

*Capítulo 5.*

**TERMOELASTICIDADE LINEAR 1D PERMANENTE**

Neste capítulo, o modelo matemático é composto por duas equações diferenciais:

- 1<sup>a</sup>) problema térmico; e
- 2<sup>a</sup>) problema elástico.

Consideraremos:

- coordenadas cartesianas unidimensionais;
- regime permanente;
- propriedades constantes;
- condições de contorno do tipo Dirichlet; e
- malhas uniformes.

## 5.1 MODELO MATEMÁTICO

### 5.1.1 Problema Térmico

$$\frac{d^2T}{dX^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (5.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} T(0) = T_0 \\ T(L) = T_L \end{array} \right\} \text{ condições de contorno de Dirichlet} \quad (5.2)$$

Este problema é um caso simplificado daquele apresentado na seção 3.1. Para isso, basta considerar que

$$S = -\frac{\dot{q}}{k} = \text{constante} \quad (5.3)$$

onde

$$\dot{q} = \text{taxa de geração de calor por unidade de volume (W/m}^3\text{)}$$

$$k = \text{condutividade térmica do sólido (W/m.K)}$$

$$L = \text{comprimento do domínio de cálculo (m)}$$

Este problema pode representar, por exemplo, a condução de calor numa barra metálica através da qual passa uma corrente elétrica que dissipa calor por efeito Joule.

### 5.1.2 Problema Elástico

Será considerado um estado unidimensional de tensões ( $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ ) isto é,

$$[\sigma] = [\sigma_x] \tag{5.4}$$

Portanto,

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \tag{5.5}$$

onde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são as tensões nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente. Neste caso, as deformações ( $\varepsilon$ ) (adimensionais) são dadas por

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_x] \tag{5.6}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0 \tag{5.7}$$

onde

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} \tag{5.8}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y} \tag{5.9}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} \quad (5.10)$$

com  $u$ ,  $v$  e  $w$  representando os deslocamentos (m) nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente.

Para este problema unidimensional, as equações de equilíbrio estático (balanço de forças) se resumem a

$$\frac{d\sigma_x}{dX} = 0 \quad (5.11)$$

A partir da lei de Hooke para materiais isotrópicos, homogêneos e elásticos, com efeito térmico, obtém-se

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x - \alpha\theta) \quad (5.12)$$

onde

$E$  = módulo de elasticidade, módulo elástico ou módulo de Young ( $\text{N/m}^2$ )

$\alpha$  = coeficiente de expansão térmica ( $\text{K}^{-1}$ )

$\theta$  = diferença de temperatura em relação a um valor de referência (K)

$$\theta = T - T_0 \quad (5.13)$$

Com as Eqs. (5.8) e (5.12) em (5.11), pode-se obter a equação do deslocamento ( $u$ ) na direção  $X$ :

$$\frac{d^2u}{dX^2} - \alpha \frac{dT}{dX} = 0 \quad (5.14)$$

O modelo matemático é fechado considerando-se as seguintes condições de contorno de Dirichlet:

$$u(0) = u(L) = 0 \quad (5.15)$$

O problema termoelástico consiste em resolver a Eq. (5.14). Mas como ela depende da temperatura, primeiro é necessário resolver a Eq. (5.1). Caso seja de interesse, posteriormente,

pode-se obter a tensão ( $\sigma_x$ ) e a deformação ( $\varepsilon_x$ ) a partir das Eqs. (5.12) e (5.8). As equações da teoria da elasticidade linear tridimensional, com efeito térmico, podem ser obtidas no apêndice C do livro de Huebner *et al.* (2001).

### 5.1.3 Variáveis de Interesse

- $T$ , a partir da Eq. (5.1)
  - $u$ , a partir da Eq. (5.14)
- } variáveis primárias
- 
- $\varepsilon_x$ , a partir da Eq. (5.8)
  - $\sigma_x$ , a partir da Eq. (5.12)
  - $F_0$  e  $F_L$
- } variáveis secundárias

onde  $F_0$  e  $F_L$  são as forças que atuam em  $X=0$  e  $X=L$ , na direção  $X$ , dadas por

$$F_0 = (\sigma_x)_0 A_x \quad (5.16)$$

$$F_L = (\sigma_x)_L A_x \quad (5.17)$$

onde  $A_x$  é a área da seção transversal à direção  $X$  do sólido, que é considerada constante.

## 5.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Para  $L=1$ , a solução analítica do problema térmico, Eqs. (5.1) e (5.2), resulta em

$$T = T_0 + (T_L - T_0) X + \frac{\dot{q}}{2k} (1 - X) X \quad (5.18)$$

ou, com a definição da Eq. (5.13),

$$\theta = (T_L - T_0) X + \frac{\dot{q}}{2k} (1 - X) X \quad (5.19)$$

Com a Eq. (5.19), a solução analítica do problema elástico, Eqs. (5.14) e (5.15), resulta em

$$u = \frac{\alpha X}{6} \left[ 3 \left( T_L - T_0 + \frac{\dot{q}}{2k} \right) (X-1) - \frac{\dot{q}}{k} (X^2 - 1) \right] \quad (5.20)$$

Deve-se notar que mesmo se  $\dot{q} = 0$ ,  $u \neq 0$  se  $T_0 \neq T_L$ . Com a Eq. (5.20) em (5.8),

$$\varepsilon_x = \frac{\alpha}{6} \left[ 3 \left( T_L - T_0 + \frac{\dot{q}}{2k} \right) (2X-1) - \frac{\dot{q}}{k} (3X^2 - 1) \right] \quad (5.21)$$

Com as Eqs. (5.19) e (5.21) em (5.12), obtém-se  $\sigma_x \cdot E$ , com as Eqs. (5.16) e (5.17),

$$F_L = F_0 = \frac{E \alpha A_x}{6} \left[ 3 (T_0 - T_L) - \frac{\dot{q}}{2k} \right] \quad (5.22)$$

### 5.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA

A discretização do problema térmico, Eq. (5.1), pode ser vista na seção 3.1.4. Entretanto, deve-se considerar que

$$S_0 = -\frac{\dot{q}}{k}, \quad S_1 = S_2 = 0 \quad (5.23)$$

A discretização do problema elástico, Eq. (5.14), pode ser obtida com a substituição das aproximações numéricas dadas na Eq. (2.26), para a derivada de 1ª ordem de  $T$ , e na Eq. (2.38), para a derivada de 2ª ordem de  $u$ . Isso resulta em

$$\frac{(u_W + u_E - 2u_P)}{h^2} - \alpha \frac{(T_E - T_W)}{2h} = 0 \quad (5.24)$$

ou

$$2u_P = u_W + u_E - \frac{\alpha}{2} (T_E - T_W) h \quad (5.25)$$

ou, ainda,

$$a_P u_P = a_W u_W + a_E u_E + b_P \quad (5.26)$$

A Eq. (5.26) é válida para a variável  $u$  em cada nó  $P$  interno da malha, isto é,  $P = 2, 3, \dots, N-1$ . Por comparação com a Eq. (5.25), nota-se que seus coeficientes e termos fontes são dados por

$$\left. \begin{aligned} a_P &= 2, & a_W &= a_E = 1, & b_P &= -\frac{\alpha}{2}(T_E - T_W)h \\ W &= P - 1, & E &= P + 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

sendo que a Fig. 3.2 também se aplica aqui.

No caso dos dois contornos, isto é,  $P = 1$  e  $P = N$ , para que sejam satisfeitas as condições de contorno da Eq. (5.15), deve-se usar

$$a_P = 1, \quad a_W = a_E = b_P = 0 \quad (5.28)$$

Após a obtenção da solução numérica de  $u$ , isto é, após a solução do sistema de Eqs. (3.16) ou (4.31), a deformação ( $\varepsilon_x$ ) pode ser obtida pela aproximação numérica da Eq. (5.8). No caso dos nós internos da malha ( $P = 2, 3, \dots, N-1$ ), pode-se usar a aproximação dada na Eq. (2.26), o que resulta em

$$(\varepsilon_x)_P = \frac{(u_E - u_W)}{2h} \quad (P = 2, 3, \dots, N-1) \quad (5.29)$$

Para manter a mesma ordem ( $2^a$ ) de aproximação da Eq. (5.29), deve-se usar no contorno esquerdo a Eq. (2.29),

$$(\varepsilon_x)_1 = \frac{(4u_2 - 3u_1 - u_3)}{2h} \quad (5.30)$$

e no contorno direito, a Eq.(2.32), isto é,

$$(\varepsilon_x)_N = \frac{(3u_N + u_{N-2} - 4u_{N-1})}{2h} \quad (5.31)$$

A tensão pode ser obtida com a substituição da Eq. (5.13) em (5.12). A discretização desta última resulta em

$$(\sigma_x)_P = E [(\varepsilon_x)_P - \alpha (T_P - T_0)] \quad (5.32)$$

E as forças podem ser obtidas com a Eq. (5.32) nas Eqs. (5.16) e (5.17).

### 5.3.1 Algoritmo de Solução

Um possível algoritmo para resolver o problema termoelástico apresentado neste capítulo é o seguinte:

- 1) Ler os dados do problema:  $T_0, T_L, \dot{q}, k, L, N, \alpha, E, A_x$ .
- 2) Discretizar o domínio de cálculo, isto é, obter  $h$  da Eq. (2.4).
- 3) Calcular os coeficientes  $(a_p, a_w, a_e)$  e os termos fontes  $(b_p)$ , do sistema de equações do problema térmico, com as Eqs. (3.14), (3.19) e (3.20).
- 4) Resolver o problema térmico ( $T_p$ ) com o método *TDMA*, descrito na seção 3.2.1.
- 5) Calcular os coeficientes  $(a_p, a_w, a_e)$  e os termos fontes  $(b_p)$ , do sistema de equações do problema elástico, com as Eqs. (5.27) e (5.28).
- 6) Resolver o problema elástico ( $u_p$ ) com o método *TDMA*.
- 7) Calcular as deformações  $(\varepsilon_x)$  com as Eqs. (5.29) a (5.31).
- 8) Calcular as tensões  $(\sigma_x)$  com a Eq. (5.32).
- 9) Calcular as forças nos contornos com as Eqs. (5.16) e (5.17).
- 10) Gravar os resultados de interesse.
- 11) Visualizar os campos de  $T, u, \varepsilon_x, \sigma_x$  versus  $X$ .

## 5.4 EXERCÍCIOS

### Exercício 5.1

Implemente um programa computacional para resolver, analiticamente e numericamente, o problema termoelástico 1Dp do capítulo 5. Adote o algoritmo descrito na seção 5.3.1.

Use os seguintes dados:  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$   $T_L = 30 \text{ }^\circ\text{C}$   $\dot{q} = 5 \times 10^4 \text{ W/m}^3$

$$\begin{array}{lll} k = 401 \text{ W/m.K} & L = 1 \text{ m} & N = 21 \text{ nós} \\ \alpha = 16 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1} & E = 110 \times 10^9 \text{ N/m} & A_x = 10^{-4} \text{ m}^2 \end{array}$$

Resultados a apresentar:

- 1) Um gráfico de  $T_P$  versus  $X_P$  com as soluções analítica e numérica.
- 2) Um gráfico de  $u_P$  versus  $X_P$  com as soluções analítica e numérica.
- 3) Um gráfico de  $(\varepsilon_x)_P$  versus  $X_P$  com as soluções analítica e numérica.
- 4) Um gráfico de  $(\sigma_x)_P$  versus  $X_P$  com as soluções analítica e numérica.
- 5) Soluções analítica e numérica de  $F_0$ .

### **Exercício 5.2**

Através de uma estimativa de erro *a priori*, determine as ordens verdadeiras e assintóticas do erro de truncamento das seguintes equações diferenciais discretizadas:

- 1) Eq. (3.11), da seção 3.1, para os dados do exercício 5.1
- 2) Eq. (5.24)
- 3) Eq. (5.29)
- 4) Eq. (5.32)