

Capítulo 7.

DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE (2Dp)

Este capítulo envolve:

- Difusão de calor 2D
- Difusão de quantidade de movimento linear (Q.M.L.) 2D
- Solver Gauss-Seidel 2D

Além disso:

- Condições de contorno de Dirichlet
- Malha uniforme em cada direção espacial
- Problemas em regime permanente (p)
- Coordenadas cartesianas
- Propriedades constantes (por exemplo, condutividade térmica)

Em termos numéricos, a novidade deste capítulo é a solução de problemas bidimensionais.

7.1 DIFUSÃO DE CALOR 2Dp

A condução de calor bidimensional em uma placa plana, em regime permanente, com propriedades constantes e um termo fonte (Fig. 7.1), é modelada por (Incropera e DeWitt, 1998):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = S \quad (7.1)$$

onde

x, y = direções coordenadas (variáveis independentes)

S = termo fonte

T = temperatura (variável dependente)

As variáveis de interesse são:

- A temperatura, extraída da Eq. (7.1), (variável primária)
- A temperatura média (variável secundária, global), definida por

$$T_m = \frac{1}{L_x} \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} T \, dx \, dy \quad (7.2)$$

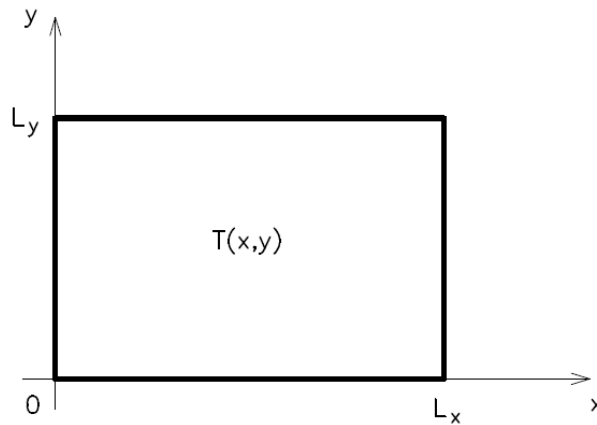


Figura 7.1. Domínio de cálculo bidimensional

7.1.1 Discretização das equações

Em problemas multidimensionais, o Método de Diferenças Finitas consiste em aproximar cada termo, em cada direção, separadamente dos demais. Portanto, a aproximação dos termos da Eq. (7.1) é feita da mesma forma que no Capítulo 3 (problemas unidimensionais). Assim, usando-se CDS-2, através da Eq. (2.38), obtém-se, para a direção x :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_P \approx \frac{T_W + T_E - 2T_P}{h_x^2} \quad (7.3)$$

e, para a direção y ,

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_P \approx \frac{T_S + T_N - 2T_P}{h_y^2} \quad (7.4)$$

onde h_x e h_y são, respectivamente, as distâncias entre dois nós consecutivos nas direções x e y (ver Fig. 7.2); T_W, T_E, T_S e T_N são as temperaturas nos nós vizinhos ao nó P .

As distâncias h_x e h_y são calculadas com

$$h_x = \frac{L_x}{N_x - 1} \quad (7.5)$$

e

$$h_y = \frac{L_y}{N_y - 1} \quad (7.6)$$

onde

L_x e L_y = comprimento do domínio nas direções x e y

N_x e N_y = número de nós nas direções x e y

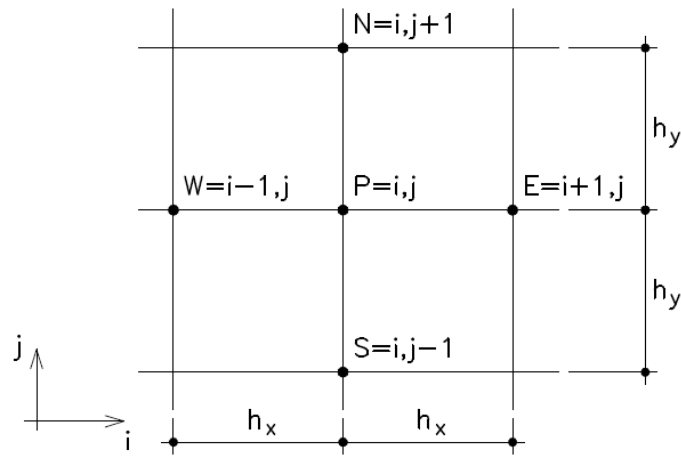


Figura 7.2. Malha bidimensional uniforme em cada direção

Assim, com as Eqs. (7.3) e (7.4) em (7.1), obtém-se:

$$\frac{(T_W + T_E - 2T_P)}{h_x^2} + \frac{(T_S + T_N - 2T_P)}{h_y^2} = S_P$$

ou

$$\left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right) T_P = \left(\frac{1}{h_x^2} \right) T_W + \left(\frac{1}{h_x^2} \right) T_E + \left(\frac{1}{h_y^2} \right) T_S + \left(\frac{1}{h_y^2} \right) T_N - S_P \quad (7.7)$$

ou ainda

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b_P \quad (7.8)$$

Comparando-se as Eqs. (7.7) e (7.8), chega-se a

$$a_W = a_E = \frac{1}{h_x^2}; \quad a_S = a_N = \frac{1}{h_y^2}; \quad a_P = a_W + a_E + a_S + a_N; \quad b_P = -S_P \quad (7.9)$$

Estes coeficientes são válidos para os nós internos da malha, que envolve

$$\left. \begin{array}{l} i = 2, 3, \dots, N_x - 1 \quad (1 \text{ e } N_x \rightarrow \text{contornos}) \\ j = 2, 3, \dots, N_y - 1 \quad (1 \text{ e } N_y \rightarrow \text{contornos}) \end{array} \right\} \quad (7.10)$$

De forma semelhante ao caso unidimensional, a aplicação de condições de contorno de Dirichlet, resulta em

$$T_P = T_{c.c.}$$

ou seja

$$a_P = 1; \quad a_W = a_E = a_S = a_N = 0; \quad b_P = T_{c.c.} \quad (7.11)$$

onde $T_{c.c.}$ representa os valores conhecidos da temperatura em cada nó dos contornos, que envolve

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \text{ e } N_x \\ j = 1 \text{ e } N_y \end{array} \right\} \quad (7.12)$$

A Fig. 7.3 mostra a numeração sequencial de uma malha retangular com 20 nós, onde $N_x = 5$ e $N_y = 4$, seguindo uma ordem lexicográfica.

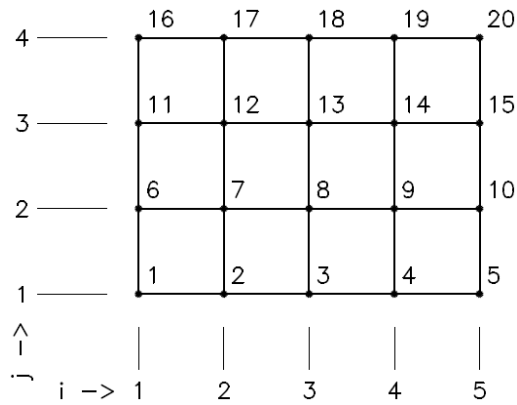


Figura 7.3. Numeração sequencial

Pode-se estabelecer uma relação entre o número do nó (P) e os índices i (na direção x) e j (na direção y):

$$P = i + (j - 1) N_x$$

A Eq. (7.8) representa um sistema de equações algébricas, onde a matriz de coeficientes tem cinco diagonais não-nulas, ou seja, ela é do tipo pentadiagonal, conforme Fig. 7.4.

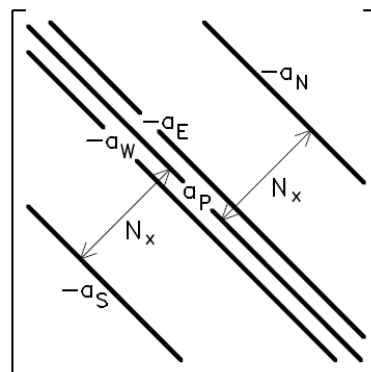


Figura 7.4. Matriz pentadiagonal

Estendendo-se a regra do trapézio, Eq. (2.44), para o caso bidimensional, a solução numérica da Eq. (7.2) para a temperatura média resulta em:

$$T_m = \frac{h_x h_y}{4 L_x L_y} \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} (T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i-1,j-1} + T_{i,j-1}) \quad (7.13)$$

7.1.2 Problema 1

As condições de contorno e o termo fonte são dados por:

$$\left. \begin{aligned} T(0, y) = T(x, 0) = 0 \\ T(L_x, y) = 100 L_x y \\ T(x, L_y) = 100 x L_y \\ S = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

As soluções analíticas das Eqs. (7.1), (7.2) e (7.14) são:

$$T = 100 x y \quad (7.15)$$

e

$$T_m = 25 L_x L_y \quad (7.16)$$

Observação: este problema não apresenta erro de discretização!

7.1.3 Problema 2

As condições de contorno e o termo fonte são dados por:

$$\left. \begin{aligned} T(0, y) = T(L_x, y) = T(x, 0) = 0 \\ T(x, L_y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \\ S = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

As soluções analíticas das Eqs. (7.1), (7.2) e (7.17) são:

$$T = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \frac{\sinh\left(\frac{\pi y}{L_x}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \quad (7.18)$$

e

$$T_m = \frac{2 L_x}{\pi^2 L_y \sinh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \left[\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1 \right] \quad (7.19)$$

7.2 DIFUSÃO DE QML 2Dp

Para um escoamento laminar tridimensional, a partir do momento em que o escoamento está plenamente desenvolvido, em regime permanente, fluido incompressível, propriedades constantes, em um duto de seção transversal do tipo retangular, ilustrado na Fig. 7.5, tem-se (White, 1991):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = \text{constante} = C \quad (7.20)$$

onde

x, y = direções coordenadas (variáveis independentes)

z = direção longitudinal do duto

μ = viscosidade absoluta do fluido (constante)

p = pressão estática do fluido

u = velocidade do fluido na direção z (variável dependente)

O domínio de cálculo é $-a \leq x \leq a$ e $-b \leq y \leq b$.

As condições de contorno são do tipo Dirichlet em todos os quatro bordos:

$$u(-a, y) = u(a, y) = u(x, -b) = u(x, b) = 0 \quad (7.21)$$

As variáveis de interesse são:

- A velocidade, u , da Eq. (7.20), (variável dependente, primária)
- A velocidade média, u_m , (variável secundária, global), definida por

$$u_m = \frac{1}{4ab} \int_{-b}^b \int_{-a}^a u \, dx \, dy \quad (7.22)$$

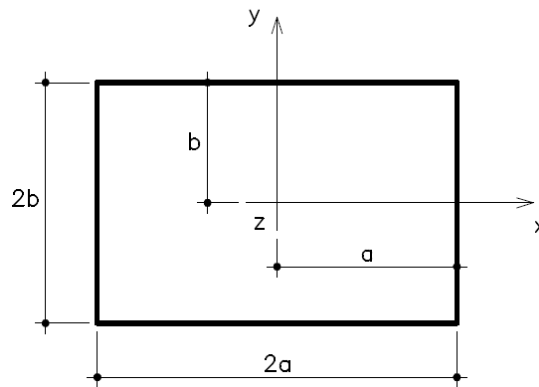


Figura 7.5. Escoamento 2D em um duto retangular

7.2.1 Solução analítica

As soluções analíticas das Eqs. (7.20), (7.21) e (7.22) são:

$$u = \frac{-16a^2}{\mu \pi^3} \left(\frac{dp}{dz} \right) \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} \left[1 - \frac{\cosh(i \pi y / 2a)}{\cosh(i \pi b / 2a)} \right] \left[\frac{\cos(i \pi x / 2a)}{i^3} \right] \quad (7.23)$$

e

$$u_m = \frac{-a^2}{3\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) \left[1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(i \pi b / 2a)}{i^5} \right] \quad (7.24)$$

7.2.2 Solução numérica

Seguindo o procedimento da Seção 7.1.1, obtém-se os mesmos coeficientes da Eq. (7.9), exceto o termo fonte, ou seja:

$$\left. \begin{aligned} a_W = a_E = \frac{1}{h_x^2}; \quad a_S = a_N = \frac{1}{h_y^2} \\ a_P = a_W + a_E + a_S + a_N; \quad b_P = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

De forma semelhante à Eq. (7.13), obtém-se

$$u_m = \frac{h_x h_y}{16 a b} \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} (u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1}) \quad (7.26)$$

7.3 GAUSS-SEIDEL 2D

O método de Gauss-Seidel pode ser usado para resolver de forma iterativa um sistema de equações do tipo pentadiagonal. Para tanto, basta isolar a incógnita (T_P) de cada nó da Eq. (7.8), o que resulta em

$$T_P = \frac{(a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b_P)}{a_P} \quad (7.27)$$

Mas como T_W, T_E, T_S e T_N também são desconhecidos nesta equação, é necessário estimar um campo inicial para a variável T .

Se o problema for de condições de contorno do tipo Dirichlet, basta aplicar a Eq. (7.27) aos nós internos da malha, definidos na Eq. (7.10).

7.4 EXERCÍCIO

Exercício 7.1

Implemente um programa computacional para resolver o problema definido pelas Eqs. (7.1), (7.2) e (7.17), da condução de calor em uma placa plana.

Dados: $L_x = L_y = 1$ Temperatura inicial = 0
 $N_x = N_y = 11$ Solver: Gauss-Seidel
Número de iterações = 200

Resultados a apresentar:

- 1) Um gráfico de T versus y para $x = 1/2$ com as soluções analítica e numérica.
- 2) Um gráfico de T versus x para $y = 1/2$ com as soluções analítica e numérica.
- 3) O valor de $T(1/2; 9/10)$ das soluções analítica e numérica.
- 4) O valor de T_m das soluções analítica e numérica.