

Capítulo 6.

DIFUSÃO DE CALOR NÃO-LINEAR 1D PERMANENTE

Neste capítulo serão abordados quatro tipos de problemas (Incropera e De Witt, 1998) de condução de calor:

- 1) tronco de cone;
- 2) casca cilíndrica;
- 3) casca esférica; e
- 4) parede com condutividade térmica (k) variável.

Os três primeiros são lineares e o último, não-linear. Em todos serão usadas condições de contorno do tipo Dirichlet e malhas uniformes. Além do sistema de coordenadas cartesianas que foi empregado nos capítulos anteriores, serão usados os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas. As variáveis de interesse são a temperatura (variável primária ou dependente) e a taxa de transferência de calor (q).

Em todos os problemas abordados nos capítulos 3 e 5, os coeficientes têm valor constante. Isso pode ser constatado nas Eqs. (3.14), (3.56), (3.74) e (5.27). Neste capítulo, os coeficientes serão variáveis ao longo dos nós da malha.

Inicialmente apresenta-se uma abordagem geral para resolver numericamente os quatro problemas. Em seguida, são apresentados os problemas físicos específicos, com seus modelos matemáticos, soluções analíticas e numéricas.

6.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA GERAL

Os quatro problemas citados acima podem ser representados genericamente por

$$\frac{df}{d\xi} = 0 \tag{6.1}$$

com

$$f = g \frac{dT}{d\xi} \quad (6.2)$$

onde g é uma função de ξ ou de T , ξ representa a variável independente, isto é, a direção coordenada, e T , a variável dependente, a temperatura.

Considerando-se apenas a Eq.(6.1), ela pode ser discretizada através da aproximação numérica dada na Eq. (2.26), ou seja, por diferença central. Mas, no caso da Eq. (6.1), em vez de se usar os valores de f nos nós W e E , usa-se

$$\frac{(f_e - f_w)}{h} = 0 \quad (6.3)$$

onde

$$\xi_w = \frac{(\xi_W + \xi_P)}{2} \quad (6.4)$$

$$\xi_e = \frac{(\xi_P + \xi_E)}{2} \quad (6.5)$$

representam as coordenadas médias entre os nós vizinhos a P , conforme pode ser visto na Fig. 6.1.

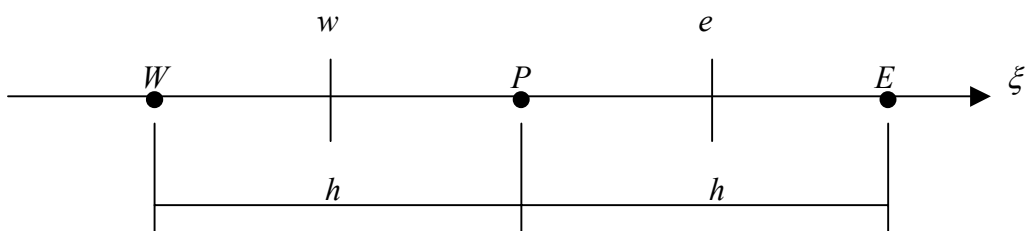


Figura 6.1 Nó genérico P e seus vizinhos W e E .

Novamente, com a Eq. (2.26), obtém-se

$$f_w = g_w \frac{(T_P - T_W)}{h} \quad (6.6)$$

$$f_e = g_e \frac{(T_E - T_P)}{h} \quad (6.7)$$

com estas duas equações na Eq. (6.3), chega-se a

$$\frac{\left[g_e \frac{(T_E - T_P)}{h} - g_w \frac{(T_P - T_W)}{h} \right]}{h} = 0$$

ou

$$(g_w + g_e)T_P = g_w T_W + g_e T_E \quad (6.8)$$

Comparando esta equação com a Eq. (3.13), que representa o sistema de Equações (3.16), tem-se

$$a_P = g_w + g_e, \quad a_W = g_w, \quad a_E = g_e, \quad b_P = 0 \quad (6.9)$$

Portanto, continuamos a ter uma matriz de coeficientes do tipo tridiagonal. Mas, como g depende de ξ ou T , em cada nó teremos valores diferentes para a_P , a_W e a_E . A discretização apresentada na Eq. (6.9) é aplicada, a seguir, aos quatro problemas citados na introdução deste capítulo.

6.2 CONDUÇÃO DE CALOR NUM TRONCO DE CONE

A condução de calor entre as duas superfícies paralelas de tronco de cone mostrado na Fig. 6.2, no caso unidimensional, pode ser modelada por (Incropera e De Witt, 1998)

$$\frac{d}{dx} \left(A \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (6.10)$$

onde A representa a área da seção transversal a x . Portanto, seu valor é variável com x . Comparando-se as Eqs. (6.1) e (6.2) com (6.10), verifica-se que

$$\left. \begin{aligned} f &= A \frac{dT}{dx} \\ g &= A \\ \xi &= x \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

e, da Eq. (6.9),

$$a_p = A_w + A_e, \quad a_w = A_w, \quad a_E = A_e, \quad b_p = 0 \quad (6.12)$$

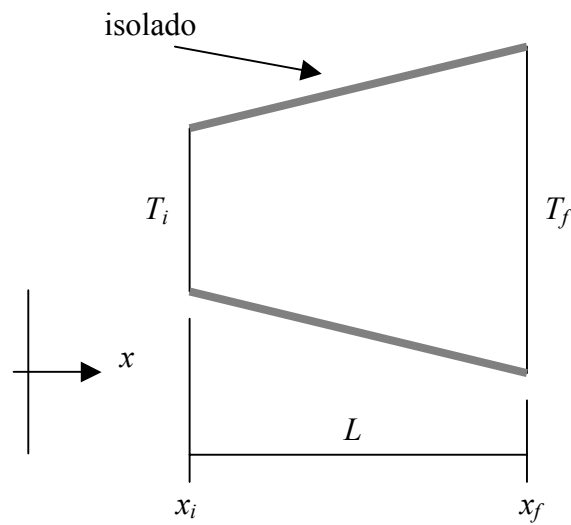


Figura 6.2 Tronco de cone.

A solução analítica da Eq. (6.10) é

$$T = T_i + (T_i - T_f) \left[\frac{(1/x) - (1/x_i)}{(1/x_i) - (1/x_f)} \right] \quad (\text{analítico}) \quad (6.13)$$

para

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\pi D^2}{4} \\ D &= Cx \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

onde D é o diâmetro de cada seção do tronco de cone, e C é uma constante.

Neste problema, a taxa de transferência de calor é expressa por

$$q = -kA \frac{dT}{dx} = \text{constante} \quad (6.15)$$

onde k é a condutividade térmica de material que constitui o cone, que é considerada constante nesta seção 6.2 do capítulo 6. Para o caso unidimensional, onde as superfícies laterais de tronco de cone estão isoladas, q é constante, e sua solução analítica é

$$q = \frac{\pi C^2 k (T_i - T_f)}{4 \left[(1/x_i) - (1/x_f) \right]} \quad (\text{analítico}) \quad (6.16)$$

Como q é constante no domínio, a solução numérica da Eq. (6.15) pode ser aplicada em qualquer nó da malha. Por exemplo, para o nó 2 da Fig. 3.3 com diferença central, Eq.(2.26), tem-se

$$q_2 = -k A_2 \frac{(T_3 - T_1)}{2h} \quad (\text{numérico}) \quad (6.17)$$

onde os subíndices indicam os nós da malha.

6.3 CONDUÇÃO DE CALOR NUMA CASCA CILÍNDRICA

A condução de calor entre as superfícies interna e externa de uma casca cilíndrica do tipo circular, Fig. 6.3, pode ser modelada por (Incropera e DeWitt, 1998)

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (6.18)$$

com

$$\left. \begin{array}{l} T(r_i) = T_i \\ T(r_f) = T_f \end{array} \right\} \quad (6.19)$$

onde r é o raio local do cilindro. A taxa de transferência de calor (q) é dada por

$$q = -k A \frac{dT}{dr} = \text{constante} \quad (6.20)$$

onde k é constante e A é a área através da qual o calor se propaga na direção radial, calculada por

$$A = 2\pi r c \quad (6.21)$$

onde c é o comprimento do cilindro.

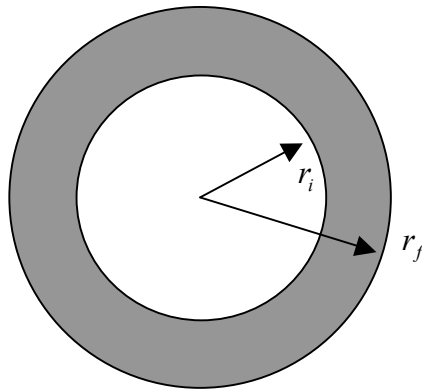


Figura 6.3 Casca esférica ou cilíndrica do tipo circular.

As soluções analíticas das Eqs. (6.18) a (6.20) são

$$T = T_f + (T_i - T_f) \left[\frac{\ln(r/r_f)}{\ln(r_i/r_f)} \right] \quad (6.22)$$

$$q = \frac{2\pi c k (T_i - T_f)}{\ln(r_f/r_i)} \quad (6.23)$$

Comparando-se as Eqs. (6.1) e (6.2) a (6.18), verifica-se que

$$\left. \begin{aligned} f &= r \frac{dT}{dr} \\ g &= r \\ \xi &= r \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

e, da Eq. (6.9),

$$a_P = r_w + r_c, \quad a_W = r_w, \quad a_E = r_e, \quad b_P = 0 \quad (6.25)$$

Novamente, como q é constante, Eq. (6.20), a solução numérica da Eq. (6.20) pode ser obtida em qualquer nó da malha. Para o nó 2, com diferença central, Eq. (2.26), e considerando-se a Eq. (6.21), tem-se

$$q_2 = -k\pi r_2 c \frac{(T_3 - T_1)}{h} \quad (\text{numérico}) \quad (6.26)$$

onde os subíndices indicam os nós da malha.

6.4 CONDUÇÃO DE CALOR NUMA CASCA ESFÉRICA

A condução de calor entre as superfícies interna e externa de uma casca esférica, Fig. 6.3, pode ser modelada por (Incropera e DeWitt, 1998)

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (6.27)$$

Neste caso, as Eq. (6.19) e (6.20) também se aplicam, e k é constante. Porém,

$$A = 4\pi r^2 \quad (6.28)$$

As soluções analíticas das Eqs. (6.27) e (6.20) resultam em

$$T = T_f + (T_i - T_f) \left[\frac{(1/r) - (1/r_f)}{(1/r_i) - (1/r_f)} \right] \quad (6.29)$$

$$q = \frac{4\pi k(T_i - T_f)}{[(1/r_i) - (1/r_f)]} = \text{constante} \quad (6.30)$$

Comparando-se as Eq. (6.1) e (6.2) com (6.27), verifica-se que

$$\left. \begin{aligned} f &= r^2 \frac{dT}{dr} \\ g &= r^2 \\ \xi &= r \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

e, da Eq. (6.9),

$$a_P = r_w^2 + r_e^2, \quad a_W = r_w^2, \quad a_E = r_e^2, \quad b_P = 0 \quad (6.32)$$

Para q avaliado no nó 2 a partir da Eq. (6.20) com (6.21), tem-se

$$q_2 = -2\pi k r_2^2 \frac{(T_3 - T_1)}{h} \quad (\text{numérico}) \quad (6.33)$$

onde os subíndices indicam os nós da malha.

6.5 CONDUÇÃO DE CALOR COM k VARIÁVEL

A condução de calor numa parede plana (Fig. 3.1) cuja condutividade de térmica (k) é função da temperatura pode ser modelada por (Incropera e DeWitt, 1998)

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (6.34)$$

com q dado pela Eq. (6.15), e a área A sendo constante ao longo de x . Comparando-se as Eqs. (6.1) e (6.2) a (6.34), verifica-se que

$$\left. \begin{aligned} f &= k \frac{dT}{dx} \\ g &= k \\ \xi &= x \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

e, da Eq. (6.9),

$$a_P = k_w + k_e, \quad a_W = k_w, \quad a_E = k_e, \quad b_P = 0 \quad (6.36)$$

Existe uma diferença fundamental entre os coeficientes desta seção, Eq. (6.36), e aqueles das seções 6.2 a 6.4. Como se pode ver nas Eqs. (6.12), (6.25) e (6.32), os coeficientes têm valor diferente em cada nó mas eles são função da variável independente: x ou r . Portanto, os problemas são lineares. Já no caso da Eq. (6.36), os coeficientes dependem de k que é função da temperatura, ou seja, da variável dependente. Neste caso, o problema torna-se iterativo mesmo que se use o método TDMA para resolver o sistema de equações algébricas.

Deve-se perceber na Eq. (6.36) que os valores de k são necessários nas coordenadas médias entre os nós da malha. Mas nestas coordenadas a temperatura não é conhecida. Assim, é necessário um procedimento para obter k_w e k_e a partir de seus valores nodais, isto é, a partir de k_W , k_P e k_E . O procedimento mais simples é usar médias aritméticas:

$$\left. \begin{aligned} k_w &= \frac{(k_W + k_P)}{2} \\ k_e &= \frac{(k_P + k_E)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Ela é adequada quando as variações de k são suaves.

Outra possibilidade, um pouco mais elaborada e indicada quando se tem variações abruptas de k , inclusive com materiais diferentes, é usar médias harmônicas (Patankar, 1980)

$$\left. \begin{aligned} k_w &= \frac{2k_w k_p}{(k_w + k_p)} \\ k_e &= \frac{2k_p k_E}{(k_p + k_E)} \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

A solução numérica da taxa de transferência de calor (q), Eq. (6.15), pode ser obtida através de

$$q_2 = -k_2 A \frac{(T_3 - T_1)}{2h} \quad (\text{numérico}) \quad (6.39)$$

onde os subíndices indicam os nós da malha.

Para obter soluções analíticas das Eqs. (6.34) e (6.15) é necessário especificar a dependência entre k e T . Considerando-se

$$\left. \begin{aligned} T(0) &= 0 \\ T(L) &= L = A = 1 \\ k &= e^T \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

obtem-se

$$T = \ln[1 + (e - 1)x] \quad (6.41)$$

$$q = 1 - e \quad (6.42)$$

Neste caso particular de $k = e^T$, com médias aritméticas para k , Eq. (6.37), os coeficientes da Eq. (6.36) resultam em

$$\left. \begin{aligned} a_w &= \frac{e^{T_w} + e^{T_p}}{2} \\ a_E &= \frac{e^{T_p} + e^{T_E}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

mostrando claramente a dependência que os coeficientes têm com a temperatura em cada nó.

6.5.1 Algoritmo de Solução

A solução numérica das Eqs. (6.34) e (6.15) pode ser obtida com o seguinte algoritmo:

- 1) Ler os dados do problema: T_0 , T_L , $k(T)$, L , A , N e n_{max} , onde n_{max} é o número máximo de iterações a realizar.
- 2) Discretizar o domínio de cálculo, isto é, obter h da Eq. (2.4).
- 3) Estimar a solução da variável de dependente (T). Várias formas podem ser usadas. Uma delas é:

$$T_P = \frac{(T_0 + T_L)}{2} \quad (P = 2, 3, \dots, N-1) \quad (6.44)$$

Outra seria usar uma variação linear com x entre T_0 e T_L .

- 4) Calcular as condutividades térmicas nos nós da malha, isto é, $k_P(T_P)$.
- 5) Calcular as condutividades térmicas nos pontos médios entre os nós, ou seja, k_w e k_e , usando a Eq. (6.38).
- 6) Calcular os coeficientes (a_P , a_W e a_E) e os termos fontes do sistema de equações de acordo com a Eq. (6.36), para os nós internos da malha, e com as Eqs. (3.19) e (3.20) para os contornos.
- 7) Resolver T_P com o método TDMA, descrito na seção 3.2.1.
- 8) Como k_P foi calculado no item 4 com T_P estimado no item 3, é necessário recalculá-lo com a solução obtida no item 7. Portanto, deve-se voltar ao item 4 até que n_{max} seja atingido.
- 9) Calcular a taxa de transferência de calor através da Eq. (6.39).
- 10) Gravar os resultados de T_P e q .
- 11) Visualizar a solução de T em um gráfico T_P versus x_P .

6.6 EXERCÍCIO

Exercício 6.1

Implemente um programa computacional para resolver analiticamente e numericamente o problema da condução de calor não-linear 1D permanente apresentado na seção 6.5 deste capítulo, seguindo o algoritmo da seção 6.5.1.

Dados: Eq. (6.40) com $N = 21$ e $n_{max} = 50$.

Resultados a apresentar:

- 1) Gráfico de T_P versus x_P com as soluções analítica e numérica
- 2) Soluções analítica e numérica da taxa de transferência de calor (q)

- 3) Siga o procedimento recomendado na seção 4.2.5 e apresente um gráfico semi-log, semelhante à Fig. 4.5, com a razão L^n/L^0 ao longo das iterações.