_h(x, y + h)]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

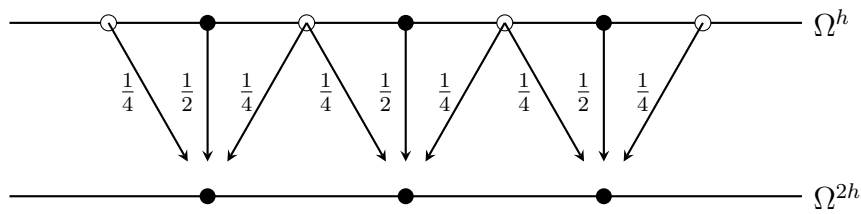
Em notação estêncil, tem-se

$$(I_h^{2h})_{HW} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_h^{2h}. \quad (3.14)$$

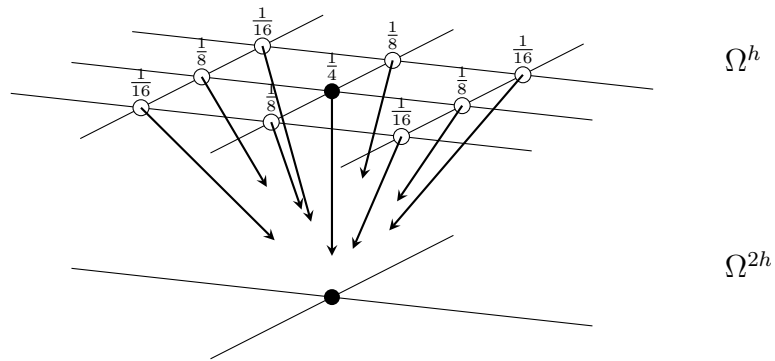
O operador de restrição por ponderação completa  $(I_h^{2h})_{FW}$  utiliza informações de todos os pontos vizinhos ao ponto calculado na malha fina para o correspondente ponto na malha grossa. A Fig. 15(a) e a Fig. 15(b) ilustram este procedimento para os casos unidimensional (1D) e bidimensional (2D), respectivamente.

Por exemplo, o resíduo para o caso 2D calculado pelo operador  $(I_h^{2h})_{FW}$  na malha grossa é dado por

$$\begin{aligned} r_{2h}(x, y) &= (I_h^{2h})_{FW} r_h(x, y) \\ &= \frac{1}{16} \{4r_h(x, y) + 2[r_h(x, y - h) + r_h(x - h, y) + r_h(x + h, y) + r_h(x, y + h)] + \\ &\quad + r_h(x - h, y - h) + r_h(x + h, y - h) + r_h(x - h, y + h) + r_h(x + h, y + h)\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$



(a) Problema 1D.



(b) Problema 2D.

Figura 15 – Operadores de restrição por ponderação completa para os casos 1D e 2D.

Em notação estêncil, tem-se

$$\left(I_h^{2h}\right)_{FW} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_h^{2h}. \quad (3.16)$$

### 3.2.2 Operadores de prolongação

O operador de prolongação (ou interpolação)  $I_{2h}^h$  é responsável por transferir informação (correção) de uma determinada malha grossa  $\Omega^{2h}$ , com discretização de malhas de tamanho  $2h$ , para a malha fina  $\Omega^h$  com malha de tamanho  $h$ . A prolongação pode ser por interpolação linear (para o caso 1D), bilinear (para o caso 2D), entre outras. Para esses operadores serão empregados Hackbusch (1985), Wesseling (1992), Briggs et al. (2000) e Trottenberg et al. (2001).

A interpolação linear da correção pelo operador  $I_{2h}^h$  da malha grossa para a malha fina, no caso 1D (Fig. 16), é dado por

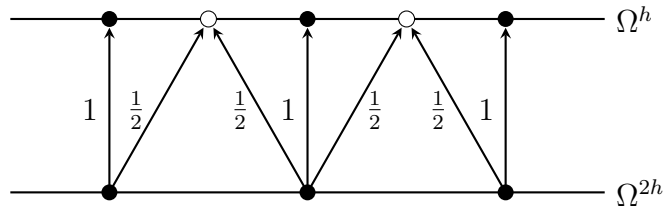


Figura 16 – Operador de interpolação linear para o caso 1D.

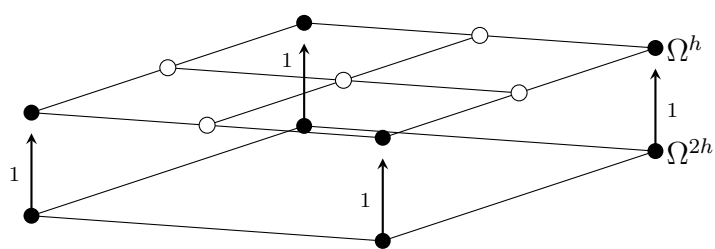
$$\begin{aligned}
 v_h(x) &= I_{2h}^h v_{2h}(x) \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}[v_{2h}(x-h) + v_{2h}(x+h)] & \text{para } \circ \\ v_{2h}(x) & \text{para } \bullet \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Em notação estêncil, tem-se

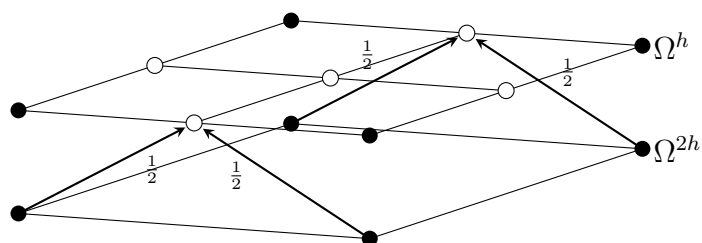
$$I_{2h}^h = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \hline & & \end{bmatrix} \begin{matrix} h \\ 2h \end{matrix} . \tag{3.18}$$

Para o caso 2D, usa-se um operador de interpolação bilinear  $I_{2h}^h$  (Fig. 17). Nesse caso, a interpolação bilinear da correção pelo operador  $I_{2h}^h$  da malha  $\Omega^{2h}$  para a malha  $\Omega^h$  (Fig. 17(a) a 17(d)) é dado por

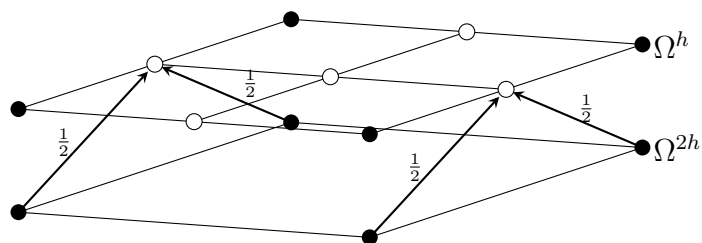
$$\begin{aligned}
 v_h(x, y) &= I_{2h}^h v_{2h}(x, y), \\
 v_h(x, y) &= \begin{cases} v_{2h}(x, y) \\ \frac{1}{2}[v_{2h}(x-h, y) + v_{2h}(x+h, y)] \\ \frac{1}{2}[v_{2h}(x, y-h) + v_{2h}(x, y+h)] \\ \frac{1}{4}[v_{2h}(x-h, y) + v_{2h}(x+h, y) + v_{2h}(x, y-h) + v_{2h}(x, y+h)] \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$



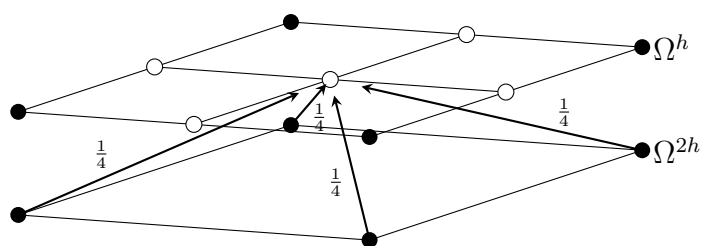
(a) Injeção direta.



(b) Interpolação linear na direção  $x$ .



(c) Interpolação linear na direção  $y$ .



(d) Interpolação bilinear.

Figura 17 – Operador de Interpolação bilinear para o caso 2D.

Em notação estêncil, tem-se

$$I_h^{2h} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} h \\ \\ \end{matrix} \right] \\ \\ \left[ \begin{matrix} \\ \\ 2h \end{matrix} \right] \end{matrix} . \quad (3.20)$$

### 3.3 Esquema de correção e ciclos

Neste trabalho o método *multigrid* foi implementado utilizando o esquema de correção (em inglês, *Correction Scheme*, CS). De acordo com Briggs et al. (2000), o esquema CS é mais indicado para problemas lineares.

A filosofia do esquema CS pode ser representada pelo seguinte procedimento:

- Suavize  $Au = f$  na malha mais fina  $\Omega^h$  para obter uma aproximação  $v^h$ .
- Calcule o resíduo  $r = f - Av^h$ .

Suavize a equação residual  $Ae = r$  em  $\Omega^{2h}$  com estimativa inicial  $e = 0$  para obter uma aproximação para o erro  $e^{2h}$ .

- Corrija a aproximação obtida em  $\Omega^h$  com o erro estimado em  $\Omega^{2h}$ :  $v^h \leftarrow v^h + e^{2h}$ .

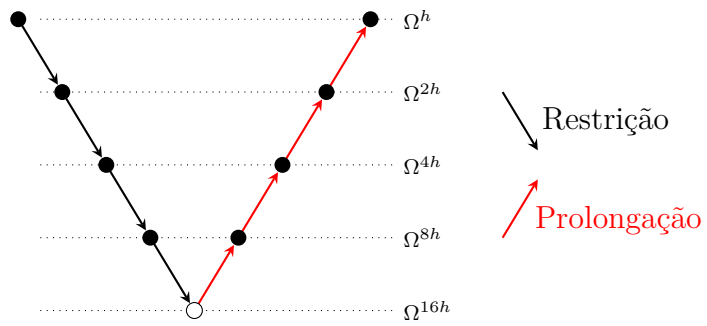
Esse procedimento expõe um esquema CS para o caso de duas malhas, porém a mesma ideia pode ser estendida para o número de malhas que se queira.

A sequência com que as malhas são percorridas dá origem aos chamados ciclos de suavização. Wesseling (1992), Briggs et al. (2000) e Trottenberg et al. (2001) apresentaram a generalização dos ciclos  $V$ ,  $F$  e  $W$  como parte de uma família ciclos chamada de  $\mu$ -ciclo. As Fig. 18(a), Fig. 18(b) e Fig. 18(c) ilustram cada um desses ciclos  $V$ ,  $F$  e  $W$ , respectivamente.

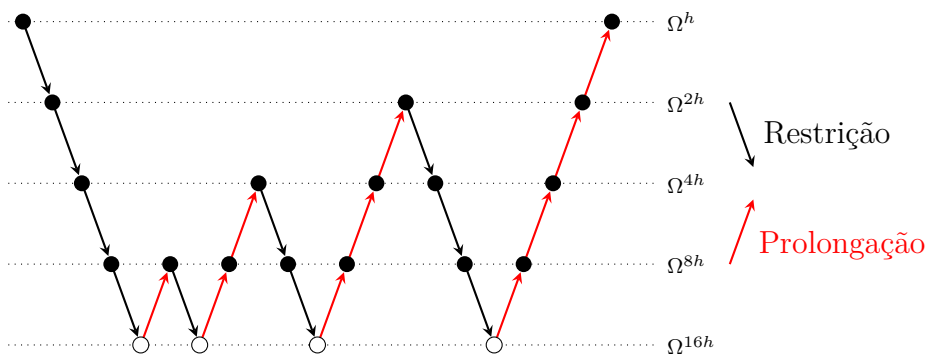
O número de suavizações, ou iterações do suavizador ( $\nu$ ), geralmente depende do suavizador e não precisa ser necessariamente o mesmo em todos os níveis de malha, tanto no processo de restrição quanto na prolongação. Define-se como  $\nu_1$  o número de suavizações realizadas quando ocorre o processo de restrição (pré-suavização) e  $\nu_2$  o número de suavizações realizadas quando ocorre o processo de prolongação (pós-suavização). Briggs et al. (2000) afirmam que para problemas que não apresentam dificuldades de convergência, são empregadas entre 1 e 3 suavizações.

O algoritmo 1 mostra um esquema para o ciclo  $V$  ou o ciclo  $W$ . Se  $\mu = 1$  o algoritmo 1 realiza um ciclo  $V$  e se  $\mu = 2$  realiza um ciclo  $W$ . O algoritmo 2 mostra um esquema para o ciclo  $F$ .

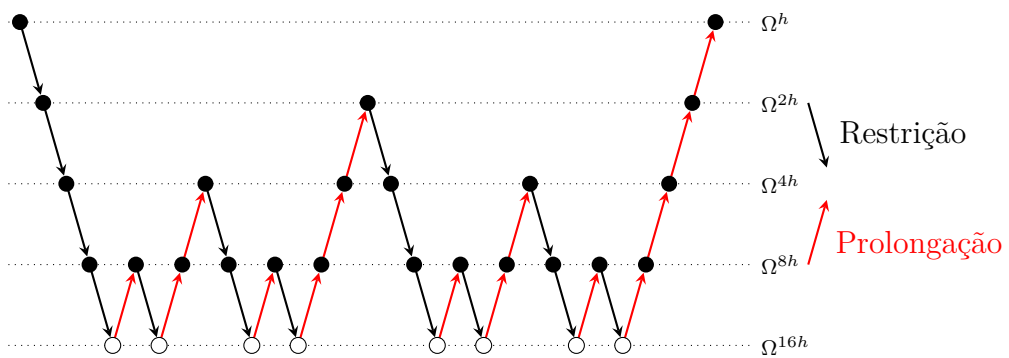




(a) Ciclo  $V$ .



(b) Ciclo  $F$ .



(c) Ciclo  $W$ .

Figura 18 – Estrutura dos ciclos  $V$ ,  $F$  e  $W$ . O símbolo  $(\bullet)$  representa suavização e o símbolo  $(\circ)$  a solução exata.

**Algoritmo 1:** MG- $\mu$ -ciclo ( $l$ )

---

```

if  $l = L_{max}$  é o nível de malha mais grossa then
  Resolva o sistema  $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$  na malha grossa  $\Omega^{2^{l-1}h}$ .
else
  Suavize  $\nu_1$  vezes  $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$  na malha  $\Omega^{2^{l-1}h}$ .
  Calcule e restrinja o resíduo:  $f^{(l+1)} = I_{2^{l-1}h}^{2^l h}(f^{(l)} - A_l v^{(l)})$ .
  for  $ciclo = 1 : \mu$  do
    Resolva no próximo nível: MG- $\mu$ -ciclo ( $l + 1$ ).
  end for
  Corrija usando interpolação:  $v^{(l)} \leftarrow v^{(l)} + I_{2^l h}^{2^{l-1} h} v^{(l+1)}$ .
  Suavize  $\nu_2$  vezes  $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$  na malha  $\Omega^{2^{l-1}h}$ .
end if

```

---

**Algoritmo 2:** MG-Ciclos-F ( $l$ )

---

```

if  $l = L_{max}$  é o nível de malha mais grossa then
  Resolva o sistema  $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$  na malha grossa  $\Omega^{2^{l-1}h}$ .
else
  Suavize  $\nu_1$  vezes  $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$  na malha  $\Omega^{2^{l-1}h}$ .
  Calcule e restrinja o resíduo:  $f^{(l+1)} = I_{2^{l-1}h}^{2^l h}(f^{(l)} - A_l v^{(l)})$ .
  Resolva no próximo nível: MG-Ciclos-F ( $l + 1$ ).
  Corrija usando interpolação:  $v^{(l)} \leftarrow v^{(l)} + I_{2^l h}^{2^{l-1} h} v^{(l+1)}$ .
  Suavize  $\nu_2$  vezes  $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$  na malha  $\Omega^{2^{l-1}h}$ .
  if  $l \neq 1$  then
    Resolva no próximo nível: MG- $\mu$ -ciclo ( $l$ ) usando o algoritmo 1 e  $\mu = 1$ .
  end if
end if

```

---

## 4 Modelos para os problemas da poroelasticidade

Neste capítulo apresentam-se os modelos matemáticos e numéricos para os problemas da poroelasticidade 1D e 2D. Para os modelos numéricos, as aproximações espaciais são feitas através do Método das Diferenças Finitas (MDF) e a aproximação temporal é feita com os métodos de Euler ou Crank-Nicolson (CN).

A teoria da poroelasticidade, na qual estudam-se materiais porosos preenchidos por fluidos, é de grande interesse e essencial em diversas áreas de engenharia. Biot(1941, 1955) descreveu e analisou a teoria mais conhecida sobre poroelasticidade, atualmente conhecida como Teoria de Biot.

Essa teoria descreve o comportamento mecânico de meios porosos saturados com fluidos. O meio poroso natural é composto por uma fase sólida (grãos) e espaços entre esta fase sólida, que podem conter fluidos. Na Fig. 19 é mostrado um exemplo desse meio poroso para o caso 1D com domínio  $[0, \frac{1}{2}]$ . Os modelos da poroelasticidade são especificamente mais usados para o estudo de problemas em geomecânica, hidrogeologia, engenharia do petróleo e biomecânica (MOW; LAI, 1980; EHLERS; BLUHM, 2002).

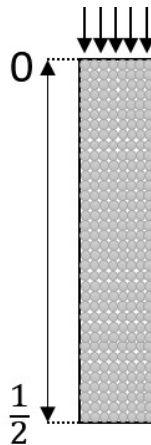


Figura 19 – Modelo do problema da poroelasticidade unidimensional.

### 4.1 Modelos matemáticos

O problema da poroelasticidade pode ser formulado como um sistema acoplado de equações diferenciais parciais dependentes do tempo. Existem formulações de dois, três ou quatro campos do problema de Biot. Aqui, considera-se a formulação de dois campos que inclui a pressão do fluido e os deslocamentos da matriz sólida como incógnitas. Em

problemas mais complexos, pode-se incluir: erosão, sedimentação, entre outros efeitos físicos.

Para essas equação considera-se o problema clássico da consolidação de Biot para um meio poroso saturado, homogêneo, isotrópico e incompressível que seguem os modelos descrito por Gaspar et al.(2003, 2006) e Rodrigo (2010).

Para o caso unidimensional, considerando o domínio espacial  $\Omega = \left(0, \frac{1}{2}\right)$  tem-se

$$\begin{cases} -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{U} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - K \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \mathcal{P} \end{cases}, \quad (4.1)$$

em que  $E$  denota o módulo de Young e  $K$  guarda informações das propriedades físicas relacionadas à porosidade e permeabilidade do meio e é chamada de condutividade hidráulica. O termo  $\mathcal{U}$  representa a densidade da força aplicada no corpo, e  $\mathcal{P}$  a força de injeção ou extração do fluido no meio poroso. A componente de deslocamento na direção espacial  $x$  é dada por  $u(x, t)$  e  $p(x, t)$  denota a pressão. O intervalo de tempo considerado nos cálculos é  $(0, t_f]$ . A primeira equação modela os deslocamentos na direção  $u$  e a segunda equação modela a pressão  $p$ .

As condições de contornos assumem fronteira esquerda sem variação do deslocamento e permeável (drenagem livre); e fronteira direita rígida (deslocamento zero) e sem variação de pressão, ou seja,

$$\begin{cases} E \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \\ p(0, t) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

e

$$\begin{cases} u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0 \\ K \frac{\partial p\left(\frac{1}{2}, t\right)}{\partial x} = 0 \end{cases}. \quad (4.3)$$

Supondo-se a solução analítica dada por

$$u(x, t) = \cos(\pi x) e^{-t} \quad (4.4)$$

e

$$p(x, t) = \sin(\pi x) e^{-t}, \quad (4.5)$$

e que satisfazem às condições de contornos dadas nas Eq. (4.2) e Eq. (4.3), pode-se definir os termos forçantes  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{P}$  como

$$\mathcal{U} = (E\pi + 1)\pi \cos(\pi x) e^{-t} \quad (4.6)$$

e

$$\mathcal{P} = (1 + K\pi) \pi \sin(\pi x) e^{-t}. \quad (4.7)$$

O problema da poroelasticidade bidimensional é dado com  $u(x, y, t)$  e  $v(x, y, t)$  que denotam o deslocamento e  $p(x, y, t)$  que representa a pressão no plano espacial  $(x, y)$ . O modelo matemático, considerando o domínio espacial  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{U} \\ -(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial y} = \mathcal{V} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = \mathcal{P} \end{array} \right. , \quad (4.8)$$

em  $(x, y) \in \Omega$  e  $t \in (0, t_f]$ . As constantes  $\lambda$  e  $\mu$  são coeficientes de Lamé enquanto que  $K$  guarda informações das propriedades físicas relacionadas à porosidade e permeabilidade do meio e é chamada de condutividade hidráulica. As variáveis  $u$  e  $v$  indicam o deslocamento enquanto  $p$  indica a pressão. Os termos  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  representam a densidade da força aplicada no corpo, e  $\mathcal{P}$  a força de injeção ou extração do fluido no meio poroso. Neste sistema de equações, a primeira equação é a equação para o deslocamento  $u$ , a segunda é a equação para o deslocamento  $v$  e a terceira é a equação para a pressão  $p$ .

Neste trabalho supõe-se que, no caso bidimensional,  $\partial\Omega$  (a fronteira de  $\Omega$ ) é rígida (deslocamento zero) e permeável (drenagem livre), tal que tem-se a condição de contorno de Dirichlet,

$$u(x, y, t) = 0, \quad v(x, y, t) = 0, \quad p(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (4.9)$$

Através do método das soluções fabricadas, considerando-se a solução analítica

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) = p(x, y, t) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-t}, \quad (4.10)$$

tem-se as respectivas expressões para  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{U} = (\lambda + 3\mu)\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-t} - (\lambda + \mu)\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) e^{-t} + \pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) e^{-t}, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{V} = (\lambda + 3\mu)\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-t} - (\lambda + \mu)\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) e^{-t} + \pi \sin(\pi x) \cos(\pi y) e^{-t} \quad (4.12)$$

e

$$\mathcal{P} = 2K\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-t} - \pi \sin(\pi(x + y)) e^{-t}. \quad (4.13)$$

## 4.2 Modelos numéricos

Para os modelos numéricos, consideram-se os modelos matemáticos apresentados na seção 4.1. O domínio espacial é discretizado através do MDF considerando uma malha uniforme e com aproximação espacial do tipo CDS. A aproximação temporal e a conexão espacial e temporal é feita usando um método de discretização implícita (seção 2.4), como por exemplo neste caso, os métodos de Euler Implícito e de Crank-Nicolson.

Gaspar et al. (2007) apresentaram uma versão reformulada para o sistema da poroelasticidade. Essa nova versão (usada também por Rodrigo (2010)) consiste no uso adicional de um termo de suavização no lado esquerdo da igualdade da equação da pressão. Esse termo não altera o resultado final e melhora a estabilidade do sistema para a solução numérica. O termo de suavização é dado por

$$-\frac{h^2}{4(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial \Delta p}{\partial t}. \quad (4.14)$$

### 4.2.1 Caso unidimensional

Para o caso unidimensional, considera-se  $E = \lambda + 2\mu$  e a Eq. (4.1) com o termo de suavização dado pela Eq. (4.14) pode ser discretizada nos pontos internos, i.e.,  $i = 2, 3, \dots, N - 1$ , usando os métodos de Euler implícito e o método de Crank-Nicolson.

#### *Método de Euler*

Usando o método de Euler para aproximação temporal, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} -E \frac{u_{i+1}^{m+1} - 2u_i^{m+1} + u_{i-1}^{m+1}}{h^2} + \frac{p_{i+1}^{m+1} - p_{i-1}^{m+1}}{2h} = \mathcal{U}_i^{m+1} \\ \frac{\frac{u_{i+1}^{m+1} - u_{i-1}^{m+1}}{2h} - \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2h}}{\tau} - K \frac{p_{i+1}^{m+1} - 2p_i^{m+1} + p_{i-1}^{m+1}}{h^2} - \\ - \frac{h^2}{4E\tau} \left[ \frac{p_{i+1}^{m+1} - 2p_i^{m+1} + p_{i-1}^{m+1}}{h^2} - \frac{p_{i+1}^m - 2p_i^m + p_{i-1}^m}{h^2} \right] = \mathcal{P}_i^{m+1} \end{array} \right., \quad (4.15)$$

reorganizando os termos, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_i^{m+1} - \frac{E}{h^2} (u_{i+1}^{m+1} + u_{i-1}^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i+1}^{m+1} - p_{i-1}^{m+1}) = \mathcal{U}_i^{m+1} \\ \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_{i-1}^{m+1}}{2\tau h} - \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2\tau h} - \frac{K}{h^2} (p_{i+1}^{m+1} - 2p_i^{m+1} + p_{i-1}^{m+1}) - \\ - \frac{1}{4E\tau} [p_{i+1}^{m+1} - 2p_i^{m+1} + p_{i-1}^{m+1} - (p_{i+1}^m - 2p_i^m + p_{i-1}^m)] = \mathcal{P}_i^{m+1} \end{array} \right. , \quad (4.16)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_i^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_{i-1}^{m+1} + u_{i+1}^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i-1}^{m+1} - p_{i+1}^{m+1}) + \mathcal{U}_i^{m+1} \\ \left( \frac{2K}{h^2} + \frac{1}{2E\tau} \right) p_i^{m+1} + \frac{1}{2\tau h} (u_{i+1}^{m+1} - u_{i-1}^{m+1}) - \left( \frac{K}{h^2} + \frac{1}{4E\tau} \right) (p_{i+1}^{m+1} + p_{i-1}^{m+1}) - \\ - \frac{1}{2\tau h} (u_{i+1}^m - u_{i-1}^m) + \frac{1}{4E\tau} (p_{i+1}^m - 2p_i^m + p_{i-1}^m) = \mathcal{P}_i^{m+1} \end{array} \right. , \quad (4.17)$$

ou ainda

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_i^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_{i-1}^{m+1} + u_{i+1}^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i-1}^{m+1} - p_{i+1}^{m+1}) + \mathcal{U}_i^{m+1} \\ \left( \frac{h^2 + 4E\tau K}{2E\tau h^2} \right) p_i^{m+1} = \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^{m+1} - u_{i+1}^{m+1}) + \left( \frac{h^2 + 4E\tau K}{4E\tau h^2} \right) (p_{i-1}^{m+1} + p_{i+1}^{m+1}) + \\ - \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^m - u_{i+1}^m) - \frac{1}{4E\tau} (p_{i-1}^m - 2p_i^m + p_{i+1}^m) + \mathcal{P}_i^{m+1} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Em  $x = 0$  ( $i = 1$ ), tem-se a condição de contorno  $E \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$ , ou

$$\begin{aligned} E \frac{u_2^{m+1} - u_0^{m+1}}{2h} &= 0 \\ u_0^{m+1} &= u_2^{m+1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

e considerando a equação

$$-E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{U}, \quad (4.20)$$

tem-se

$$-E \frac{u_2^{m+1} - 2u_1^{m+1} + u_0^{m+1}}{h^2} + \frac{p_2^{m+1} - p_0^{m+1}}{2h} = \mathcal{U}_i^{m+1}, \quad (4.21)$$

considerando  $p(0, t) = 0$ ,  $p_1 = 0$  e  $\frac{p_2 + p_0}{2} = p_1 = 0 \implies p_0 = -p_2$ , na Eq. (4.21) e substituindo a Eq. (4.19) na Eq. (4.21), tem-se

$$\begin{aligned} -E \frac{u_2^{m+1} - 2u_1^{m+1} + u_2^{m+1}}{h^2} + \frac{p_2^{m+1} + p_2^{m+1}}{2h} &= \mathcal{U}_1^{m+1}, \\ -E \frac{u_2^{m+1} - 2u_1^{m+1} + u_2^{m+1}}{h^2} + \frac{2p_2^{m+1}}{2h} &= \mathcal{U}_1^{m+1}, \\ \frac{-2E}{h^2} (u_2^{m+1} - u_1^{m+1}) + \frac{1}{h} p_2^{m+1} &= \mathcal{U}_1^{m+1}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

reorganizando os termos na Eq. (4.22), tem-se

$$\frac{2E}{h^2} u_1^{m+1} = \frac{2E}{h^2} u_2^{m+1} - \frac{1}{h} p_2^{m+1} + \mathcal{U}_1^{m+1}. \quad (4.23)$$

Em  $x = \frac{1}{2}$  ( $i = N$ ), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - K \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h^2}{4E} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = \mathcal{P}, \quad (4.24)$$

na forma discretizada é

$$\begin{aligned} \left( \frac{h^2 + 4E\tau K}{2E\tau h^2} \right) p_N^{m+1} &= \frac{1}{2\tau h} (u_{N-1}^{m+1} - u_{N+1}^{m+1}) + \left( \frac{h^2 + 4E\tau K}{4E\tau h^2} \right) (p_{N-1}^{m+1} + p_{N+1}^{m+1}) + \\ &- \frac{1}{2\tau h} (u_{N-1}^m - u_{N+1}^m) - \frac{1}{4E\tau} (p_{N-1}^m - 2p_N^m + p_{N+1}^m) + \mathcal{P}_N^{m+1}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

e considerando a condição de contorno  $u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0$ , tem-se

$$\frac{u_{N+1} + u_{N-1}}{2} = u_N = 0 \implies u_{N+1} = -u_{N-1} \quad (4.26)$$

e com a condição  $K \frac{\partial p(1, t)}{\partial x} = 0$  tem-se

$$\begin{aligned} K \frac{p_{N+1} - p_{N-1}}{2h} &= 0 \\ p_{N+1} &= p_{N-1}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Substituindo as Eqs. (4.26) e (4.27) na Eq. (4.25) tem-se

$$\begin{aligned} \left( \frac{h^2 + 4E\tau K}{2E\tau h^2} \right) p_N^{m+1} &= \frac{1}{\tau h} u_{N-1}^{m+1} + \left( \frac{h^2 + 4E\tau K}{2E\tau h^2} \right) p_{N-1}^{m+1} + \\ &- \frac{1}{\tau h} u_{N-1}^m - \frac{1}{2E\tau} (p_{N-1}^m - p_N^m) + \mathcal{P}_N^{m+1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$



Considerando-se o sistema de Eq. (4.18) descrito usando o método de Euler e as incógnitas  $u_{i-1}^{m+1}$ ,  $p_i^{m+1}$  e  $u_{i+1}^{m+1}$ , para  $i = 3, 4, \dots, N - 2$  tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_{i-1}^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_{i-2}^{m+1} + u_i^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i-2}^{m+1} - p_i^{m+1}) + \mathcal{U}_{i-1}^{m+1} \\ \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_i^{m+1} = \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^{m+1} - u_{i+1}^{m+1}) + \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{4E\tau h^2} \right) \cdot \\ \cdot (p_{i-1}^{m+1} + p_{i+1}^{m+1}) - \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^m - u_{i+1}^m) - \frac{1}{4E\tau} (p_{i-1}^m - 2p_i^m + p_{i+1}^m) + \mathcal{P}_i^{m+1} \\ \frac{2E}{h^2} u_{i+1}^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_i^{m+1} + u_{i+2}^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_i^{m+1} - p_{i+2}^{m+1}) + \mathcal{U}_{i+1}^{m+1} \end{array} \right. , \quad (4.29)$$

reorganizando os termos obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_{i-1}^{m+1} + \frac{1}{2h} p_i^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_{i-2}^{m+1} + u_i^{m+1}) + \frac{1}{2h} p_{i-2}^{m+1} + \mathcal{U}_{i-1}^{m+1} \\ -\frac{1}{2\tau h} u_{i-1}^{m+1} + \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_i^{m+1} + \frac{1}{2\tau h} u_{i+1}^{m+1} = \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{4E\tau h^2} \right) \cdot \\ \cdot (p_{i-1}^{m+1} + p_{i+1}^{m+1}) - \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^m - u_{i+1}^m) - \frac{1}{4E\tau} (p_{i-1}^m - 2p_i^m + p_{i+1}^m) + \mathcal{P}_i^{m+1} \\ -\frac{1}{2h} p_i^{m+1} + \frac{2E}{h^2} u_{i+1}^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_i^{m+1} + u_{i+2}^{m+1}) - \frac{1}{2h} p_{i+2}^{m+1} + \mathcal{U}_{i+1}^{m+1} \end{array} \right. . \quad (4.30)$$

Considerando-se o sistema de Eq. (4.18) descrito usando o método de Euler e as incógnitas  $u_{i-1}^{m+1}$ ,  $p_i^{m+1}$  e  $u_{i+1}^{m+1}$ , para  $i = 3, 4, \dots, N - 2$  tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_{i-1}^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_{i-2}^{m+1} + u_i^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i-2}^{m+1} - p_i^{m+1}) + \mathcal{U}_{i-1}^{m+1} \\ \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_i^{m+1} = \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^{m+1} - u_{i+1}^{m+1}) + \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{4E\tau h^2} \right) \cdot \\ \cdot (p_{i-1}^{m+1} + p_{i+1}^{m+1}) - \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^m - u_{i+1}^m) - \frac{1}{4E\tau} (p_{i-1}^m - 2p_i^m + p_{i+1}^m) + \mathcal{P}_i^{m+1} \\ \frac{2E}{h^2} u_{i+1}^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_i^{m+1} + u_{i+2}^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_i^{m+1} - p_{i+2}^{m+1}) + \mathcal{U}_{i+1}^{m+1} \end{array} \right. , \quad (4.31)$$

reorganizando os termos obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_{i-1}^{m+1} + \frac{1}{2h} p_i^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_{i-2}^{m+1} + u_i^{m+1}) + \frac{1}{2h} p_{i-2}^{m+1} + \mathcal{U}_{i-1}^{m+1} \\ -\frac{1}{2\tau h} u_{i-1}^{m+1} + \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_i^{m+1} + \frac{1}{2\tau h} u_{i+1}^{m+1} = \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{4E\tau h^2} \right) \cdot \\ \cdot (p_{i-1}^{m+1} + p_{i+1}^{m+1}) - \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^m - u_{i+1}^m) - \frac{1}{4E\tau} (p_{i-1}^m - 2p_i^m + p_{i+1}^m) + \mathcal{P}_i^{m+1} \\ -\frac{1}{2h} p_i^{m+1} + \frac{2E}{h^2} u_{i+1}^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_i^{m+1} + u_{i+2}^{m+1}) - \frac{1}{2h} p_{i+2}^{m+1} + \mathcal{U}_{i+1}^{m+1} \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Em forma matricial, para  $i = 3, 4, \dots, N - 2$ , tem-se

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{2E}{h^2} & \frac{1}{2h} & 0 \\ -\frac{1}{2\tau h} & \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} & \frac{1}{2\tau h} \\ 0 & -\frac{1}{2h} & \frac{2E}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-1}^{m+1} \\ p_i^{m+1} \\ u_{i+1}^{m+1} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{E}{h^2} & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2 + 4E\tau k}{4E\tau h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{h^2} & -\frac{1}{2h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-2}^{m+1} + u_i^{m+1} \\ p_{i-2}^{m+1} \\ p_{i-1}^{m+1} + p_{i+1}^{m+1} \\ u_i^{m+1} + u_{i+2}^{m+1} \\ p_{i+2}^{m+1} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\tau h} & -\frac{1}{4E\tau} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-1}^m - u_{i+1}^m \\ p_{i-1}^m - 2p_i^m + p_{i+1}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{i-1}^{m+1} \\ \mathcal{P}_i^{m+1} \\ \mathcal{U}_{i+1}^{m+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Em  $i = 2$ , considerando-se a Eq. (4.23) e as equações da pressão e deslocamento em Eq. (4.32), tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_1^{m+1} + \frac{1}{h} p_2^{m+1} = \frac{2E}{h^2} u_2^{m+1} + \mathcal{U}_1^{m+1} \\ -\frac{1}{2\tau h} u_1^{m+1} + \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_2^{m+1} + \frac{1}{2\tau h} u_3^{m+1} = \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{4E\tau h^2} \right) p_3^{m+1} \\ \quad - \frac{1}{2\tau h} (u_1^m - u_3^m) - \frac{1}{4E\tau} (p_1^m - 2p_2^m + p_3^m) + \mathcal{P}_2^{m+1} \\ -\frac{1}{2h} p_2^{m+1} + \frac{2E}{h^2} u_3^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_2^{m+1} + u_4^{m+1}) - \frac{1}{2h} p_4^{m+1} + \mathcal{U}_3^{m+1} \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Em forma matricial, para  $i = 2$  obtém-se

$$\begin{pmatrix} \frac{2E}{h^2} & \frac{1}{h} & 0 \\ -\frac{1}{2\tau h} & \frac{h^2+4E\tau k}{2E\tau h^2} & \frac{1}{2\tau h} \\ 0 & -\frac{1}{2h} & \frac{2E}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{m+1} \\ p_2^{m+1} \\ u_3^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2E}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2+4E\tau k}{4E\tau h^2} & 0 \\ \frac{E}{h^2} & \frac{E}{h^2} & 0 & -\frac{1}{2h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^{m+1} \\ u_4^{m+1} \\ p_3^{m+1} \\ p_4^{m+1} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\tau h} & -\frac{1}{4E\tau} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^m - u_3^m \\ p_3^m - 2p_2^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1^{m+1} \\ \mathcal{P}_2^{m+1} \\ \mathcal{U}_3^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Em  $i = N - 1$ , considerando-se a condição de contorno  $u_N = 0$  e a Eq. (4.32) tem-se

$$\begin{cases} \frac{2E}{h^2} u_{N-2}^{m+1} + \frac{1}{2h} p_{N-1}^{m+1} = \frac{E}{h^2} (u_{N-3}^{m+1} + u_{N-1}^{m+1}) + \frac{1}{2h} p_{N-3}^{m+1} + \mathcal{U}_{N-2}^{m+1} \\ -\frac{1}{2\tau h} u_{N-2}^{m+1} + \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_{N-1}^{m+1} = \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{4E\tau h^2} \right) (p_{N-2}^{m+1} + p_N^{m+1}) \\ -\frac{1}{2\tau h} u_{N-2}^m - \frac{1}{4E\tau} (p_{N-2}^m - 2p_{N-1}^m + p_N^m) + \mathcal{P}_{N-1}^{m+1} \end{cases}. \quad (4.36)$$

A forma matricial para este caso é

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{h^2} & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2+4E\tau k}{4E\tau h^2} & -\frac{1}{2\tau h} & -\frac{1}{4E\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N-3}^{m+1} + u_{N-1}^{m+1} \\ p_{N-3}^{m+1} \\ p_{N-2}^{m+1} + p_N^{m+1} \\ u_{N-2}^m \\ p_{N-2}^m - 2p_{N-1}^m + p_N^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{N-2}^{m+1} \\ \mathcal{P}_{N-1}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2E}{h^2} & \frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2\tau h} & \frac{h^2+4E\tau k}{2E\tau h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N-2}^{m+1} \\ p_{N-1}^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Em  $i = N$  ( $x = L$ ), considerando-se a condição de contorno  $u_N = 0$ , a equação do deslocamento em Eq. (4.32) e a Eq (4.28), tem-se

$$\begin{cases} \frac{2E}{h^2} u_{N-1}^{m+1} + \frac{1}{2h} p_N^{m+1} = \frac{E}{h^2} u_{N-2}^{m+1} + \frac{1}{2h} p_{N-2}^{m+1} + \mathcal{U}_{N-1}^{m+1} \\ -\frac{1}{\tau h} u_{N-1}^{m+1} + \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_N^{m+1} = \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_{N-1}^{m+1} \\ -\frac{1}{\tau h} u_{N-1}^m - \frac{1}{2E\tau} (p_{N-1}^m - p_N^m) + \mathcal{P}_N^{m+1} \end{cases}. \quad (4.38)$$

Na forma matricial esse sistema pode ser escrito

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{h^2} & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2+4E\tau k}{2E\tau h^2} & -\frac{1}{\tau h} & -\frac{1}{2E\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N-2}^{m+1} \\ p_{N-2}^{m+1} \\ p_{N-1}^{m+1} \\ u_{N-1}^m \\ p_{N-1}^m - p_N^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{N-1}^{m+1} \\ \mathcal{P}_N^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2E}{h^2} & \frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{\tau h} & \frac{h^2+4E\tau k}{2E\tau h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N-1}^{m+1} \\ p_N^{m+1} \end{pmatrix} = \quad (4.39)$$

Portanto, o suavizador Vanka de 3 pontos é formado pelos sistemas descritos nas Eqs. (4.35), (4.33), (4.37) e Eq. (4.39).

Para a malha mais grossa possível, com somente 3 pontos, de acordo com a teoria do método *multigrid*, o sistema deve ser resolvido de forma direta. Considerando-se as condições de contorno  $p_1 = 0$  e  $u_3 = 0$ , têm-se as incógnitas  $u_1, u_2, p_2, p_3$ . A partir das Eq. (4.23), Eq. (4.32) e Eq. (4.28), tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_1^{m+1} = \frac{2E}{h^2} u_2^{m+1} - \frac{1}{h} p_2^{m+1} + \mathcal{U}_1^{m+1} \\ \frac{2E}{h^2} u_2^{m+1} = \frac{E}{h^2} u_1^{m+1} - \frac{1}{2h} p_3^{m+1} + \mathcal{U}_2^{m+1} \\ \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_2^{m+1} = \frac{1}{2\tau h} u_1^{m+1} + \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{4E\tau h^2} \right) p_3^{m+1} + \\ \quad - \frac{1}{2\tau h} u_1^m - \frac{1}{4E\tau} (-2p_2^m + p_3^m) + \mathcal{P}_2^{m+1} \\ \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_3^{m+1} = \frac{1}{\tau h} u_2^{m+1} + \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_2^{m+1} + \\ \quad - \frac{1}{\tau h} u_2^m - \frac{1}{2E\tau} (p_2^m - p_3^m) + \mathcal{P}_3^{m+1} \end{array} \right. , \quad (4.40)$$

ou então

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_1^{m+1} - \frac{2E}{h^2} u_2^{m+1} + \frac{1}{h} p_2^{m+1} = \mathcal{U}_1^{m+1} \\ -\frac{E}{(h)^2} u_1^{m+1} + \frac{2E}{(h)^2} u_2^{m+1} + \frac{1}{2h} p_3^{m+1} = \mathcal{U}_2^{m+1} \\ -\frac{1}{2\tau h} u_1^{m+1} + \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_2^{m+1} - \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{4E\tau h^2} \right) p_3^{m+1} = \\ \quad -\frac{1}{2\tau h} u_1^m - \frac{1}{4E\tau} (p_3^m - 2p_2^m) + \mathcal{P}_2^{m+1} \\ -\frac{1}{\tau h} u_2^{m+1} - \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_2^{m+1} + \left( \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_3^{m+1} = \\ \quad -\frac{1}{\tau h} u_2^m - \frac{1}{2E\tau} (p_2^m - p_3^m) + \mathcal{P}_3^{m+1} \end{array} \right. \quad (4.41)$$

Em forma matricial, pode-se exprimir como

$$\begin{pmatrix} \frac{2E}{h^2} & -\frac{2E}{h^2} & \frac{1}{h} & 0 \\ -\frac{E}{h^2} & \frac{2E}{h^2} & 0 & \frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2\tau h} & 0 & \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} & -\frac{h^2 + 4E\tau k}{4E\tau h^2} \\ 0 & -\frac{1}{\tau h} & -\frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} & \frac{h^2 + 4E\tau k}{2E\tau h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{m+1} \\ u_2^{m+1} \\ p_2^{m+1} \\ p_3^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\tau h} & 0 & \frac{1}{2E\tau} & -\frac{1}{4E\tau} \\ 0 & -\frac{1}{\tau h} & -\frac{1}{2E\tau} & \frac{1}{2E\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^m \\ u_2^m \\ p_2^m \\ p_3^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1^{m+1} \\ \mathcal{U}_2^{m+1} \\ \mathcal{P}_2^{m+1} \\ \mathcal{P}_3^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

#### Método de Crank-Nicolson

Considerando-se o método de CN para efetuar a aproximação temporal, reescreve-se a equação da pressão descrita na Eq. (4.1) e adiciona-se o termo de suavização dado pela Eq. (4.14) da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h^2}{4E} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = K \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mathcal{P}, \quad (4.43)$$

assim, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{u_{i+1}^{m+1} - u_{i-1}^{m+1}}{2h} - \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2h}}{\tau} - \frac{h^2}{4E\tau} \left[ \frac{p_{i+1}^{m+1} - 2p_i^{m+1} + p_{i-1}^{m+1}}{h^2} - \frac{p_{i+1}^m - 2p_i^m + p_{i-1}^m}{h^2} \right] = \\ & = \frac{K}{2} \left( \frac{p_{i+1}^{m+1} - 2p_i^{m+1} + p_{i-1}^{m+1}}{h^2} + \frac{p_{i+1}^m - 2p_i^m + p_{i-1}^m}{h^2} \right) + \frac{\mathcal{P}_i^{m+1} + \mathcal{P}_i^m}{2}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

reorganizando os termos, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1}^{m+1} - u_{i-1}^{m+1}}{2\tau h} - \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2\tau h} - \frac{1}{4E\tau} \left[ p_{i+1}^{m+1} - 2p_i^{m+1} + p_{i-1}^{m+1} - (p_{i+1}^m - 2p_i^m + p_{i-1}^m) \right] = \\ = \frac{K}{2h^2} \left( p_{i+1}^{m+1} - 2p_i^{m+1} + p_{i-1}^{m+1} + p_{i+1}^m - 2p_i^m + p_{i-1}^m \right) + \frac{\mathcal{P}_i^{m+1} + \mathcal{P}_i^m}{2}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

ou

$$\begin{aligned} \left( \frac{K}{h^2} + \frac{1}{2E\tau} \right) p_i^{m+1} = -\frac{1}{2\tau h} \left( u_{i+1}^{m+1} - u_{i-1}^{m+1} \right) + \left( \frac{K}{2h^2} + \frac{1}{4E\tau} \right) \left( p_{i+1}^{m+1} + p_{i-1}^{m+1} \right) + \\ + \frac{1}{2\tau h} \left( u_{i+1}^m - u_{i-1}^m \right) + \left( \frac{K}{2h^2} - \frac{1}{4E\tau} \right) \left( p_{i+1}^m - 2p_i^m + p_{i-1}^m \right) + \frac{\mathcal{P}_i^{m+1} + \mathcal{P}_i^m}{2}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \left( \frac{h^2 + 2E\tau K}{2E\tau h^2} \right) p_i^{m+1} = \frac{1}{2\tau h} \left( u_{i-1}^{m+1} - u_{i+1}^{m+1} \right) + \left( \frac{h^2 + 2E\tau K}{4E\tau h^2} \right) \left( p_{i+1}^{m+1} + p_{i-1}^{m+1} \right) - \\ - \frac{1}{2\tau h} \left( u_{i-1}^m - u_{i+1}^m \right) + \left( \frac{2E\tau K - h^2}{4E\tau h^2} \right) \left( p_{i-1}^m - 2p_i^m + p_{i+1}^m \right) + \frac{\mathcal{P}_i^{m+1} + \mathcal{P}_i^m}{2}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para os contornos, as aproximações são similares às apresentadas para o método de Euler e não serão expostas aqui.

Para o uso do método de CN na aproximação temporal, verificou-se na seção 4.2 que basta substituir a equação referente à pressão nos respectivos sistemas de equações descritos usando o método de Euler. Para a implementação do suavizador Vanka de 3 pontos, consideram-se as equações da pressão no sistema descrito na Eq. (4.18) para o uso do método de Euler e a Eq. (4.47) descrita para o uso do método CN. As respectivas equações são

$$\begin{aligned} \left( \frac{h^2 + 4E\tau K}{2E\tau h^2} \right) p_i^{m+1} = \frac{1}{2\tau h} \left( u_{i-1}^{m+1} - u_{i+1}^{m+1} \right) + \left( \frac{h^2 + 4E\tau K}{4E\tau h^2} \right) \left( p_{i-1}^{m+1} + p_{i+1}^{m+1} \right) + \\ - \frac{1}{2\tau h} \left( u_{i-1}^m - u_{i+1}^m \right) - \frac{1}{4E\tau} \left( p_{i-1}^m - 2p_i^m + p_{i+1}^m \right) + \mathcal{P}_i^{m+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left( \frac{h^2 + 2E\tau k}{2E\tau h^2} \right) p_i^{m+1} = \frac{1}{2\tau h} \left( u_{i-1}^{m+1} - u_{i+1}^{m+1} \right) + \left( \frac{h^2 + 2E\tau k}{4E\tau h^2} \right) \left( p_{i+1}^{m+1} + p_{i-1}^{m+1} \right) - \\ - \frac{1}{2\tau h} \left( u_{i-1}^m - u_{i+1}^m \right) + \left( \frac{2E\tau k - h^2}{4E\tau h^2} \right) \left( p_{i-1}^m - 2p_i^m + p_{i+1}^m \right) + \frac{\mathcal{P}_i^{m+1} + \mathcal{P}_i^m}{2}. \end{aligned}$$

Com estas equações pode-se observar que para transformar as aproximações feitas pelo método de Euler em aproximações com o método de CN, basta fazer a seguinte substituição dos coeficientes

$$\frac{h^2 + 4E\tau K}{2E\tau h^2} \leftarrow \frac{h^2 + 2E\tau k}{2E\tau h^2} \quad (4.48)$$

$$\frac{h^2 + 4E\tau K}{4E\tau h^2} \leftarrow \frac{h^2 + 2E\tau k}{4E\tau h^2} \quad (4.49)$$

$$\frac{1}{4E\tau} \leftarrow \frac{2E\tau k - h^2}{4E\tau h^2} \quad (4.50)$$

$$\mathcal{P}_i^{m+1} \leftarrow \frac{\mathcal{P}_i^{m+1} + \mathcal{P}_i^m}{2} \quad (4.51)$$

A solução direta na malha mais grossa possível (apenas 3 pontos espaciais) com o método de CN é efetuada resolvendo o sistema de Eq. (4.42) e fazendo as mesmas substituições descritas nas Eq. (4.48) – (4.51) em cada um dos pontos  $i = 1, 2, 3$ .

### 4.2.2 Caso bidimensional

Para o caso bidimensional, considera-se a Eq. (4.8) e adiciona-se o termo de suavização dado pela Eq. (4.14) na equação da pressão.

#### *Método de Euler*

Usando o método de Euler implícito para a aproximação temporal, as equações discretizadas no pontos internos,  $i = 2, 3, \dots, N - 1$ , são escritas da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\lambda + 2\mu) \frac{u_{i-1,j}^{m+1} - 2u_{i,j}^{m+1} + u_{i+1,j}^{m+1}}{h^2} - \mu \frac{u_{i,j-1}^{m+1} - 2u_{i,j}^{m+1} + u_{i,j+1}^{m+1}}{h^2} + \\ -(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_{i+1,j}^{m+1} - v_{i-1,j}^{m+1}}{2h} \right) + \frac{p_{i+1,j}^{m+1} - p_{i-1,j}^{m+1}}{2h} = \mathcal{U}_{i,j}^{m+1} \\ \\ -(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_{i+1,j}^{m+1} - u_{i-1,j}^{m+1}}{2h} \right) - \mu \frac{v_{i-1,j}^{m+1} - 2v_{i,j}^{m+1} + v_{i+1,j}^{m+1}}{h^2} - \\ -(\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j-1}^{m+1} - 2v_{i,j}^{m+1} + v_{i,j+1}^{m+1}}{h^2} + \frac{p_{i,j+1}^{m+1} - p_{i,j-1}^{m+1}}{2h} = \mathcal{V}_{i,j}^{m+1} \\ \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_{i+1,j}^{m+1} - u_{i-1,j}^{m+1}}{2h} + \frac{v_{i,j+1}^{m+1} - v_{i,j-1}^{m+1}}{2h} \right) - \\ -K \left( \frac{p_{i-1,j}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1}}{h^2} + \frac{p_{i,j-1}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1}}{h^2} \right) - \\ - \frac{h^2}{4(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p_{i-1,j}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1}}{h^2} + \frac{p_{i,j-1}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1}}{h^2} \right) = \mathcal{P}_{i,j}^{m+1} \end{array} \right. , \quad (4.52)$$



ou

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} u_{i,j}^{m+1} - \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (u_{i-1,j}^{m+1} + u_{i+1,j}^{m+1}) - \frac{\mu}{h^2} (u_{i,j-1}^{m+1} + u_{i,j+1}^{m+1}) - \frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} \\
& \cdot (v_{i+1,j+1}^{m+1} - v_{i+1,j-1}^{m+1} - v_{i-1,j+1}^{m+1} + v_{i-1,j-1}^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i+1,j}^{m+1} - p_{i-1,j}^{m+1}) = \mathcal{U}_{i,j}^{m+1} \\
& - \frac{\lambda + \mu}{4h^2} (u_{i+1,j+1}^{m+1} - u_{i+1,j-1}^{m+1} - u_{i-1,j+1}^{m+1} + u_{i-1,j-1}^{m+1}) + \frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} v_{i,j}^{m+1} - \\
& - \frac{\mu}{h^2} (v_{i-1,j}^{m+1} + v_{i+1,j}^{m+1}) - \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (v_{i,j-1}^{m+1} + v_{i,j+1}^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i,j+1}^{m+1} - p_{i,j-1}^{m+1}) = \mathcal{V}_{i,j}^{m+1}, \quad (4.53) \\
& \frac{1}{2h\tau} [u_{i+1,j}^{m+1} - u_{i-1,j}^{m+1} + v_{i,j+1}^{m+1} - v_{i,j-1}^{m+1} - (u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m + v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m)] - \\
& - K \left( \frac{p_{i-1,j}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1}}{h^2} + \frac{p_{i,j-1}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1}}{h^2} \right) - \\
& - \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} (p_{i-1,j}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} + p_{i,j-1}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1}) + \\
& + \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} (p_{i-1,j}^m - 2p_{i,j}^m + p_{i+1,j}^m + p_{i,j-1}^m - 2p_{i,j}^m + p_{i,j+1}^m) = \mathcal{P}_{i,j}^{m+1}
\end{aligned} \right.$$

ou ainda

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} u_{i,j}^{m+1} = \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (u_{i-1,j}^{m+1} + u_{i+1,j}^{m+1}) + \frac{\mu}{h^2} (u_{i,j-1}^{m+1} + u_{i,j+1}^{m+1}) + \frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} \\
& \cdot (v_{i+1,j+1}^{m+1} - v_{i+1,j-1}^{m+1} - v_{i-1,j+1}^{m+1} + v_{i-1,j-1}^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i-1,j}^{m+1} - p_{i+1,j}^{m+1}) + \mathcal{U}_{i,j}^{m+1} \\
& \frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} v_{i,j}^{m+1} = \frac{\lambda + \mu}{4h^2} (u_{i+1,j+1}^{m+1} - u_{i+1,j-1}^{m+1} - u_{i-1,j+1}^{m+1} + u_{i-1,j-1}^{m+1}) + \\
& + \frac{\mu}{h^2} (v_{i-1,j}^{m+1} + v_{i+1,j}^{m+1}) + \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (v_{i,j-1}^{m+1} + v_{i,j+1}^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i,j-1}^{m+1} - p_{i,j+1}^{m+1}) + \mathcal{V}_{i,j}^{m+1}, \quad (4.54) \\
& \frac{1}{2h\tau} (u_{i+1,j}^{m+1} - u_{i-1,j}^{m+1} + v_{i,j+1}^{m+1} - v_{i,j-1}^{m+1}) + \left( \frac{4k}{h^2} + \frac{1}{(\lambda + 2\mu)\tau} \right) p_{i,j}^{m+1} - \\
& - \left( \frac{K}{h^2} + \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} \right) (p_{i-1,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} + p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1}) - \\
& - \frac{1}{2h\tau} (u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m + v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m) + \\
& + \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} (p_{i-1,j}^m - 2p_{i,j}^m + p_{i+1,j}^m + p_{i,j-1}^m - 2p_{i,j}^m + p_{i,j+1}^m) = \mathcal{P}_{i,j}^{m+1}
\end{aligned} \right.$$

e reorganizando os termos, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} u_{i,j}^{m+1} = \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (u_{i-1,j}^{m+1} + u_{i+1,j}^{m+1}) + \frac{\mu}{h^2} (u_{i,j-1}^{m+1} + u_{i,j+1}^{m+1}) + \frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} \cdot (v_{i+1,j+1}^{m+1} - v_{i+1,j-1}^{m+1} - v_{i-1,j+1}^{m+1} + v_{i-1,j-1}^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i-1,j}^{m+1} - p_{i+1,j}^{m+1}) + \mathcal{U}_{i,j}^{m+1} \\ \\ \frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} v_{i,j}^{m+1} = \frac{\lambda + \mu}{4h^2} (u_{i+1,j+1}^{m+1} - u_{i+1,j-1}^{m+1} - u_{i-1,j+1}^{m+1} + u_{i-1,j-1}^{m+1}) + \frac{\mu}{h^2} (v_{i-1,j}^{m+1} + v_{i+1,j}^{m+1}) + \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (v_{i,j-1}^{m+1} + v_{i,j+1}^{m+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i,j-1}^{m+1} - p_{i,j+1}^{m+1}) + \mathcal{V}_{i,j}^{m+1} \\ \\ \left( \frac{h^2 + 4k(\lambda + 2\mu)\tau}{h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) p_{i,j}^{m+1} = \frac{1}{2h\tau} (u_{i-1,j}^{m+1} - u_{i+1,j}^{m+1} + v_{i,j-1}^{m+1} - v_{i,j+1}^{m+1}) + \left( \frac{h^2 + 4k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) (p_{i-1,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} + p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1}) + \frac{1}{2h\tau} (u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m + v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m) + \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} (4p_{i,j}^m - p_{i-1,j}^m - p_{i+1,j}^m - p_{i,j-1}^m - p_{i,j+1}^m) + \mathcal{P}_{i,j}^{m+1} \end{array} \right. \quad (4.55)$$

Considerando-se o método de Euler e para facilitar a escrita dos sistemas de equações da poroelasticidade no caso 2D descrito nas Eqs. (4.55), são realizadas as seguintes substituições de variáveis

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} \\ c_2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} \\ c_3 &= \frac{\mu}{h^2} \\ c_4 &= \frac{\lambda + \mu}{4h^2} \\ c_5 &= \frac{1}{2h} \\ c_6 &= \frac{h^2 + 4k(\lambda + 2\mu)\tau}{h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \\ c_7 &= \frac{1}{2h\tau} \\ c_8 &= \frac{h^2 + 4k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \\ c_9 &= \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Considerando-se então o sistema de Eqs. (4.55), as substituições de variáveis descritas nas Eqs. (4.56), o suavizador Vanka de 5 pontos (GASPAR et al., 2007; RODRIGO,

2010) e calculando-se simultaneamente os valores dos deslocamentos nas posições  $u_{i-1,j}^{m+1}$ ,  $u_{i+1,j}^{m+1}$ ,  $v_{i,j-1}^{m+1}$ ,  $v_{i,j+1}^{m+1}$  e da pressão na posição  $p_{i,j}^{m+1}$ , têm-se para os pontos internos  $i, j = 3, 4, \dots, N - 2$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 c_1 u_{i-1,j}^{m+1} = c_2 (u_{i-2,j}^{m+1} + u_{i,j}^{m+1}) + c_3 (u_{i-1,j-1}^{m+1} + u_{i-1,j+1}^{m+1}) + c_4 (v_{i,j+1}^{m+1} \\
 \quad - v_{i,j-1}^{m+1} - v_{i-2,j+1}^{m+1} + v_{i-2,j-1}^{m+1}) + c_5 (p_{i-2,j}^{m+1} - p_{i,j}^{m+1}) + \mathcal{U}_{i-1,j}^{m+1} \\
 c_1 u_{i+1,j}^{m+1} = c_2 (u_{i,j}^{m+1} + u_{i+2,j}^{m+1}) + c_3 (u_{i+1,j-1}^{m+1} + u_{i+1,j+1}^{m+1}) + c_4 (v_{i+2,j+1}^{m+1} \\
 \quad - v_{i+2,j-1}^{m+1} - v_{i,j+1}^{m+1} + v_{i,j-1}^{m+1}) + c_5 (p_{i,j}^{m+1} - p_{i+2,j}^{m+1}) + \mathcal{U}_{i+1,j}^{m+1} \\
 c_1 v_{i,j-1}^{m+1} = c_4 (u_{i+1,j}^{m+1} - u_{i+1,j-2}^{m+1} - u_{i-1,j}^{m+1} + u_{i-1,j-2}^{m+1}) + c_3 (v_{i-1,j-1}^{m+1} \\
 \quad + v_{i+1,j-1}^{m+1}) + c_2 (v_{i,j-2}^{m+1} + v_{i,j}^{m+1}) + c_5 (p_{i,j-2}^{m+1} - p_{i,j}^{m+1}) + \mathcal{V}_{i,j-1}^{m+1} \\
 c_1 v_{i,j+1}^{m+1} = c_4 (u_{i+1,j+2}^{m+1} - u_{i+1,j}^{m+1} - u_{i-1,j+2}^{m+1} + u_{i-1,j}^{m+1}) + c_3 (v_{i-1,j+1}^{m+1} \\
 \quad + v_{i+1,j+1}^{m+1}) + c_2 (v_{i,j}^{m+1} + v_{i,j+2}^{m+1}) + c_5 (p_{i,j}^{m+1} - p_{i,j+2}^{m+1}) + \mathcal{V}_{i,j+1}^{m+1} \\
 c_6 p_{i,j}^{m+1} = c_7 (u_{i-1,j}^{m+1} - u_{i+1,j}^{m+1} + v_{i,j-1}^{m+1} - v_{i,j+1}^{m+1}) + c_8 (p_{i-1,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} \\
 \quad + p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1}) + c_7 (u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m + v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m) \\
 \quad + c_9 (4p_{i,j}^m - p_{i-1,j}^m - p_{i+1,j}^m - p_{i,j-1}^m - p_{i,j+1}^m) + \mathcal{P}_{i,j}^{m+1}
 \end{array} \right. \quad (4.57)$$

Colocando-se todas as incógnitas  $u_{i-1,j}^{m+1}$ ,  $u_{i+1,j}^{m+1}$ ,  $v_{i,j-1}^{m+1}$ ,  $v_{i,j+1}^{m+1}$  e  $p_{i,j}^{m+1}$  nos primeiros

membros das equações, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l}
 c_1 u_{i-1,j}^{m+1} + c_4 v_{i,j-1}^{m+1} - c_4 v_{i,j+1}^{m+1} + c_5 p_{i,j}^{m+1} = c_2 (u_{i-2,j}^{m+1} + u_{i,j}^{m+1}) \\
 + c_3 (u_{i-1,j-1}^{m+1} + u_{i-1,j+1}^{m+1}) + c_4 (v_{i-2,j-1}^{m+1} - v_{i-2,j+1}^{m+1}) + c_5 p_{i-2,j}^{m+1} + \mathcal{U}_{i-1,j}^{m+1} \\
 c_1 u_{i+1,j}^{m+1} - c_4 v_{i,j-1}^{m+1} + c_4 v_{i,j+1}^{m+1} - c_5 p_{i,j}^{m+1} = c_2 (u_{i,j}^{m+1} + u_{i+2,j}^{m+1}) \\
 + c_3 (u_{i+1,j-1}^{m+1} + u_{i+1,j+1}^{m+1}) + c_4 (v_{i+2,j+1}^{m+1} - v_{i+2,j-1}^{m+1}) - c_5 p_{i+2,j}^{m+1} + \mathcal{U}_{i+1,j}^{m+1} \\
 c_4 u_{i-1,j}^{m+1} - c_4 u_{i+1,j}^{m+1} + c_1 v_{i,j-1}^{m+1} + c_5 p_{i,j}^{m+1} = c_4 (u_{i-1,j-2}^{m+1} - u_{i+1,j-2}^{m+1}) \\
 + c_3 (v_{i-1,j-1}^{m+1} + v_{i+1,j-1}^{m+1}) + c_2 (v_{i,j-2}^{m+1} + v_{i,j}^{m+1}) + c_5 p_{i,j-2}^{m+1} + \mathcal{V}_{i,j-1}^{m+1} \quad . \quad (4.58) \\
 -c_4 u_{i-1,j}^{m+1} + c_4 u_{i+1,j}^{m+1} + c_1 v_{i,j+1}^{m+1} - c_5 p_{i,j}^{m+1} = c_4 (u_{i+1,j+2}^{m+1} - u_{i-1,j+2}^{m+1}) \\
 + c_3 (v_{i-1,j+1}^{m+1} + v_{i+1,j+1}^{m+1}) + c_2 (v_{i,j}^{m+1} + v_{i,j+2}^{m+1}) - c_5 p_{i,j+2}^{m+1} + \mathcal{V}_{i,j+1}^{m+1} \\
 -c_7 u_{i-1,j}^{m+1} + c_7 u_{i+1,j}^{m+1} - c_7 v_{i,j-1}^{m+1} + c_7 v_{i,j+1}^{m+1} + c_6 p_{i,j}^{m+1} = \\
 c_8 (p_{i-1,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} + p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1}) + c_7 (u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m + v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m) \\
 + c_9 (4p_{i,j}^m - p_{i-1,j}^m - p_{i+1,j}^m - p_{i,j-1}^m - p_{i,j+1}^m) + \mathcal{P}_{i,j}^{m+1}
 \end{array} \right.$$

Em forma matricial, para os pontos internos com  $i, j = 3, 4, \dots, N-2$ , a Eq. (4.58)

pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_4 & -c_4 & c_5 \\ 0 & c_1 & -c_4 & c_4 & -c_5 \\ c_4 & -c_4 & c_1 & 0 & c_5 \\ -c_4 & c_4 & 0 & c_1 & -c_5 \\ -c_7 & c_7 & -c_7 & c_7 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-1,j}^{m+1} \\ u_{i+1,j}^{m+1} \\ v_{i,j-1}^{m+1} \\ v_{i,j+1}^{m+1} \\ p_{i,j}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_3 & c_4 & -c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & c_7 & c_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-2,j}^{m+1} + u_{i,j}^{m+1} \\ u_{i-1,j-1}^{m+1} + u_{i-1,j+1}^{m+1} \\ v_{i-2,j-1}^{m+1} - v_{i-2,j+1}^{m+1} \\ p_{i-2,j}^{m+1} \\ u_{i,j}^{m+1} + u_{i+2,j}^{m+1} \\ u_{i+1,j-1}^{m+1} + u_{i+1,j+1}^{m+1} \\ v_{i+2,j+1}^{m+1} - v_{i+2,j-1}^{m+1} \\ p_{i+2,j}^{m+1} \\ u_{i-1,j-2}^{m+1} - u_{i+1,j-2}^{m+1} \\ v_{i-1,j-1}^{m+1} + v_{i+1,j-1}^{m+1} \\ v_{i,j-2}^{m+1} + v_{i,j}^{m+1} \\ p_{i,j-2}^{m+1} \\ u_{i+1,j+2}^{m+1} - u_{i-1,j+2}^{m+1} \\ v_{i-1,j+1}^{m+1} + v_{i+1,j+1}^{m+1} \\ v_{i,j}^{m+1} + v_{i,j+2}^{m+1} \\ p_{i,j+2}^{m+1} \\ p_{i-1,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} + p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1} \\ u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m + v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m \\ 4p_{i,j}^m - p_{i-1,j}^m - p_{i+1,j}^m - p_{i,j-1}^m - p_{i,j+1}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{i-1,j}^{m+1} \\ \mathcal{U}_{i+1,j}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{i,j-1}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{i,j+1}^{m+1} \\ \mathcal{P}_{i,j}^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Para os contornos, considerando as condições de contorno do tipo Dirichlet, têm-se adicionalmente 8 sistemas de equações diferentes que são calculados nos pontos localizados nas posições Sudoeste, Sul, Sudeste, Oeste, Leste, Noroeste, Norte e Nordeste, como mostra a Fig. 20. Para isso, consideram-se o sistema descrito na Eq. (4.58) e os respectivos valores nulos das incógnitas localizadas nos contornos.

Para as posições Sudoeste, com  $i = j = 2$ , as incógnitas são:  $u_{3,2}^{m+1}$ ,  $v_{2,3}^{m+1}$  e  $p_{2,2}^{m+1}$ .

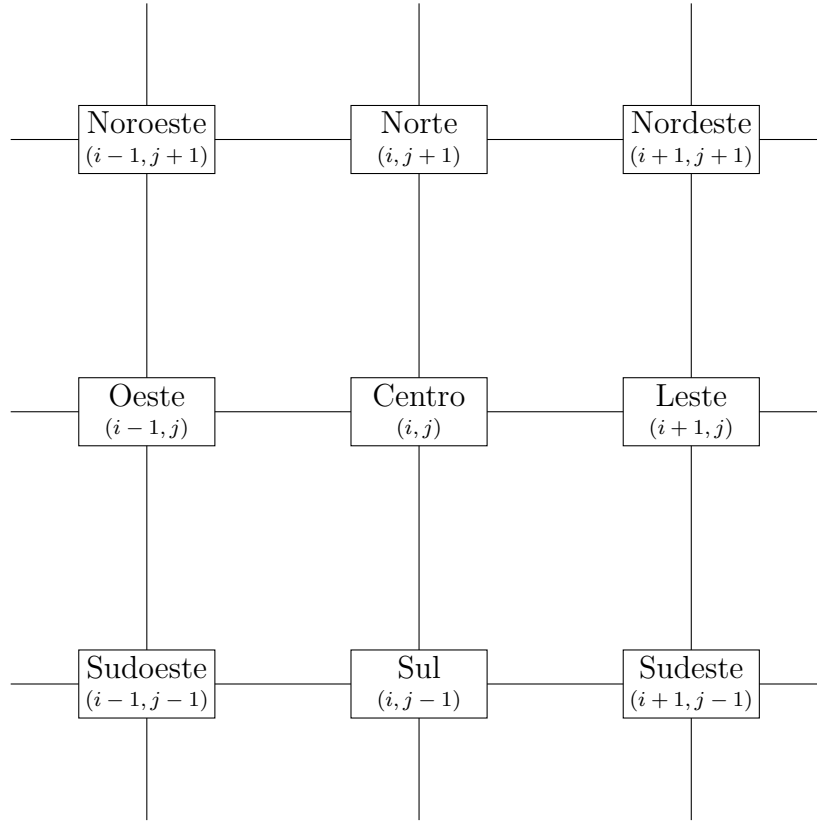


Figura 20 – Posições dos pontos em um sistema de coordenadas cartesianas e em relação a um ponto central.

Assim, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l}
 c_1 u_{3,2}^{m+1} + c_4 v_{2,3}^{m+1} - c_5 p_{2,2}^{m+1} = c_2 (u_{2,2}^{m+1} + u_{4,2}^{m+1}) \\
 \quad + c_3 u_{3,3}^{m+1} + c_4 v_{4,3}^{m+1} - c_5 p_{4,2}^{m+1} + \mathcal{U}_{3,2}^{m+1} \\
 c_4 u_{3,2}^{m+1} + c_1 v_{2,3}^{m+1} - c_5 p_{2,2}^{m+1} = c_4 (u_{3,4}^{m+1}) \\
 \quad + c_3 (v_{3,3}^{m+1}) + c_2 (v_{2,2}^{m+1} + v_{2,4}^{m+1}) - c_5 p_{2,4}^{m+1} + \mathcal{V}_{2,3}^{m+1} \\
 c_7 u_{3,2}^{m+1} + c_7 v_{2,3}^{m+1} + c_6 p_{2,2}^{m+1} = c_8 (p_{3,2}^{m+1} + p_{2,3}^{m+1}) \\
 \quad + c_7 (u_{3,2}^m + v_{2,3}^m) + c_9 (4p_{2,2}^m - p_{3,2}^m - p_{2,3}^m) + \mathcal{P}_{2,2}^{m+1}
 \end{array} \right. \quad (4.60)$$

Em forma matricial a Eq. (4.60) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_4 & -c_5 \\ c_4 & c_1 & -c_5 \\ c_7 & c_7 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{3,2}^{m+1} \\ v_{2,3}^{m+1} \\ p_{2,2}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & -c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & -c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & c_7 & c_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,2}^{m+1} + u_{4,2}^{m+1} \\ u_{3,3}^{m+1} \\ v_{4,3}^{m+1} \\ p_{4,2}^{m+1} \\ u_{3,4}^{m+1} \\ v_{3,3}^{m+1} \\ v_{2,2}^{m+1} + v_{2,4}^{m+1} \\ p_{2,4}^{m+1} \\ p_{3,2}^{m+1} + p_{2,3}^{m+1} \\ u_{3,2}^m + v_{2,3}^m \\ 4p_{2,2}^m - p_{3,2}^m - p_{2,3}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{3,2}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{2,3}^{m+1} \\ \mathcal{P}_{2,2}^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Considerando-se as posições Sul, em que  $j = 2$  e  $i = 3, 4, \dots, N - 2$ , têm-se as incógnitas:  $u_{i-1,2}^{m+1}$ ,  $u_{i+1,2}^{m+1}$ ,  $v_{i,3}^{m+1}$  e  $p_{i,2}^{m+1}$ . Assim, a partir da Eq. (4.58) tem-se para

$i = 3, 4, \dots, N - 2$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 c_1 u_{i-1,2}^{m+1} - c_4 v_{i,3}^{m+1} + c_5 p_{i,2}^{m+1} = c_2 (u_{i-2,2}^{m+1} + u_{i,2}^{m+1}) \\
 \quad + c_3 u_{i-1,3}^{m+1} + c_4 (-v_{i-2,3}^{m+1}) + c_5 p_{i-2,2}^{m+1} + \mathcal{U}_{i-1,2}^{m+1} \\
 c_1 u_{i+1,2}^{m+1} + c_4 v_{i,3}^{m+1} - c_5 p_{i,2}^{m+1} = c_2 (u_{i,2}^{m+1} + u_{i+2,2}^{m+1}) \\
 \quad + c_3 u_{i+1,3}^{m+1} + c_4 v_{i+2,3}^{m+1} - c_5 p_{i+2,2}^{m+1} + \mathcal{U}_{i+1,2}^{m+1} \\
 -c_4 u_{i-1,2}^{m+1} + c_4 u_{i+1,2}^{m+1} + c_1 v_{i,3}^{m+1} - c_5 p_{i,2}^{m+1} = c_4 (u_{i+1,4}^{m+1} - u_{i-1,4}^{m+1}) \\
 \quad + c_3 (v_{i-1,3}^{m+1} + v_{i+1,3}^{m+1}) + c_2 (v_{i,2}^{m+1} + v_{i,4}^{m+1}) - c_5 p_{i,4}^{m+1} + \mathcal{V}_{i,3}^{m+1} \\
 -c_7 u_{i-1,2}^{m+1} + c_7 u_{i+1,2}^{m+1} + c_7 v_{i,3}^{m+1} + c_6 p_{i,2}^{m+1} = \\
 \quad c_8 (p_{i-1,2}^{m+1} + p_{i+1,2}^{m+1} + p_{i,3}^{m+1}) + c_7 (u_{i+1,2}^m - u_{i-1,2}^m + v_{i,3}^m) \\
 \quad + c_9 (4p_{i,2}^m - p_{i-1,2}^m - p_{i+1,2}^m - p_{i,3}^m) + \mathcal{P}_{i,2}^{m+1}
 \end{array} \right. \quad (4.62)$$



Em forma matricial, a Eq. (4.62) ( $i = 3, 4, \dots, N - 2$ ) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_3 & c_4 & -c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & -c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & c_7 & c_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-2,2}^{m+1} + u_{i,2}^{m+1} \\ u_{i-1,3}^{m+1} \\ -v_{i-2,3}^{m+1} \\ p_{i-2,2}^{m+1} \\ u_{i,2}^{m+1} + u_{i+2,2}^{m+1} \\ u_{i+1,3}^{m+1} \\ v_{i+2,3}^{m+1} \\ p_{i+2,2}^{m+1} \\ u_{i+1,4}^{m+1} - u_{i-1,4}^{m+1} \\ v_{i-1,3}^{m+1} + v_{i+1,3}^{m+1} \\ v_{i,2}^{m+1} + v_{i,4}^{m+1} \\ p_{i,4}^{m+1} \\ p_{i-1,2}^{m+1} + p_{i+1,2}^{m+1} + p_{i,3}^{m+1} \\ u_{i+1,2}^m - u_{i-1,2}^m + v_{i,3}^m \\ 4p_{i,2}^m - p_{i-1,2}^m - p_{i+1,2}^m - p_{i,3}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{i-1,2}^{m+1} \\ \mathcal{U}_{i+1,2}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{i,3}^{m+1} \\ \mathcal{P}_{i,2}^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Para o contorno localizado nas posições Sudeste, com  $j = 2$  e  $i = N - 1$ , as incógnitas são:  $u_{N-2,2}^{m+1}$ ,  $v_{N-1,3}^{m+1}$  e  $p_{N-1,2}^{m+1}$ . Assim, pode-se escrever o sistema de equações

como

$$\left\{ \begin{array}{l}
 c_1 u_{N-2,2}^{m+1} - c_4 v_{N-1,3}^{m+1} + c_5 p_{N-1,2}^{m+1} = c_2 (u_{N-3,2}^{m+1} + u_{N-1,2}^{m+1}) \\
 + c_3 u_{N-2,3}^{m+1} + c_4 (-v_{N-3,3}^{m+1}) + c_5 p_{N-3,2}^{m+1} + \mathcal{U}_{N-2,2}^{m+1} \\
 - c_4 u_{N-2,2}^{m+1} + c_1 v_{N-1,3}^{m+1} - c_5 p_{N-1,2}^{m+1} = c_4 (-u_{N-2,4}^{m+1}) \\
 + c_3 v_{N-2,3}^{m+1} + c_2 (v_{N-1,2}^{m+1} + v_{N-1,4}^{m+1}) - c_5 p_{N-1,4}^{m+1} + \mathcal{V}_{N-1,3}^{m+1} \\
 - c_7 u_{N-2,2}^{m+1} + c_7 v_{N-1,3}^{m+1} + c_6 p_{N-1,2}^{m+1} = \\
 c_8 (p_{N-2,2}^{m+1} + p_{N-1,3}^{m+1}) + c_7 (-u_{N-2,2}^m + v_{N-1,3}^m) \\
 + c_9 (4p_{N-1,2}^m - p_{N-2,2}^m - p_{N-1,3}^m) + \mathcal{P}_{N-1,2}^{m+1}
 \end{array} \right. \quad (4.64)$$

Em forma matricial a Eq. (4.64) torna-se

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_4 & c_5 \\ -c_4 & c_1 & -c_5 \\ -c_7 & c_7 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N-2,2}^{m+1} \\ v_{N-1,3}^{m+1} \\ p_{N-1,2}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & -c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & c_7 & c_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N-3,2}^{m+1} + u_{N-1,2}^{m+1} \\ u_{N-2,3}^{m+1} \\ -v_{N-3,3}^{m+1} \\ p_{N-3,2}^{m+1} \\ -u_{N-2,4}^{m+1} \\ v_{N-2,3}^{m+1} \\ v_{N-1,2}^{m+1} + v_{N-1,4}^{m+1} \\ p_{N-1,4}^{m+1} \\ p_{N-2,2}^{m+1} + p_{N-1,3}^{m+1} \\ -u_{N-2,2}^m + v_{N-1,3}^m \\ 4p_{N-1,2}^m - p_{N-2,2}^m - p_{N-1,3}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{N-2,2}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{N-1,3}^{m+1} \\ \mathcal{P}_{N-1,2}^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Nas posições do contorno Oeste, em que  $i = 2$  e  $j = 3, 4, \dots, N - 2$ , têm-se as incógnitas:  $u_{3,j}^{m+1}$ ,  $v_{2,j-1}^{m+1}$ ,  $v_{2,j+1}^{m+1}$  e  $p_{2,j}^{m+1}$ . O respectivo sistema de equações (com  $j =$

$3, 4, \dots, N - 2$ ) é descrito da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{l}
 c_1 u_{3,j}^{m+1} - c_4 v_{2,j-1}^{m+1} + c_4 v_{2,j+1}^{m+1} - c_5 p_{2,j}^{m+1} = c_2 (u_{2,j}^{m+1} + u_{4,j}^{m+1}) \\
 + c_3 (u_{3,j-1}^{m+1} + u_{3,j+1}^{m+1}) + c_4 (v_{4,j+1}^{m+1} - v_{4,j-1}^{m+1}) - c_5 p_{4,j}^{m+1} + \mathcal{U}_{3,j}^{m+1} \\
 - c_4 u_{3,j}^{m+1} + c_1 v_{2,j-1}^{m+1} + c_5 p_{2,j}^{m+1} = c_4 (-u_{3,j-2}^{m+1}) \\
 + c_3 (v_{3,j-1}^{m+1}) + c_2 (v_{2,j-2}^{m+1} + v_{2,j}^{m+1}) + c_5 p_{2,j-2}^{m+1} + \mathcal{V}_{2,j-1}^{m+1} \\
 c_4 u_{3,j}^{m+1} + c_1 v_{2,j+1}^{m+1} - c_5 p_{2,j}^{m+1} = c_4 (u_{3,j+2}^{m+1}) \\
 + c_3 v_{3,j+1}^{m+1} + c_2 (v_{2,j}^{m+1} + v_{2,j+2}^{m+1}) - c_5 p_{2,j+2}^{m+1} + \mathcal{V}_{2,j+1}^{m+1} \\
 c_7 u_{3,j}^{m+1} - c_7 v_{2,j-1}^{m+1} + c_7 v_{2,j+1}^{m+1} + c_6 p_{2,j}^{m+1} = \\
 c_8 (p_{3,j}^{m+1} + p_{2,j-1}^{m+1} + p_{2,j+1}^{m+1}) + c_7 (u_{3,j}^m + v_{2,j+1}^m - v_{2,j-1}^m) \\
 + c_9 (4p_{2,j}^m - p_{3,j}^m - p_{2,j-1}^m - p_{2,j+1}^m) + \mathcal{P}_{2,j}^{m+1}
 \end{array} \right. \quad (4.66)$$

Em forma matricial, a Eq. (4.66) com  $j = 3, 4, \dots, N - 2$  é escrita da seguinte

maneira

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_4 & c_4 & -c_5 \\ -c_4 & c_1 & 0 & c_5 \\ c_4 & 0 & c_1 & -c_5 \\ c_7 & -c_7 & c_7 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{3,j}^{m+1} \\ v_{2,j-1}^{m+1} \\ v_{2,j+1}^{m+1} \\ p_{2,j}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & -c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & -c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & c_7 & c_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,j}^{m+1} + u_{4,j}^{m+1} \\ u_{3,j-1}^{m+1} + u_{3,j+1}^{m+1} \\ v_{4,j+1}^{m+1} - v_{4,j-1}^{m+1} \\ p_{4,j}^{m+1} \\ -u_{3,j-2}^{m+1} \\ v_{3,j-1}^{m+1} \\ v_{2,j-2}^{m+1} + v_{2,j}^{m+1} \\ p_{2,j-2}^{m+1} \\ u_{3,j+2}^{m+1} \\ v_{3,j+1}^{m+1} \\ v_{2,j}^{m+1} + v_{2,j+2}^{m+1} \\ p_{2,j+2}^{m+1} \\ p_{3,j}^{m+1} + p_{2,j-1}^{m+1} + p_{2,j+1}^{m+1} \\ u_{3,j}^m + v_{2,j+1}^m - v_{2,j-1}^m \\ 4p_{2,j}^m - p_{3,j}^m - p_{2,j-1}^m - p_{2,j+1}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{3,j}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{2,j-1}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{2,j+1}^{m+1} \\ \mathcal{P}_{2,j}^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.67)$$

Nas posições do contorno Leste, em que  $i = N - 1$  e  $j = 3, 4, \dots, N - 2$ , têm-se as incógnitas:  $u_{N-2,j}^{m+1}$ ,  $v_{N-1,j-1}^{m+1}$ ,  $v_{N-1,j+1}^{m+1}$  e  $p_{N-1,j}^{m+1}$ . O respectivo sistema de equações (com

$j = 3, 4, \dots, N - 2$ ) é descrito da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{l}
 c_1 u_{N-1,j}^{m+1} + c_4 v_{N-1,j-1}^{m+1} - c_4 v_{N-1,j+1}^{m+1} + c_5 p_{N-1,j}^{m+1} = c_2 \left( u_{N-3,j}^{m+1} + u_{N-1,j}^{m+1} \right) \\
 + c_3 \left( u_{N-2,j-1}^{m+1} + u_{N-2,j+1}^{m+1} \right) + c_4 \left( v_{N-3,j-1}^{m+1} - v_{N-3,j+1}^{m+1} \right) + c_5 p_{N-3,j}^{m+1} + \mathcal{U}_{N-2,j}^{m+1} \\
 \\
 c_4 u_{N-2,j}^{m+1} + c_1 v_{N-1,j-1}^{m+1} + c_5 p_{N-1,j}^{m+1} = c_4 \left( u_{N-2,j-2}^{m+1} \right) \\
 + c_3 \left( v_{N-2,j-1}^{m+1} \right) + c_2 \left( v_{N-1,j-2}^{m+1} + v_{N-1,j}^{m+1} \right) + c_5 p_{N-1,j-2}^{m+1} + \mathcal{V}_{N-1,j-1}^{m+1} \\
 \\
 -c_4 u_{N-2,j}^{m+1} + c_1 v_{N-1,j+1}^{m+1} - c_5 p_{N-1,j}^{m+1} = c_4 \left( -u_{N-2,j+2}^{m+1} \right) \\
 + c_3 \left( v_{N-2,j+1}^{m+1} \right) + c_2 \left( v_{N-1,j}^{m+1} + v_{N-1,j+2}^{m+1} \right) - c_5 p_{N-1,j+2}^{m+1} + \mathcal{V}_{N-1,j+1}^{m+1} \\
 \\
 -c_7 u_{N-2,j}^{m+1} - c_7 v_{N-1,j-1}^{m+1} + c_7 v_{N-1,j+1}^{m+1} + c_6 p_{N-1,j}^{m+1} = \\
 c_8 \left( p_{N-2,j}^{m+1} + p_{N-1,j-1}^{m+1} + p_{N-1,j+1}^{m+1} \right) + c_7 \left( -u_{N-2,j}^m + v_{N-1,j+1}^m - v_{N-1,j-1}^m \right) \\
 + c_9 \left( 4p_{N-1,j}^m - p_{N-2,j}^m - p_{N-1,j-1}^m - p_{N-1,j+1}^m \right) + \mathcal{P}_{N-1,j}^{m+1}
 \end{array} \right. \quad (4.68)$$

Em forma matricial a Eq. (4.68) com  $j = 3, 4, \dots, N - 2$  é descrita como

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_4 & -c_4 & c_5 \\ c_4 & c_1 & 0 & c_5 \\ -c_4 & 0 & c_1 & -c_5 \\ -c_7 & -c_7 & c_7 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-1,j}^{m+1} \\ v_{i,j-1}^{m+1} \\ v_{i,j+1}^{m+1} \\ p_{i,j}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & -c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & c_7 & c_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N-3,j}^{m+1} + u_{N-1,j}^{m+1} \\ u_{N-2,j-1}^{m+1} + u_{N-2,j+1}^{m+1} \\ v_{N-3,j-1}^{m+1} - v_{N-3,j+1}^{m+1} \\ p_{N-3,j}^{m+1} \\ u_{N-2,j-2}^{m+1} \\ v_{N-2,j-1}^{m+1} \\ v_{N-1,j-2}^{m+1} + v_{N-1,j}^{m+1} \\ p_{N-1,j-2}^{m+1} \\ -u_{N-2,j+2}^{m+1} \\ v_{N-2,j+1}^{m+1} \\ v_{N-1,j}^{m+1} + v_{N-1,j+2}^{m+1} \\ p_{N-1,j+2}^{m+1} \\ p_{N-2,j}^{m+1} + p_{N-1,j-1}^{m+1} + p_{N-1,j+1}^{m+1} \\ -u_{N-2,j}^m + v_{N-1,j+1}^m - v_{N-1,j-1}^m \\ 4p_{N-1,j}^m - p_{N-2,j}^m - p_{N-1,j-1}^m - p_{N-1,j+1}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{N-2,j}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{N-1,j-1}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{N-1,j+1}^{m+1} \\ \mathcal{P}_{N-1,j}^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

Considerando-se o ponto localizado nos contornos Noroeste, ou seja,  $i = 2$  e  $j = N - 1$ , as incógnitas são:  $u_{3,N-1}^{m+1}$ ,  $v_{2,N-1}^{m+1}$  e  $p_{2,N-1}^{m+1}$ . Nestas posições, o sistema de

equações fica

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 u_{3,N-1}^{m+1} - c_4 v_{2,N-2}^{m+1} - c_5 p_{2,N-1}^{m+1} = c_2 (u_{2,N-1}^{m+1} + u_{4,N-1}^{m+1}) \\ \quad + c_3 (u_{3,N-2}^{m+1}) + c_4 (-v_{4,N-2}^{m+1}) - c_5 p_{4,N-1}^{m+1} + \mathcal{U}_{3,N-1}^{m+1} \\ -c_4 u_{3,N-1}^{m+1} + c_1 v_{2,N-2}^{m+1} + c_5 p_{2,N-1}^{m+1} = c_4 (-u_{3,N-3}^{m+1}) \\ \quad + c_3 (v_{3,N-2}^{m+1}) + c_2 (v_{2,N-3}^{m+1} + v_{2,N-1}^{m+1}) + c_5 p_{2,N-3}^{m+1} + \mathcal{V}_{2,N-2}^{m+1} \\ c_7 u_{3,N-1}^{m+1} - c_7 v_{2,N-2}^{m+1} + c_6 p_{2,N-1}^{m+1} = c_8 (p_{3,N-1}^{m+1} + p_{2,N-2}^{m+1}) \\ \quad + c_7 (u_{3,N-1}^m - v_{2,N-2}^m) + c_9 (4p_{2,N-1}^m - p_{3,N-1}^m - p_{2,N-2}^m) + \mathcal{P}_{2,N-1}^{m+1} \end{array} \right. \quad (4.70)$$

Em forma matricial, a Eq. (4.70) torna-se

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_4 & -c_5 \\ -c_4 & c_1 & c_5 \\ c_7 & -c_7 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1,j}^{m+1} \\ v_{i,j-1}^{m+1} \\ p_{i,j}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & -c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & c_7 & c_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,N-1}^{m+1} + u_{4,N-1}^{m+1} \\ u_{3,N-2}^{m+1} \\ -v_{4,N-2}^{m+1} \\ p_{4,N-1}^{m+1} \\ -u_{3,N-3}^{m+1} \\ v_{3,N-2}^{m+1} \\ v_{2,N-3}^{m+1} + v_{2,N-1}^{m+1} \\ p_{2,N-3}^{m+1} \\ p_{3,N-1}^{m+1} + p_{2,N-2}^{m+1} \\ u_{3,N-1}^m - v_{2,N-2}^m \\ 4p_{2,N-1}^m - p_{3,N-1}^m - p_{2,N-2}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{3,N-1}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{2,N-2}^{m+1} \\ \mathcal{P}_{2,N-1}^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Nos pontos localizados nas posições Norte, em que  $i = 3, 4, \dots, N-2$  e  $j = N-1$  as incógnitas são:  $u_{i-1,N-1}^{m+1}$ ,  $u_{i+1,N-1}^{m+1}$ ,  $v_{i,N-2}^{m+1}$  e  $p_{i,N-1}^{m+1}$ . Nesses pontos, para  $i = 3, 4, \dots, N-2$

o sistema pode ser escrito como

$$\left\{ \begin{array}{l}
 c_1 u_{i-1,N-1}^{m+1} + c_4 v_{i,N-2}^{m+1} + c_5 p_{i,N-1}^{m+1} = c_2 \left( u_{i-2,N-1}^{m+1} + u_{i,N-1}^{m+1} \right) \\
 \quad + c_3 \left( u_{i-1,N-2}^{m+1} \right) + c_4 \left( v_{i-2,N-2}^{m+1} \right) + c_5 p_{i-2,N-1}^{m+1} + \mathcal{U}_{i-1,N-1}^{m+1} \\
 c_1 u_{i+1,N-1}^{m+1} - c_4 v_{i,N-2}^{m+1} - c_5 p_{i,N-1}^{m+1} = c_2 \left( u_{i,N-1}^{m+1} + u_{i+2,N-1}^{m+1} \right) \\
 \quad + c_3 \left( u_{i+1,N-2}^{m+1} \right) + c_4 \left( -v_{i+2,N-2}^{m+1} \right) - c_5 p_{i+2,N-1}^{m+1} + \mathcal{U}_{i+1,N-1}^{m+1} \\
 c_4 u_{i-1,N-1}^{m+1} - c_4 u_{i+1,N-1}^{m+1} + c_1 v_{i,N-2}^{m+1} + c_5 p_{i,N-1}^{m+1} = c_4 \left( u_{i-1,N-3}^{m+1} - u_{i+1,N-3}^{m+1} \right) \\
 \quad + c_3 \left( v_{i-1,N-2}^{m+1} + v_{i+1,N-2}^{m+1} \right) + c_2 \left( v_{i,N-3}^{m+1} + v_{i,N-1}^{m+1} \right) + c_5 p_{i,N-3}^{m+1} + \mathcal{V}_{i,N-2}^{m+1} \\
 -c_7 u_{i-1,N-1}^{m+1} + c_7 u_{i+1,N-1}^{m+1} - c_7 v_{i,N-2}^{m+1} + c_6 p_{i,N-1}^{m+1} = \\
 c_8 \left( p_{i-1,N-1}^{m+1} + p_{i+1,N-1}^{m+1} + p_{i,N-2}^{m+1} \right) + c_7 \left( u_{i+1,N-1}^m - u_{i-1,N-1}^m - v_{i,N-2}^m \right) \\
 \quad + c_9 \left( 4p_{i,N-1}^m - p_{i-1,N-1}^m - p_{i+1,N-1}^m - p_{i,N-2}^m \right) + \mathcal{P}_{i,N-1}^{m+1}
 \end{array} \right. \cdot \quad (4.72)$$



Em forma matricial, a Eq. (4.72) pode ser escrita em  $i = 3, 4, \dots, N - 2$  como

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_4 & c_5 \\ 0 & c_1 & -c_4 & -c_5 \\ c_4 & -c_4 & c_1 & c_5 \\ -c_7 & c_7 & -c_7 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-1,N-1}^{m+1} \\ u_{i+1,N-1}^{m+1} \\ v_{i,N-2}^{m+1} \\ p_{i,N-1}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_3 & c_4 & -c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & c_7 & c_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-2,N-1}^{m+1} + u_{i,N-1}^{m+1} \\ u_{i-1,N-2}^{m+1} \\ v_{i-2,N-2}^{m+1} \\ p_{i-2,N-1}^{m+1} \\ u_{i,N-1}^{m+1} + u_{i+2,N-1}^{m+1} \\ u_{i+1,N-2}^{m+1} \\ -v_{i+2,N-2}^{m+1} \\ p_{i+2,N-1}^{m+1} \\ u_{i-1,N-3}^{m+1} - u_{i+1,N-3}^{m+1} \\ v_{i-1,N-2}^{m+1} + v_{i+1,N-2}^{m+1} \\ v_{i,N-3}^{m+1} + v_{i,N-1}^{m+1} \\ p_{i,N-3}^{m+1} \\ p_{i-1,N-1}^{m+1} + p_{i+1,N-1}^{m+1} + p_{i,N-2}^{m+1} \\ u_{i+1,N-1}^m - u_{i-1,N-1}^m - v_{i,N-2}^m \\ 4p_{i,N-1}^m - p_{i-1,N-1}^m - p_{i+1,N-1}^m - p_{i,N-2}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{i-1,N-1}^{m+1} \\ \mathcal{U}_{i+1,N-1}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{i,N-2}^{m+1} \\ \mathcal{P}_{i,N-1}^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

Para o último contorno a ser calculado, nas posições Nordeste, com  $i = N - 1$  e  $j = N - 1$  têm-se as incógnitas:  $u_{N-2,N-1}^{m+1}$ ,  $v_{N-1,N-2}^{m+1}$  e  $p_{N-1,N-1}^{m+1}$ . Nesses pontos, o sistema

assume a forma

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 u_{N-2,N-1}^{m+1} + c_4 v_{N-1,N-2}^{m+1} + c_5 p_{N-1,N-1}^{m+1} = c_2 \left( u_{N-3,N-1}^{m+1} + u_{N-1,N-1}^{m+1} \right) \\ \quad + c_3 \left( u_{N-2,N-2}^{m+1} \right) + c_4 \left( v_{N-3,N-2}^{m+1} \right) + c_5 p_{N-3,N-1}^{m+1} + \mathcal{U}_{N-2,N-1}^{m+1} \\ c_4 u_{N-2,N-1}^{m+1} + c_1 v_{N-1,N-2}^{m+1} + c_5 p_{N-1,N-1}^{m+1} = c_4 u_{N-2,N-3}^{m+1} + c_3 v_{N-2,N-2}^{m+1} \\ \quad + c_2 \left( v_{N-1,N-3}^{m+1} + v_{N-1,N-1}^{m+1} \right) + c_5 p_{N-1,N-3}^{m+1} + \mathcal{V}_{N-1,N-2}^{m+1} \\ -c_7 u_{N-2,N-1}^{m+1} - c_7 v_{N-1,N-2}^{m+1} + c_6 p_{N-1,N-1}^{m+1} = c_8 \left( p_{N-2,N-1}^{m+1} + p_{N-1,N-2}^{m+1} \right) \\ \quad + c_7 \left( -u_{N-2,N-1}^m - v_{N-1,N-2}^m \right) + c_9 \left( 4p_{N-1,N-1}^m - p_{N-2,N-1}^m - p_{N-1,N-2}^m \right) + \mathcal{P}_{N-1,N-1}^{m+1} \end{array} \right. \quad . \quad (4.74)$$

A descrição matricial do sistema dado na Eq. (4.74) é

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_4 & c_5 \\ c_4 & c_1 & c_5 \\ -c_7 & -c_7 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N-2,N-1}^{m+1} \\ v_{N-1,N-2}^{m+1} \\ p_{N-1,N-1}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & c_7 & c_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N-3,N-1}^{m+1} + u_{N-1,N-1}^{m+1} \\ u_{N-2,N-2}^{m+1} \\ v_{N-3,N-2}^{m+1} \\ p_{N-3,N-1}^{m+1} \\ u_{N-2,N-3}^{m+1} \\ v_{N-2,N-2}^{m+1} \\ v_{N-1,N-3}^{m+1} + v_{N-1,N-1}^{m+1} \\ p_{N-1,N-3}^{m+1} \\ p_{N-2,N-1}^{m+1} + p_{N-1,N-2}^{m+1} \\ -u_{N-2,N-1}^m - v_{N-1,N-2}^m \\ 4p_{N-1,N-1}^m - p_{N-2,N-1}^m - p_{N-1,N-2}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{N-2,N-1}^{m+1} \\ \mathcal{V}_{N-1,N-2}^{m+1} \\ \mathcal{P}_{N-1,N-1}^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

A solução direta na malha mais grossa possível, com apenas 3 pontos espaciais em cada direção (sendo que 2 destes pontos são contornos nulos) usando a aproximação temporal com o método de Euler, é efetuada resolvendo o sistema de Eq. (4.55) no ponto  $i = j = 2$ .

*Método de Crank-Nicolson*

Considerando-se o método de CN para efetuar a aproximação temporal, reescreve-se a equação da pressão descrita na Eq. (4.8) e adiciona-se o termo de suavização dado pela Eq. (4.14) da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - \frac{h^2}{4(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = \mathcal{P},$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{h^2}{4(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \right] = K \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \mathcal{P},$$

com a discretização das variáveis espaciais pode-se escrever

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{u_{i+1,j}^{m+1} - u_{i-1,j}^{m+1}}{2h} + \frac{v_{i,j+1}^{m+1} - v_{i,j-1}^{m+1}}{2h} - \right. \\ & \left. - \frac{h^2}{4(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{p_{i-1,j}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1}}{h^2} + \frac{p_{i,j-1}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1}}{h^2} \right) \right] = \\ & = \frac{K}{2} \left( \frac{p_{i-1,j}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1}}{h^2} + \frac{p_{i,j-1}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1}}{h^2} + \frac{p_{i-1,j}^m - 2p_{i,j}^m + p_{i+1,j}^m}{h^2} + \right. \\ & \left. + \frac{p_{i,j-1}^m - 2p_{i,j}^m + p_{i,j+1}^m}{h^2} \right) + \frac{\mathcal{P}_{i,j}^{m+1} + \mathcal{P}_{i,j}^m}{2}, \end{aligned}$$

e com a aproximação temporal, fica

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h\tau} \left[ u_{i+1,j}^{m+1} - u_{i-1,j}^{m+1} + v_{i,j+1}^{m+1} - v_{i,j-1}^{m+1} - \left( u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m + v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m \right) \right] \\ & - \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} \left( p_{i-1,j}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} + p_{i,j-1}^{m+1} - 2p_{i,j}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1} \right) \\ & + \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} \left( p_{i-1,j}^m - 2p_{i,j}^m + p_{i+1,j}^m + p_{i,j-1}^m - 2p_{i,j}^m + p_{i,j+1}^m \right) = \\ & \frac{K}{2} \left( \frac{p_{i-1,j}^{m+1} - 4p_{i,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} + p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1}}{h^2} + \frac{p_{i-1,j}^m - 4p_{i,j}^m + p_{i+1,j}^m + p_{i,j-1}^m + p_{i,j+1}^m}{h^2} \right) + \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{\mathcal{P}_{i,j}^{m+1} + \mathcal{P}_{i,j}^m}{2}, \end{aligned}$$

reorganizando os termos, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h\tau} \left( u_{i+1,j}^{m+1} - u_{i-1,j}^{m+1} + v_{i,j+1}^{m+1} - v_{i,j-1}^{m+1} \right) + \left( \frac{2k}{h^2} + \frac{1}{(\lambda + 2\mu)\tau} \right) p_{i,j}^{m+1} \\ & - \left( \frac{K}{2h^2} + \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} \right) \left( p_{i-1,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} + p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{2h\tau} \left( u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m + v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m \right) \\ & + \left( \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} - \frac{K}{2h^2} \right) \left( p_{i-1,j}^m - 4p_{i,j}^m + p_{i+1,j}^m + p_{i,j-1}^m + p_{i,j+1}^m \right) = \frac{\mathcal{P}_{i,j}^{m+1} + \mathcal{P}_{i,j}^m}{2}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \left( \frac{h^2 + 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) p_{i,j}^{m+1} &= \frac{1}{2h\tau} \left( u_{i-1,j}^{m+1} - u_{i+1,j}^{m+1} + v_{i,j-1}^{m+1} - v_{i,j+1}^{m+1} \right) + \\ \left( \frac{h^2 + 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) \left( p_{i-1,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} + p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1} \right) &+ \frac{1}{2h\tau} \left( u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m + v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m \right) \\ + \left( \frac{h^2 - 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) \left( 4p_{i,j}^m - p_{i-1,j}^m - p_{i+1,j}^m - p_{i,j-1}^m - p_{i,j+1}^m \right) &+ \frac{\mathcal{P}_{i,j}^{m+1} + \mathcal{P}_{i,j}^m}{2}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Para o uso do método de CN na aproximação temporal, assim como para o caso unidimensional, basta substituir a equação referente à pressão no sistemas de Eq. (4.55) pela Eq. (4.76). Ou seja, substituir a equação

$$\begin{aligned} \left( \frac{h^2 + 4k(\lambda + 2\mu)\tau}{h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) p_{i,j}^{m+1} &= \frac{1}{2h\tau} \left( u_{i-1,j}^{m+1} - u_{i+1,j}^{m+1} + v_{i,j-1}^{m+1} - v_{i,j+1}^{m+1} \right) + \\ + \left( \frac{h^2 + 4k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) \left( p_{i-1,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} + p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1} \right) &+ \\ + \frac{1}{2h\tau} \left( u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m + v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m \right) &+ \\ + \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} \left( 4p_{i,j}^m - p_{i-1,j}^m - p_{i+1,j}^m - p_{i,j-1}^m - p_{i,j+1}^m \right) &+ \mathcal{P}_{i,j}^{m+1} \end{aligned}$$

pela equação

$$\begin{aligned} \left( \frac{h^2 + 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) p_{i,j}^{m+1} &= \frac{1}{2h\tau} \left( u_{i-1,j}^{m+1} - u_{i+1,j}^{m+1} + v_{i,j-1}^{m+1} - v_{i,j+1}^{m+1} \right) + \\ \left( \frac{h^2 + 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) \left( p_{i-1,j}^{m+1} + p_{i+1,j}^{m+1} + p_{i,j-1}^{m+1} + p_{i,j+1}^{m+1} \right) &+ \frac{1}{2h\tau} \left( u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m + v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m \right) \\ + \left( \frac{h^2 - 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) \left( 4p_{i,j}^m - p_{i-1,j}^m - p_{i+1,j}^m - p_{i,j-1}^m - p_{i,j+1}^m \right) &+ \frac{\mathcal{P}_{i,j}^{m+1} + \mathcal{P}_{i,j}^m}{2}. \end{aligned}$$

Observando-se os coeficientes das respectivas equações acima (ou Eq. (4.55) e Eq. (4.76)), verifica-se que para transformar as aproximações obtidas pelo método de Euler em aproximações com o método de CN, basta fazer a seguinte substituição dos coeficientes

$$\frac{h^2 + 4k(\lambda + 2\mu)\tau}{h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \longleftarrow \frac{h^2 + 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \quad (4.77)$$

$$\frac{h^2 + 4k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \longleftarrow \frac{h^2 + 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \quad (4.78)$$

$$\frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} \longleftarrow \frac{h^2 - 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \quad (4.79)$$

$$\mathcal{P}_{i,j}^{m+1} \longleftarrow \frac{\mathcal{P}_{i,j}^{m+1} + \mathcal{P}_{i,j}^m}{2} \quad (4.80)$$

ou então substituir apenas as constantes  $c_6$ ,  $c_8$  e  $c_9$  descritas nas Eq. (4.56) por

$$c_6 = \frac{h^2 + 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{h^2(\lambda + 2\mu)\tau}, \quad (4.81)$$

$$c_8 = \frac{h^2 + 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau}, \quad (4.82)$$

$$c_9 = \frac{h^2 - 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau}, \quad (4.83)$$

e fazer a média dos valores dos termos fonte considerando o passo de tempo atual e anterior, como descrito na Eq. (4.80).

Para a solução direta na malha mais grossa possível, com apenas 3 pontos espaciais em cada direção (sendo que 2 destes pontos são contornos nulos) usando a aproximação temporal com o método de CN, resolve-se um sistema com as equações do deslocamento descritas no sistema de Eq. (4.55) e a equação da pressão descrita em Eq. (4.76), no ponto  $i = j = 2$ .

### 4.3 Ordenação colorida para o suavizador Vanka

Sabe-se que a solução dos grandes sistemas lineares resultantes da discretização do modelo de Biot é a parte que representa maior custo computacional em simulações reais. Por isso, a estrutura de suavizadores eficientes para este tipo de problemas atrai muita atenção. Além disso, as arquiteturas de computadores atuais tendem a aumentar as capacidades de multiprocessamento ao apresentar mais núcleos de processamentos. Para explorar essas características, é preciso desenvolver algoritmos que sejam capazes de usar um grande número de núcleos, tornando possível um maior paralelismo. De acordo com Rodrigo (2010), com o método *multigrid* não é diferente, sendo muito importante a escolha de um suavizador adequado. Além disso, para suavizar um sistema de equações como o problema da poroelasticidade existem algumas dificuldades adicionais, pois a matriz discretizada apresenta pontos de sela, em que o laplaciano da pressão é quase nulo. Isso faz com que os métodos que utilizam suavização por pontos não sejam satisfatórios, tornando o suavizador Vanka muito atrativo para esse caso.

Nesta seção será proposta uma formulação para a ordenação colorida a ser usada no suavizador Vanka, de forma que este suavizador possa ser completamente paralelizável no espaço. Para que um suavizador seja paralelizável é necessário que nas atualizações das variáveis de uma mesma cor não se utilizem valores que foram atualizados na mesma iteração. Após o estudo da formulação do suavizador Vanka usado nas equações da poroelasticidade discretizadas através do Método das Diferenças Finitas (MDF), percebeu-se que o número mínimo de cores possíveis para possibilitar a paralelização do referido suavizador são 4 cores para o caso 1D e 12 cores para o caso 2D.

No caso unidimensional, após a discretização através do MDF obtém-se a célula descrita na Fig. 21. Nessa figura, as variáveis que estão em um círculo (○) serão atualizadas na iteração atual e as demais variáveis serão apenas usadas na iterada atual para os respectivos cálculos.

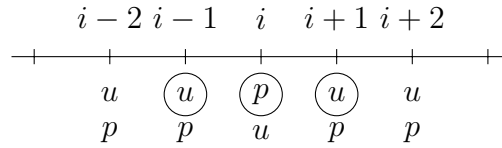


Figura 21 – Variáveis usadas pelo suavizador Vanka de 3 pontos para equação da poroelasticidade 1D. As variáveis que estão em um círculo (○) serão atualizadas na iteração atual.

Com o auxílio da Fig. 21 é possível notar que após a suavização e atualização das variáveis que se encontram nas posições  $u_{i-1}, p_i, u_{i+1}$ , as próximas variáveis a serem atualizadas devem ser as variáveis que se encontram nas posições  $u_{i+3}, p_{i+4}, u_{i+5}$  (ver a Eq. (4.33)). Observa-se que no segundo passo de atualização, usam-se as variáveis  $u_{i+2}$  e  $p_{i+2}$ , que também foram usadas (mas não atualizadas) no primeiro passo da suavização, ver por exemplo a Fig. 22. Na Fig. 22 descrevem-se dois passos feitos em uma mesma iteração usando-se tal ordenação, que estão com as variáveis relacionadas ao primeiro e ao segundo passo de atualização, abaixo e acima do eixo principal, respectivamente. A numeração dos nós desta figura seguem a numeração descrita na Fig. 21. Com isso, pode-se garantir que para o suavizador Vanka de 3 pontos ser paralelizável, devem-se usar no mínimo 4 cores.

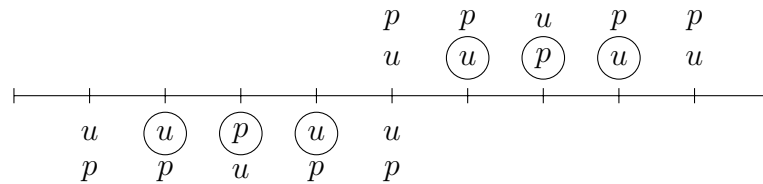


Figura 22 – Suavizador Vanka de 3 pontos para equação da poroelasticidade 1D. Os valores abaixo da linha reta pertencem a um passo de suavização e os valores acima da linha pertencem ao passo subsequente. Apenas as variáveis que estão em um círculo (○) serão atualizadas na iteração atual.

Sendo assim, pode-se mostrar na Fig. 23 a ordenação de 4 cores usada no problema da poroelasticidade 1D.



Figura 23 – Ordenação de 4 cores para o suavizador Vanka: (○) vermelho; (□) preto; (△) azul e (▽) verde.

Para o caso bidimensional, em primeiro momento pensou-se em usar um esquema com 4 cores em cada direção espacial, ou seja 16 cores no total. Porém, com a análise da célula do suavizador Vanka descrito na Fig. 24, pode-se observar que o ponto  $\mathcal{P}$  (que está em um círculo  $\odot$ ) possui vizinhos em 2 pontos distintos nas posições Oeste, Leste, Norte e Sul. Porém, este ponto  $\mathcal{P}$  possui apenas 1 vizinho nas posições Nordeste, Sudeste, Sudoeste e Noroeste (para interpretar melhor, ver a Eq. (4.59) e a Fig. (20)).

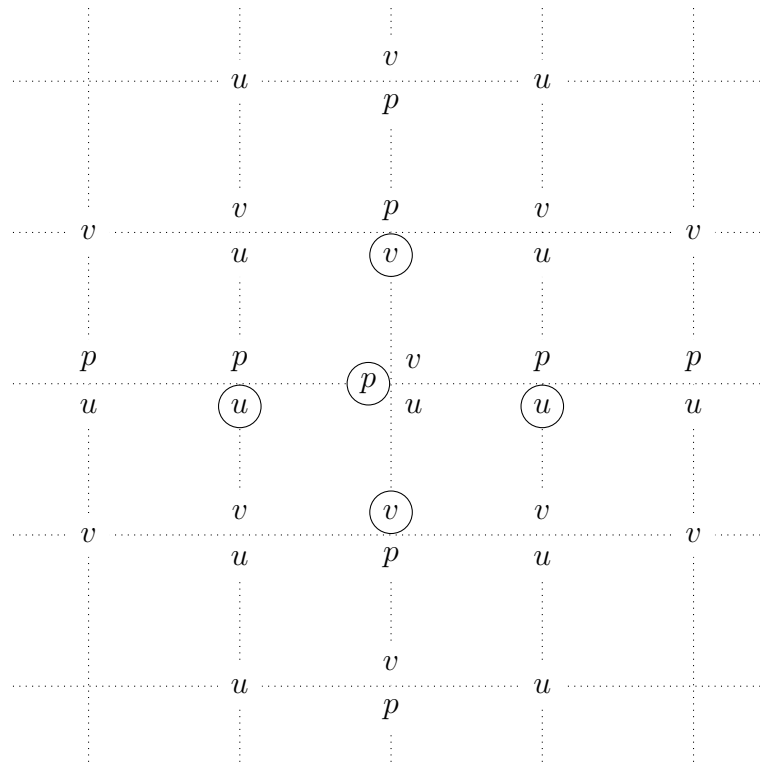


Figura 24 – Variáveis usadas pelo suavizador Vanka de 5 pontos para equação da poroelasticidade 2D. As variáveis que estão em um círculo ( $\odot$ ) são atualizadas na iterada atual.

Considerando-se os argumentos citados, propôs-se uma ordenação que utiliza 6 cores em uma direção espacial (no caso, na direção  $x$ ) e apenas 2 cores na outra direção espacial, totalizando o número mínimo de 12 cores e garantindo que o algoritmo seja paralelizável. Essa descrição é feita, por exemplo em uma malha com  $17 \times 17$  pontos como mostra a Fig. 25.

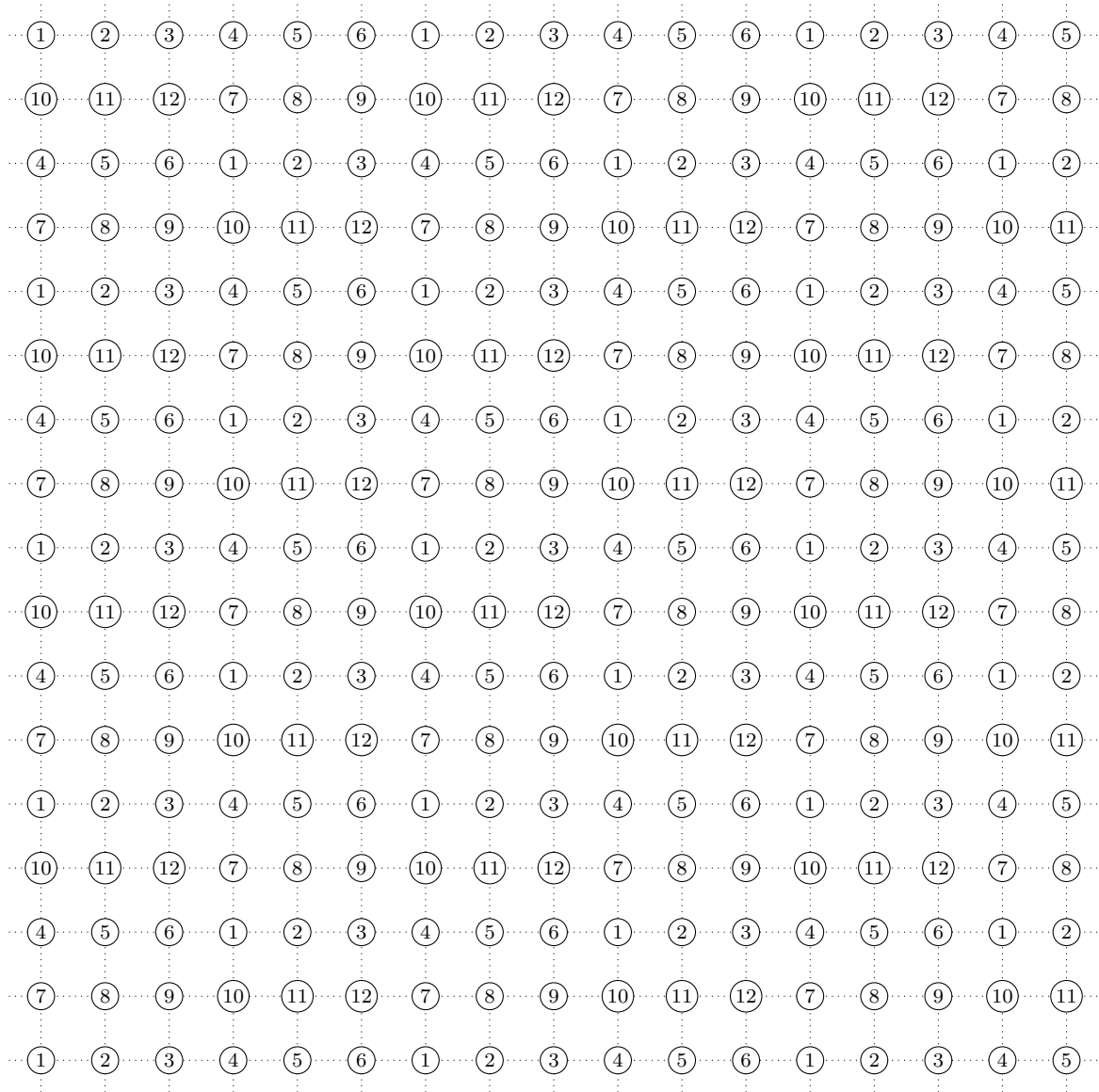


Figura 25 – Ordenação de 12 cores usada para o problema da poroelasticidade 2D com o suavizador Vanka de 5 pontos.



## 5 Métodos de solução

Neste capítulo será descrito o método (ou técnica) *Time-Stepping*, usado para a solução de EDPs parabólicas.

Por simplicidade, para a descrição dessas técnicas, segue-se como base o problema modelo padrão para classe de EDPs parabólicas, dado pela equação do calor (ou equação de Fourier) bidimensional descrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f. \quad (5.1)$$

Este problema combina características de EDPs elípticas estacionárias para o caso de se considerar um passo de tempo fixo, nesse caso, gerando o método *Time-Stepping*.

### 5.1 Método *Time-Stepping*

Segundo [Tannehill et al. \(1997\)](#) alguns estudos têm dado ênfase para algoritmos que tratam a equação parabólica como uma sequência de equações elípticas em cada passo de tempo. Este método é chamado de método *Time-Stepping*.

Nesse método, resolve-se o sistema discretizado em cada passo de tempo de forma consecutiva até o passo de tempo final. Assim, em cada passo de tempo, pode-se usar algum método para o problema estacionário. Com isso, a estrutura do sistema a ser resolvido é correspondente à discretização de EDPs elípticas ([TANNEHILL et al., 1997](#); [BURDEN; FAIRES, 2016](#); [LENT, 2006](#); [HIRSCH, 2007](#)).

A principal característica do método *Time-Stepping* é mostrado na Fig. 26, retirada de ([VANDEWALLE, 1993](#), p. 18). Em cada passo de tempo é usada a solução do passo de tempo anterior como estimativa inicial e resolve-se o sistema de equações correspondente no passo de tempo atual, considerando-se um sistema estacionário. Com isso, esse sistema de equações diferenciais parciais parabólicas pode ser comparado às equações diferenciais parciais elípticas, para as quais o método *multigrid* é comprovadamente eficiente ([WESSELING, 1992](#); [BRIGGS et al., 2000](#); [TROTTEMBERG et al., 2001](#)). Dessa forma, na programação do método *Time-Stepping* deve-se fazer um laço externo para os passos de tempo ( $m + 1$ ), até o número de passos de tempo  $N_t$ , e um laço interno para as variáveis espaciais ( $h$  ou  $i, j$ ). Esse procedimento é especificado através do algoritmo 3.

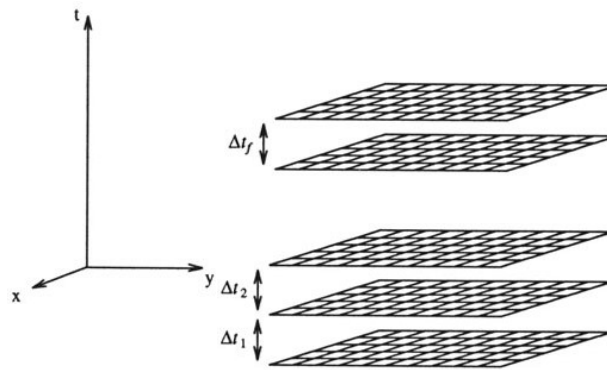


Figura 26 – Procedimento de atualização das incógnitas no método *Time-Stepping* (VANDEWALLE, 1993, p. 18) para o caso 2D.

---

**Algoritmo 3:** Método *Time-Stepping* em uma malha

---

Entre com os dados de entrada, condição inicial e condições de contornos.

**for**  $m = 1 : N_t$  **do**

**while** Não alcançar algum critério de parada **do**

        Suavize o sistema correspondente no passo de tempo  $m + 1$ .

**end while**

**end for**

---

Devido à característica do método *Time-Stepping*, para os casos em que se usa a técnica *multigrid*, além da malha fina  $\Omega^h$ , as malhas mais grossas  $\Omega^{2h}, \Omega^{4h}, \dots, \Omega^{lh}$ , com  $l = 2^{(L_{\max}-1)}$ , em que  $L_{\max}$  é o número máximo de malhas a serem utilizadas, são discretizadas apenas nas variáveis espaciais, ou seja, em cada passo de tempo fixo. Por exemplo, considerando-se a discretização das variáveis espaciais  $x, y$  na malha  $\Omega^h$  com  $33 \times 33$  pontos, as malhas mais grossas  $\Omega^{2h}, \Omega^{4h}, \Omega^{8h}$  e  $\Omega^{16h}$  terão  $17 \times 17, 9 \times 9, 5 \times 5$  e  $3 \times 3$  pontos, respectivamente.

Pode-se especificar o método *multigrid* com os ciclos  $V(\nu_1, \nu_2), F(\nu_1, \nu_2)$  ou  $W(\nu_1, \nu_2)$  para o método *Time-Stepping* através do algoritmo 4. A sigla **MG-ciclo** representa qualquer um dos ciclos ( $V, W$  ou  $F$ ) definidos anteriormente nos Alg. 1 e Alg. 2. A partir de agora, tal símbolo será usado nesses algoritmos.

---

**Algoritmo 4:** Método *Time-Stepping - multigrid*

---

Entre com os dados de entrada, condição inicial e condições de contornos.

**for**  $m = 1 : N_t$  **do**

**while** Não alcançar algum critério de parada **do**

        Um ciclo *multigrid* com **MG-ciclo** (1).

**end while**

**end for**

---

## Referências

- BIOT, M. A. General theory of three dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, v. 12, n. 2, p. 155–164, 1941.
- BIOT, M. A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*, v. 26, n. 2, p. 182–185, 1955.
- BRANDT, A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, v. 31, n. 138, p. 333–390, 1977.
- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. *A Multigrid Tutorial*. 2nd. ed. Philadelphia: SIAM, 2000.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 10nd. ed. Boston: Cengage Learning, 2016.
- EHLERS, W.; BLUHM, J. *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*. Berlin, Germany: Springer, 2002.
- FEDORENKO, R. P. On the speed of convergence of an iteration process. *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, n. 4, p. 227, 1964.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3nd. ed. New York: Springer, 2002.
- FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: conceitos básicos e aplicações*. 2nd. ed. São Paulo: Edusp, 2000.
- GASPAR, F.; LISBONA, F.; OOSTERLEE, C. W.; WIENANDS, R. A systematic comparison of coupled and distributive smoothing in multigrid for the poroelasticity system. *Numerical Linear Algebra with Applications*, v. 11, n. 28, p. 93–113, 2004.
- GASPAR, F. J.; LISBONA, F. J.; OOSTERLEE, C. W.; VABISHCHEVICH, P. N. An efficient multigrid solver for a reformulated version of the poroelasticity system. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, v. 196, 2007.
- GASPAR, F. J.; LISBONA, F. J.; VABISHCHEVICH, P. N. A finite difference analysis of biot's consolidation model. *Applied Numerical Mathematics*, v. 44, p. 487–506, 2003.
- GASPAR, F. J.; LISBONA, F. J.; VABISHCHEVICH, P. N. Staggered grid discretizations for the quasi-static biot's consolidation problem. *Applied Numerical Mathematics*, v. 56, p. 888–898, 2006.
- GASPAR, F. J.; RODRIGO, C. Local fourier analysis of vanka smoother based multigrid for staggered discretization of biot's consolidation problem. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, v. 9, n. 28, p. 18–25, 2015.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. V. *Matrix Computations*. 2nd. ed. Baltimore: Johns Hopkins Press, 1989.

- GOLUB, G. H.; ORTEGA, J. M. *Scientific Computing and Differential Equations: an Introduction to Numerical Methods*. [S.l.]: Academic Press, 1992.
- HACKBUSCH, W. *Multi-grid Methods and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- HIRSCH, C. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. 2nd. ed. New York, USA: John Wiley & Sons, 2007.
- HORTON, G.; VANDEWALLE, S. A space time multigrid method for parabolic partial differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 16, n. 4, p. 848–864, 1995.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, T. L. *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. 6nd. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- JANSSEN, J. *Acceleration of Waveform Relaxation Methods for Linear Ordinary and Partial Differential Equations*. Tese (Doutorado) — Katholieke Universiteit Leuven, Heverlee, Belgium, 1997.
- KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*. 8nd. ed. Wiley: Springer, 1999.
- LENT, J. V. *Multigrid Method for Time-Dependent Partial Differential Equations*. Tese (Doutorado) — Katholieke Universiteit Leuven, 2006.
- MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacionais*. 2nd edição. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- MARCHI, C. H. *Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.
- MOW, V. C.; LAI, W. M. Recent developments in synovial joint biomechanics. *SIAM Review*, v. 7, p. 275–317, 1980.
- OOSTERLEE, C. W.; GASPAR, F. J. Multigrid relaxation methods for systems of saddle point type. *Appl. Numer. Math.*, v. 58, p. 1933–1950, 2008.
- PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H. Optimum parameters of a geometric multigrid for the two-dimensional laplace's equation. *Proceedings of COBEM*, 2007.
- ROACHE, P. J. *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque, USA: Hermosa Publishers, 1998.
- RODRIGO, C. *Geometric Multigrid Methods on Semi-Structured Triangular Grids*. Tese (Doutorado) — Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España, 2010.
- RODRIGO, C.; GASPAR, F. J.; LISBONA, F. J. On a local fourier analysis for overlapping block smoothers on triangular grids. *Applied Numerical Mathematics*, v. 105, p. 96–111, 2016.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2nd edição. ed. São Paulo: Pearson, 1996.
- SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2nd. ed. Philadelphia: PWS, 2003.
- STÜBEN, K. A review of algebraic multigrid. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, n. 128, p. 281–309, 2001.

- STÜBEN, K.; TROTTENBERG, U. Multigrid methods: Fundamental algorithms, model problem analysis and applications. In: HACKBUSCH, W.; TROTTENBERG, U. (Ed.). *Proceedings of the Conference Held at Köln-Porz*. New York: Springer-Verlag, 1981. p. 1–176.
- STRIKWERDA, J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. 2nd. ed. Pacific Grove, CA: SIAM, 1989.
- TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Philadelphia: Taylor & Francis, 1997.
- TROTTENBERG, U.; OOSTERLEE, C.; SCHÜLLER, A. *Multigrid*. San Diego: Academic Press, 2001.
- VANDEWALLE, S. *Parallel Multigrid Waveform Relaxation for Parabolic Problems*. Stuttgart: Teubner, 1993.
- WESSELING, P. *An Introduction to Multigrid Methods*. Chichester: John Wiley & Sons, 1992.
- WESSELING, P.; OOSTERLEE, C. Multigrid with applications to computational fluid dynamics. *Comput. Appl. Math.*, v. 128, p. 311–334, 2001.
- WIENANDS, R.; GASPAR, F. J.; LISBONA, F. J.; OOSTERLEE, C. W. An efficient multigrid solver based on distributive smoothing for poroelasticity equations. *Computing*, v. 73, p. 99–119, 2004.
- WIENANDS, R.; JOPPICH, W. *Practical Fourier Analysis for Multigrid Methods*. Washington, USA: Chapman & Hall/CRC Press, 2005. v. 4.