



UM ESTUDO TEÓRICO DO FATOR DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA VIA LFA DOS SOLVERS LINHA EM UM PROBLEMA DE DIFUSÃO ANISOTRÓPICO

Michely Laís de Oliveira

michely-lais@hotmail.com

Universidade Federal do Paraná

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE), 81.531-980, Curitiba, Paraná, Brasil.

Marcio Augusto Villela Pinto

Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves

marcio_villela@yahoo.com.br

simone.tg@ufpr.br

Universidade Federal do Paraná

Departamento de Engenharia Mecânica, 81.531-980, Curitiba, Paraná, Brasil.

Grazielli Vassoler Rutz

grazielli.vassoler@ifsc.edu.br

Instituto Federal de Santa Catarina – Chapecó, Brasil.

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE), 81.531-980, Curitiba, Paraná, Brasil.

Resumo. *Estudos de problemas que envolvem anisotropia física são comuns em engenharia. Alguns destes problemas são representados por modelos matemáticos onde fenômenos como a condutividade térmica dependem da direção. Com o intuito de acelerar a convergência dos métodos iterativos empregados na resolução utilizou-se o método multigrid. Com a Análise de Fourier Local (Local Fourier Analysis, LFA) foi analisado o fator de convergência assintótica do multigrid, o qual foi determinado numericamente (via LFA) e experimentalmente (com o auxílio do computador). O modelo matemático estudado foi a equação de difusão 2D anisotrópica. A discretização da equação foi obtida através do método de diferenças finitas (MDF) por meio do esquema CDS (Central Differencing Scheme). O multigrid foi empregado*

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering
P.O. Faria, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, W.J.S. Gomes, M. Noronha (Editores), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil,
November 5-8, 2017.

com o esquema CS (Correction Scheme) e com os solvers Gauss-Seidel lexicográfico (GS-LEX) e Red-Black (GS-RB), Gauss-Seidel linha na direção x (x -linha-GS) e Gauss-Seidel zebra na direção x (x -zebra-GS). Para cada solver foram analisados os seguintes parâmetros: fator de convergência assintótica, tempo de CPU (t_{CPU}) e número de ciclos V . Assim, foi possível confirmar a importância da LFA, pois os fatores de convergência assintótica calculados numericamente e experimentalmente estão em concordância. Observou-se que, dentre os solvers estudados, o x -zebra-GS possui melhor fator de convergência assintótica.

Palavras-chave: *Anisotropia física, Problema Difusivo, Método de Diferenças Finitas, Multigrid, Análise Local de Fourier.*

1 INTRODUÇÃO

Simulações numéricas em problemas e aplicações em engenharia são destaque na área da pesquisa e no desenvolvimento da tecnologia. Para obterem-se bons resultados em CFD é necessário diminuir o erro de discretização, implicando no uso de malhas mais refinadas, aumentando o custo computacional. Isto ocorre devido ao fato de que os problemas que se deseja resolver geralmente envolvem muitas variáveis, além de matrizes esparsas (Fortuna, 2000).

Neste estudo, o método de discretização empregado é o MDF (Ferziger e Peric, 2002), o qual tem como objetivo aproximar cada termo do modelo matemático por meio de expressões algébricas, em cada ponto ou nó da malha, transformando-o em um sistema linear de equações algébricas do tipo:

$$AT = f, \tag{1}$$

em que A é a matriz dos coeficientes de tamanho $N \times N$, T é a temperatura e f o vetor dos termos independentes, ou termo fonte.

Para solucionar a Eq. (1) podem ser empregados métodos iterativos, os quais, partindo de uma estimativa inicial, após sucessivas aproximações podem ou não convergir para uma solução. Por meio da análise espectral dos erros percebe-se que apenas os componentes de alta frequência (ou oscilatórios) do erro são reduzidos com rapidez nos *solvers* iterativos, deixando os componentes de baixa frequência inalterados (Briggs et al., 2000; Trottenberg et al., 2001). Devido a isso, o *multigrid* consiste em usar um conjunto de malhas com diferentes graus de refinamento, percorridos ao longo do processo iterativo. De tal modo que, as diferentes componentes do erro são reduzidas rapidamente, acelerando a convergência dos métodos iterativos.

O método *multigrid* é utilizado para resolver diversos tipos de sistemas (lineares ou não) e problemas (isotrópicos ou anisotrópicos). Porém, alguns estudos, apresentados por Vassoler-Rutz e Pinto (2016) mostram que o *multigrid* não tem sido muito eficiente para problemas com fortes anisotropias.

Problemas anisotrópicos (anisotropia física ou geométrica) são comuns na engenharia. A anisotropia física (ou dos coeficientes) ocorre, por exemplo, quando a equação diferencial possui os coeficientes constantes nas derivadas parciais, mas distintos nas direções coordenadas, ou seja, em uma das direções tem-se o coeficiente de anisotropia (ε) distinto da unidade. Neste caso a distância entre os nós é igual em ambas as direções, $h = h_x = h_y$. Um exemplo de anisotropia física ocorre no estudo que envolve um material no qual a condução de calor depende da direção.

A anisotropia geométrica pode surgir a partir da discretização de malhas, onde as distâncias entre os nós são constantes, h_x e h_y , mas distintos nas direções coordenadas. A anisotropia pode ser analisada pela razão de aspecto, $Q = h_x/h_y$. Para $Q = 1$ o problema é isotrópico (Briggs et al., 2000). Se $0 < Q \ll 1$ ou $Q \gg 1$ o problema é denominado

anisotrópico. Um exemplo é um problema de camada limite, onde a razão de aspecto pode ser da ordem 10^3 , 10^4 ou mais (Wesseling e Oosterlee, 2001).

Nos casos em que os coeficientes das equações diferenciais, distintos da unidade e também distintos entre si, geram anisotropia física, a eficiência dos métodos iterativos é reduzida (Briggs et al., 2000; Trottenberg et al., 2001).

Diversos trabalhos encontrados na literatura envolvem o *multigrid* em problemas anisotrópicos. Wienands e Joppich (2005) calcularam o fator de convergência do *multigrid* por meio de um *software* que desenvolve uma LFA em problemas com difusão anisotrópica. Eles fizeram esta análise com diferentes *solvers* e operadores de restrição e prolongação.

Pinto e Marchi (2006) analisaram problemas com anisotropia geométrica. Com a equação de Laplace bidimensional aplicada a algoritmos com diferentes tipos de engrossamento. Constataram que o algoritmo “semi-engrossamento seguido de engrossamento padrão” com suavizador GS-LEX é eficiente para as anisotropias estudadas.

Oliveira et al. (2012) apresentaram um estudo sobre anisotropia geométrica envolvendo diversas malhas e razões de aspecto. Também estudaram alguns parâmetros do *multigrid* tais como: *solvers*, restrição, número de níveis e número de iterações internas, além de diversos algoritmos de engrossamento. Neste estudo, afirmam que o semi-engrossamento parcial (PW) teve um bom desempenho.

Vassoler-Rutz et al. (2015) estudaram o resultado da anisotropia física com o uso do *multigrid* para dois problemas de difusão anisotrópica. Empregaram o esquema de correção FAS, ciclo V, os *solvers Modified Strongly Implicit* (MSI) e Gauss-Seidel (GS). Com esta análise concluíram que, para fortes anisotropias, a ordem de complexidade do *multigrid* torna-se ruim.

Vassoler-Rutz e Pinto (2016) analisaram o efeito da anisotropia física sobre o método *multigrid* no problema com anisotropia difusiva. Calcularam o fator de convergência e fator de suavização via LFA, e apresentaram uma análise de complexidade. Empregaram o esquema de correção CS, ciclo V, os *solvers* GS-RB e GS-LEX. Concluíram que os resultados obtidos pela LFA estão de acordo com os obtidos mediante a análise de complexidade e que, para fortes anisotropias, a ordem de complexidade do *multigrid* torna-se ruim em ambos os *solvers* analisados.

O desempenho do *multigrid* está diretamente ligado aos componentes *multigrid* escolhidos, como níveis de malhas, o *solver* e o número de iterações do *solver* em cada ciclo. Porém, esta escolha geralmente é difícil, uma vez que pequenas alterações no método influenciam na taxa de convergência do algoritmo. A LFA fornece estimativas *a priori* para as taxas de convergência de seus componentes e que permitem antecipar qual será o desempenho do *multigrid*.

Uma introdução sobre LFA pode ser encontrada em Stuben e Trottenberg (1982) e uma abordagem mais completa em Wesseling (1992), Trottenberg et al. (2001) e Wienands e Joppich (2005).

Swanson et al. (2007) utilizaram a LFA para comparar as propriedades de suavização do esquema Runge-Kutta implícito com as de um esquema Runge-Kutta padrão para resolver as equações de Euler e Navier-Stokes.

Oosterlee e Gaspar (2008) aplicaram LFA às equações de poroelasticidade, que é um sistema de equações diferenciais parciais transiente.

Um estudo recente de LFA em problemas transientes foi feita em Franco et al. (2018). Neste trabalho, tal análise foi empregada para obter o valor crítico do parâmetro que representa o grau de anisotropia espaço/tempo para a equação de Fourier 1D e 2D.

No presente trabalho o parâmetro do *multigrid* analisado foi o fator de convergência assintótica, o qual foi determinado de duas maneiras: numérico (teórico medido numericamente via LFA) e experimental (calculado experimentalmente, com o auxílio do computador). O modelo matemático considerado foi a equação de difusão bidimensional, que apresenta anisotropia física e é denotado neste texto por anisotropia difusiva. Para a discretização das equações foi utilizado o esquema de segunda ordem CDS nos termos difusivos.

Para a obtenção do fator de convergência assintótica (ρ_{2g}), os sistemas de equações resultantes da discretização foram resolvidos utilizando os *solvers* GS-LEX, GS-RB, x-linha-GS, x-zebra-GS (Briggs et al., 2000). Os operadores de restrição e prolongação utilizados foram Ponderação Completa (FW) e Bilinear, respectivamente.

Os dados obtidos via LFA foram utilizados para analisar a influência da anisotropia física sobre o tempo de CPU (t_{CPU}) para alguns parâmetros do *multigrid* geométrico, tais como: número de incógnitas (N), fator de convergência para diferentes *solvers* e diferentes anisotropias.

2 MODELO MATEMÁTICO E DISCRETIZAÇÃO

O modelo matemático considerado refere-se ao problema de anisotropia difusiva, dado pela equação de difusão bidimensional (Briggs et al., 2000):

$$\begin{cases} -T_{xx} - \varepsilon T_{yy} = S \\ T(0, y) = T(x, 0) = T(x, 1) = T(1, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

onde, T_{xx} e T_{yy} são as derivadas segundas de T em relação a x e y , respectivamente, e $\varepsilon > 0$.

O termo fonte S e a solução analítica T , são dados por:

$$S = 2[(1 - 6x^2)y^2(1 - y^2) + \varepsilon(1 - 6y^2)x^2(1 - x^2)] \quad (3)$$

$$T(x, y) = (x^2 - x^4)(y^4 - y^2) \quad (4)$$

No problema apresentado o domínio de cálculo utilizado é dado por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ e foram empregados malhas uniformes ($N = N_x = N_y$), onde, N_x e N_y denotam o número de nós nas direções coordenadas x e y , respectivamente, incluindo os contornos.

A discretização das equações foi feita pelo MDF a partir do esquema CDS, de segunda ordem, obtendo:

$$-\left(\frac{T_{i-1,j}-2T_{i,j}+T_{i+1,j}}{(h_x)^2}\right) - \varepsilon \left(\frac{T_{i,j-1}-2T_{i,j}-T_{i,j+1}}{(h_y)^2}\right) = S. \quad (5)$$

A discretização da Eq. (2) para os nós internos resulta em:

$$a_P T_P + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S = b_p, \quad (6)$$

onde T é a incógnita, $P = 2, \dots, N - 1$ é o número de cada incógnita, $W = P - N_x$, $E = P + N_x$, $N = P + N_y$ e $S = P - N_y$.

Considerando $h_x = \frac{1}{N_x}$ e $h_y = \frac{1}{N_y}$, tem-se que:

$$a_P = \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2\varepsilon}{h_y^2}\right), a_W = a_E = -\frac{1}{h_x^2}, a_N = a_S = -\frac{\varepsilon}{h_y^2}, b_P = S. \quad (7)$$

Sendo que nos contornos tem-se $a_P = 1$, $a_W = a_S = a_N = a_E = 0$.

3 MÉTODO MULTIGRID

Para reduzir o erro de discretização, são utilizadas malhas muito refinadas, o que gera sistemas lineares de grande porte. A solução destes sistemas por métodos iterativos demanda um alto custo computacional. Assim, o *multigrid* é um método alternativo utilizado para acelerar a taxa de convergência destes problemas (Briggs et al., 2000), sendo eficiente na redução do erro.

O *multigrid* tem como princípios básicos a propriedade de suavização e correção de malha grossa. É uma técnica que envolve a transferência de informações de um problema para várias malhas, desde a mais fina até a mais grossa (Pinto e Marchi, 2006).

A Eq. (1) foi resolvida com método *multigrid*, mediante o esquema CS, ciclo V e estimativa inicial nula (Briggs, et al., 2000; Trottenberg et al., 2001).

Considerando malhas uniformes, a razão de engrossamento das malhas é definida como $r = p/q$, onde q mede o espaçamento entre os nós da malha fina (Ω^h) e p mede o espaçamento entre os nós da malha imediatamente mais grossa (Ω^H). Neste trabalho foi utilizado $r = 2$ (engrossamento padrão) (Wesseling e Oosterlee, 2001). Os sistemas de equações obtidos da discretização foram resolvidos pelos solvers GS-LEX, GS-RB, x-linha-GS e x-zebra-GS.

O resíduo foi calculado pela expressão a seguir:

$$R^n = b - AT^n, \quad (8)$$

onde T^n é a solução da incógnita na iteração n .

Como critério de parada do processo iterativo foi utilizado a norma infinito do resíduo adimensionalizada pela norma infinito do resíduo na estimativa inicial, isto é, $\|R^n\|_\infty/\|R^0\|_\infty$, em que o termo R^n é o resíduo na iteração n e R^0 é o resíduo na estimativa inicial. Assim, o processo iterativo é interrompido após a norma ser menor ou igual um valor estimado, denominado tolerância tol , ou seja, $\|R^n\|_\infty/\|R^0\|_\infty \leq tol$. A norma infinito é definida por (Burden e Faires, 2008):

$$\|R^n\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |R_i|, \quad (9)$$

onde R_i é a i -ésima componente do resíduo.

Os algoritmos foram implementados na linguagem Fortran 2003 utilizando o aplicativo Intel 9.1 Visual Fortran e precisão quádrupla. Os testes foram realizados em um computador com processador IntelCorei7 2.6 GHz, 8 GB de RAM e sistema operacional Windows 10, com 64 bits.

4 ANÁLISE DE FOURIER LOCAL

O objetivo da LFA é determinar os fatores de suavização de S_h e de convergência para o algoritmo de duas malhas (Trottenberg et al., 2001). O fator de suavização $\mu(S_h) = \mu_{2g}$ é o raio espectral do operador de suavização, estimando o quanto são reduzidas as componentes de altas frequências do erro do esquema de relaxação (*solver*).

O fator de convergência assintótica $\rho(M_h^{2h}) = \rho_{2g}$ é o raio espectral da matriz M_h^{2h} (Trottenberg et al., 2001), sendo que $M_h^{2h} := S_h^{v_2} K_h^{2h} S_h^{v_1}$ é operador de duas malhas. Tomando S_h como operador de suavização, v_1 e v_2 o número de pré-suavização e pós-suavização, respectivamente. O operador de correção de malha grossa é dado por $K_h^{2h} = I_h - I_{2h}^h (L_{2h})^{-1} I_h^{2h} L_h$, onde I_{2h}^h, I_h^{2h} são os operadores de transferência, L_{2h}, L_h são operadores Laplacianos discretos e I_h o operador identidade na malha fina. O resultado obtido por este fator mostra o comportamento da convergência assintótica do método *multigrid* para algoritmo de duas malhas.

Neste trabalho, utilizou-se a LFA para determinar o fator de convergência assintótica do método multigrid, utilizando os *solvers* GS-LEX, GS-RB, x-linha-GS e x-zebra-GS.

Para o *solver* GS-LEX, por exemplo, o operador I_{2h}^h empregado foi o bilinear, representado por:

$$I_{2h}^h = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 + \cos(\theta_1))(1 + \cos(\theta_2)) \\ (1 - \cos(\theta_1))(1 - \cos(\theta_2)) \\ (1 - \cos(\theta_1))(1 + \cos(\theta_2)) \\ (1 + \cos(\theta_1))(1 - \cos(\theta_2)) \end{bmatrix}$$

em que $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in T^{low} = [\pi/2, \pi/2]^2$. O operador I_h^{2h} empregado foi $I_h^{2h} = I_{2h}^h{}^T$. Os operadores L_h e L_{2h} são representados por:

$$L_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} (2 + 2\varepsilon) - 2(\varepsilon \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) \\ (2 + 2\varepsilon) + 2(\varepsilon \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) \\ (2 + 2\varepsilon) - 2(\varepsilon \cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) \\ (2 + 2\varepsilon) + 2(\varepsilon \cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) \end{bmatrix}$$

$$L_{2h} = \frac{(2+2\varepsilon)-2(\varepsilon\cos(2\theta_1)+\cos(2\theta_2))}{2h^2}$$

O operador de suavização S_h é dado por:

$$S_h = \begin{bmatrix} S(\theta_1, \theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(\bar{\theta}_1, \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(\theta_1, \bar{\theta}_2) \end{bmatrix},$$

onde, $\bar{\theta}_i = \begin{cases} \theta_i + \pi & \text{se } \theta_i < 0 \\ \theta_i - \pi & \text{se } \theta_i \geq 0 \end{cases}$ e $S(x, y) = \varepsilon e^{ix} + e^{iy} / (-2 - 2\varepsilon + \varepsilon e^{-ix} + e^{-iy})$.

5 VERIFICAÇÃO DOS CÓDIGOS

Nesta sessão, são apresentados os testes para a verificação dos códigos que envolvem os *solvers* GS-LEX, GS-RB, x-linha-GS e x-zebra-GS. Os processos de verificação do código apresentam o grau de confiabilidade das soluções numéricas (Gonçalves, 2013).

- Erro de discretização

O comportamento do erro de discretização mediante o refino da malha é uma das análises para a verificação das soluções numéricas. Neste caso, espera-se que quando o espaçamento (h) da malha tende a zero o erro tenha o mesmo comportamento. A Fig. 1 apresenta o erro de discretização relativo aos *solvers* estudados.

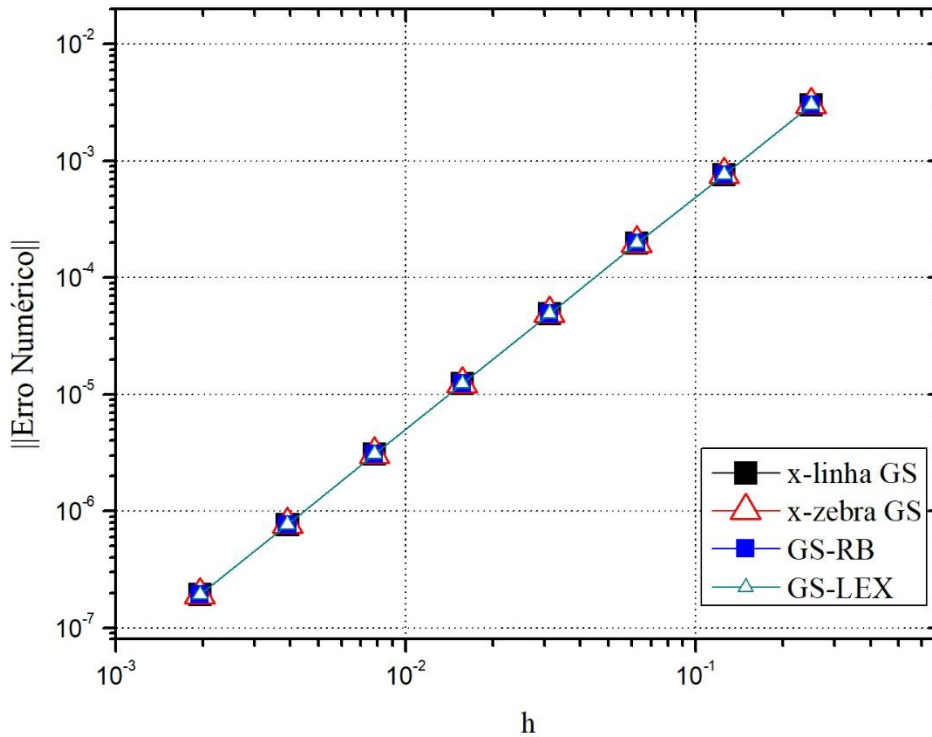


Figura 1. Erro numérico para *multigrid* para os solvers x-linha-GS, x-zebra-GS, GS-RB e GS-LEX

A partir dos resultados analisados, ilustrados na Fig. 1, o comportamento do erro de discretização está de acordo com o esperado. Ou seja, o erro de discretização diminui com o refino da malha, para todos os solvers estudados.

- Ordem aparente e ordem efetiva

Segundo Marchi (2001), para verificar a solução numérica pode-se utilizar o estimador de Richardson baseado nas ordens aparente e efetiva do erro numérico, dadas respectivamente por:

$$p_U = \frac{\log(\frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2})}{\log(q)} \quad \text{e} \quad p_E = \frac{\log(\frac{\Phi - \phi_2}{\Phi - \phi_1})}{\log(q)}, \quad (10)$$

onde, ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 representam três soluções em três malhas distintas com elementos de tamanho h_1 , h_2 e h_3 , respectivamente, Φ é a solução exata e razão de refino $q = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_3}{h_2}$. Considerando-se como variável de interesse o erro numérico ($\|Erro\|_\infty$), foram obtidos os seguintes resultados, os quais podem ser visualizados na Fig. 2.

Como pode ser observado nos gráficos apresentados na Fig. 2, as ordens de todas as variáveis de interesse referentes aos solvers estudados tendem ao valor assintótico, mediante o refino da malha. Em todos os casos, as ordens efetiva e aparente do erro de discretização tendem

à sua ordem assintótica $p_L = 2$. Para os problemas com anisotropia os resultados obtidos apresentaram comportamento similar ao apresentado nos gráficos da Fig. 2.

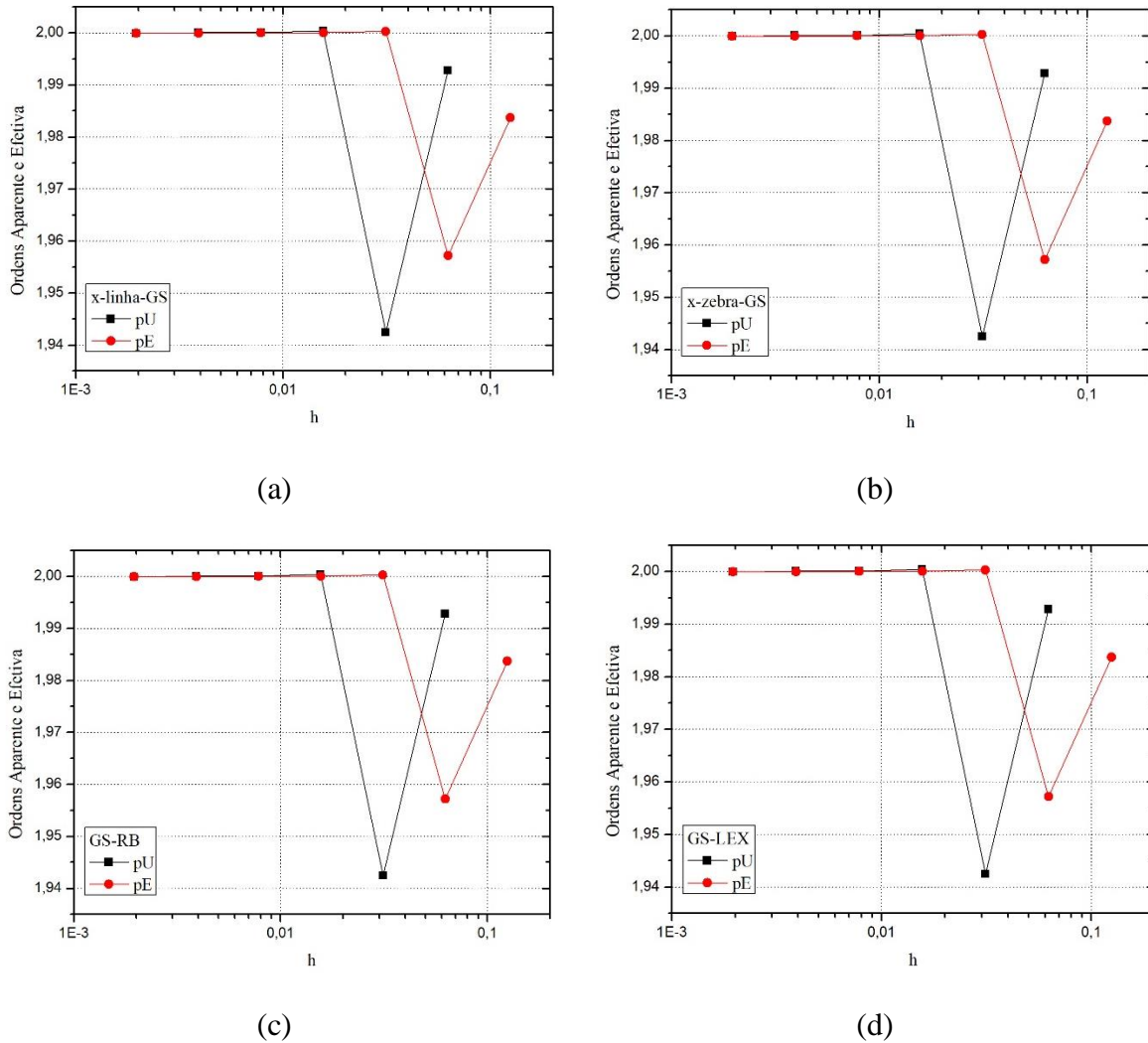


Figura 2. Ordem efetiva e aparente para a norma infinito com $\varepsilon = 1$ e (a) solvers x-linha-GS, (b) x-zebra-GS, (c) GS-RB e (d) GS-LEX

6 RESULTADOS

Para obter os resultados a seguir foram realizadas diversas simulações com número de iterações internas $\nu = \nu_1 + \nu_2 = 2$, critério de parada $tol = 10^{-10}$ e número de níveis máximo (L). Para a análise da influência do número de variáveis sobre o t_{CPU} e o número de ciclos V em cada solver, utilizou-se malhas com 16×16 a 2048×2048 . Os resultados obtidos para o

fator de convergência assintótica são relativos à malha 1024×1024 . É apresentada também uma comparação entre o desempenho dos *solvers* x-linha-GS, x-zebra-GS, GS-RB e GS-LEX.

- Comparação do número de ciclos V em cada *solver*

O número de ciclos V , para cada tamanho de problema e cada *solver*, é apresentado nos gráficos da Fig. 3.

Nota-se que na Fig. 3 (a), os *solvers* x-linha-GS e x-zebra-GS são mais eficientes, em relação aos *solvers* GS-RB e GS-LEX. Para o problema isotrópico, Fig. 3 (b), os quatro *solvers* convergem rapidamente, pode-se perceber ainda que o número de ciclos V é grosseiramente constante em relação a N . Já na Fig. 3 (c), problemas anisotrópicos, com fortes anisotropias ($\varepsilon \rightarrow \infty$), todos os *solvers* necessitam de muitos ciclos V para o problema convergir.

-Número de variáveis (N)

Para avaliar o efeito do número de incógnitas sobre o t_{CPU} foram realizadas diversas simulações considerando-se problemas isotrópicos ($\varepsilon = 1$) e anisotrópicos ($\varepsilon = 0,01$ e $\varepsilon = 100$). Os resultados obtidos podem ser observados Fig. 4.

Pode-se observar nos gráficos da Fig. 4 que no problema anisotrópico ($\varepsilon = 0,01$) o t_{CPU} é menor para o *solver* x-zebra-GS, tornando-o mais eficiente em relação aos demais *solvers* estudados neste problema. Já para o problema isotrópico ($\varepsilon = 1$) e anisotrópico ($\varepsilon = 100$) o t_{CPU} é menor para o GS-RB. No entanto, isto ocorre devido ao GS-RB ser um *solver* do tipo ponto a ponto, o qual demanda menor quantidade de cálculos. Conclui-se que, independente do ε em questão, à medida que N aumenta, o t_{CPU} também aumenta.

Como para $\varepsilon \rightarrow 0$ o *solver* x-zebra-GS apresentou bons resultados, tanto de t_{CPU} quanto fatores de convergência assintótica, para os diversos tamanhos de problemas estudados, o próximo teste será considerado apenas tal *solver*.

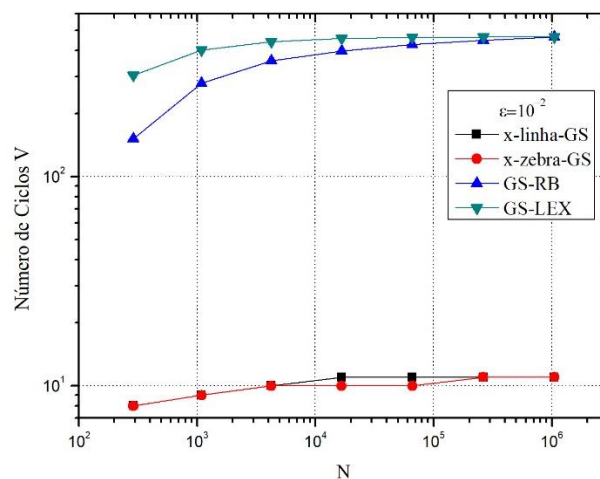
Com os resultados do t_{CPU} obtidos com o *solver* x-zebra-GS foi feito um ajuste geométrico do tipo:

$$t_{CPU} = cN^p, \tag{11}$$

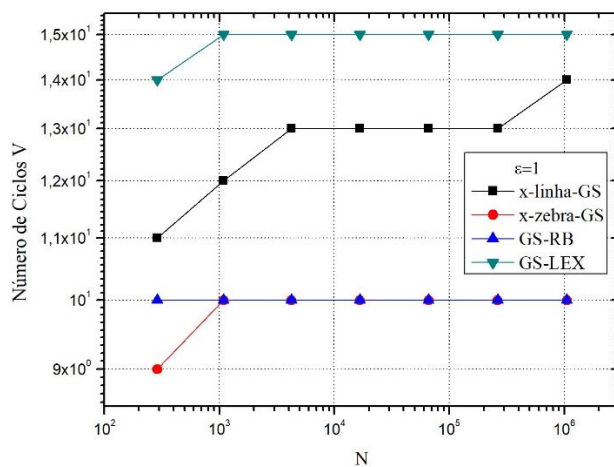
onde, c é o coeficiente relativo ao método e ao *solver*, p representa a ordem de complexidade do *solver* associado ao *multigrid* ou a inclinação da curva de ajuste e N é a dimensão do problema. Para o método *multigrid* o valor ideal é $p = 1$, o que indica que o t_{CPU} cresce linearmente com o aumento de N (Vassoler-Rutz, 2016).

Os valores obtidos para p e c , mediante o ajuste, para cada problema anisotrópico e o *solver* x-zebra-GS são mostrados na Tabela 1.

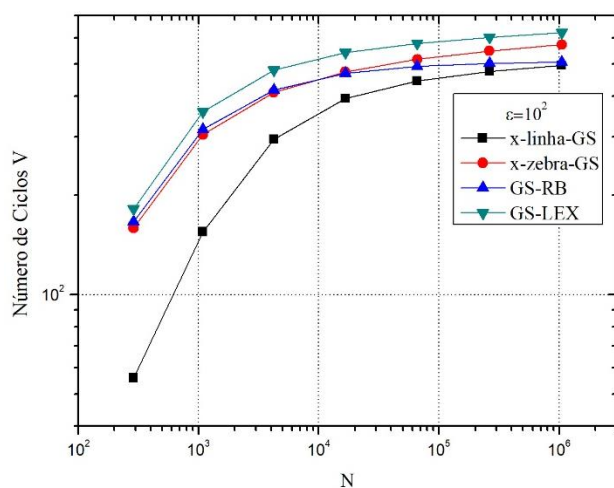
Mediante os resultados da Tabela 1 observa-se que os valores encontrados para o coeficiente p estão de acordo com os valores teóricos, para os casos estudados. Estes resultados permitem concluir que o método *multigrid* foi implementado corretamente. Pelos resultados apresentados nesta tabela, nota-se ainda que o método *multigrid* apresentou melhor desempenho para o problema isotrópico, pois neste caso a ordem de complexidade se aproxima da unidade. Comparando os problemas anisotrópicos, a ordem de complexidade foi melhor ($p \approx 1$) para $\varepsilon \rightarrow 0$, confirmando a informação apresenta na Fig. 4.



(a)

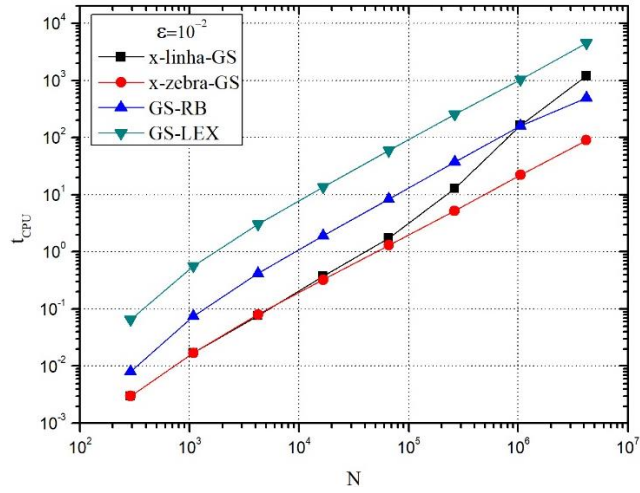


(b)

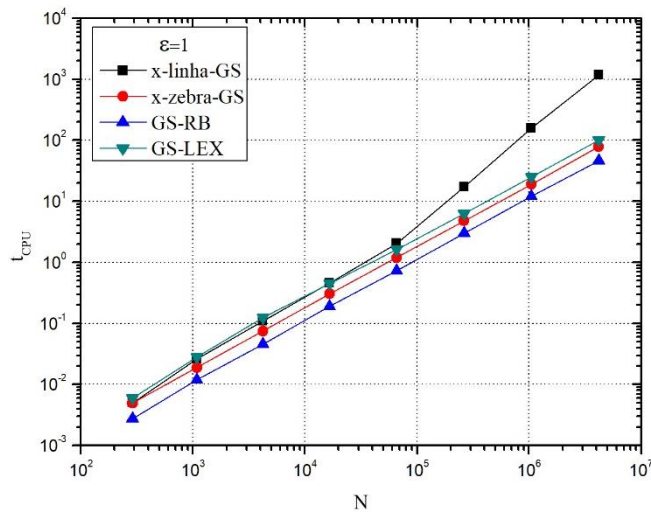


(c)

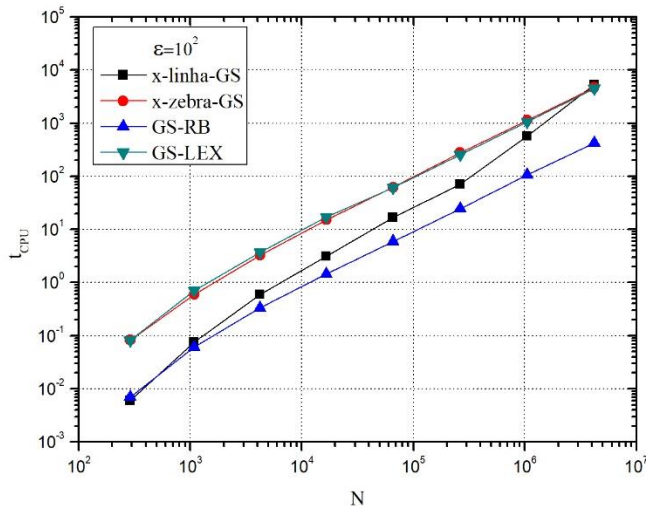
Figura 3 : Número de ciclos V versus número de nós para (a) $\varepsilon = 0,01$, (b) $\varepsilon = 1$ e (c) $\varepsilon = 100$



(a)



(b)



(c)

Figura 4. $t_{cpu}(s)$ versus número de nós (N) (a) para $\varepsilon = 0,01$, (b) $\varepsilon = 1$ e (c) $\varepsilon = 100$

Tabela 1. Ordem de complexidade (p) e o coeficiente (c), em relação ao coeficiente de anisotropia (ε)

ε	p	c
0,01	1,057	$9,84 \times 10^{-6}$
1	1,007	$1,67 \times 10^{-5}$
100	1,12	$2,22 \times 10^{-4}$

-Fator de convergência assintótica

No gráfico da Fig. 5, para os quatro solvers estudados, mostra-se o fator de convergência de duas malhas, (ρ_{2g}), previsto pelo LFA, juntamente com o fator de convergência assintótica calculado experimentalmente usando uma malha fina obtida com 10 níveis de refinação, (ρ_h). Estes resultados são mostrados para diferentes números de coeficientes de anisotropia (ε).

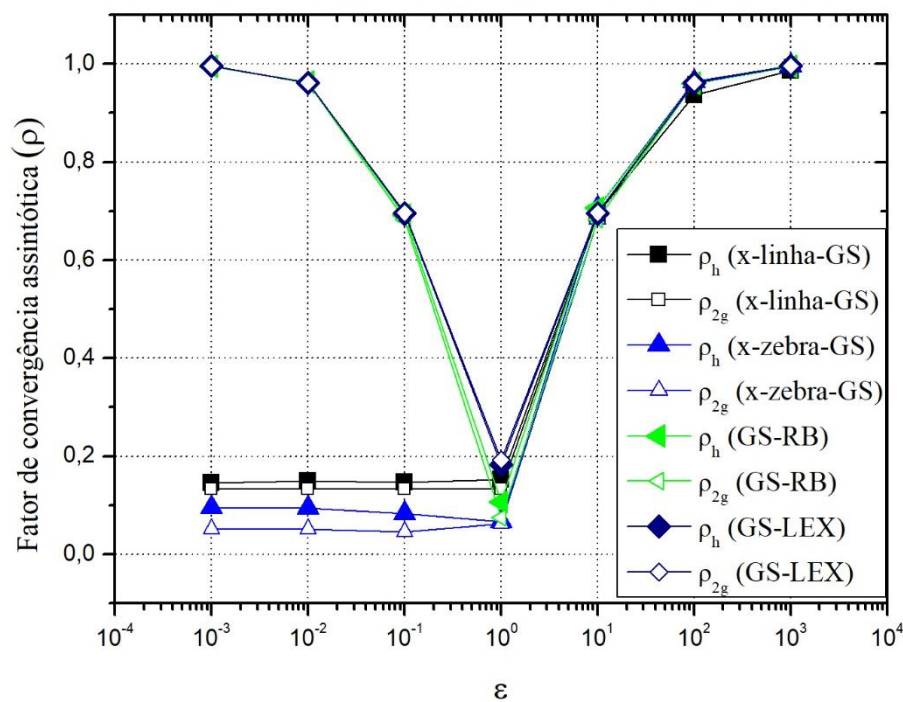


Figura 5. Fator de convergência assintótica (ρ) versus coeficiente anisotrópico (ε)

A partir da Fig. 5, observa-se que a LFA fornece previsões muito precisas dos fatores de convergência assintótica calculados experimentalmente.

Conclui-se que para problemas anisotrópicos, no caso em que $\varepsilon \rightarrow \infty$, os quatro solvers não possuem um bom fator de convergência. Porém, para $\varepsilon \rightarrow 0$, os métodos x-linha-GS e x-

zebra-GS tem melhores fatores de convergência se comparado com os outros *solvers* estudados. Percebe-se ainda que o solver GS-zebra é o mais eficiente em relação aos *solvers* estudados quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o que é confirmado com o t_{CPU} apresentado na Fig. 4 (a).

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi analisado o efeito da anisotropia física sobre o método *multigrid* para o problema de difusão bidimensional. O método *multigrid* geométrico foi empregado com CS, ciclo V, estimativa inicial nula e $r = 2$. Os *solvers* estudados foram GS-RB, GS-LEX, x-linha-GS e x-zebra-GS. Inicialmente foi realizada uma LFA para determinar o fator de convergência assintótica para duas malhas (ρ_{2g}). Em seguida o fator de convergência foi calculado experimentalmente (ρ_h). Também foi realizada uma análise de complexidade, para verificar o efeito do número de incógnitas no t_{CPU} . Outro parâmetro analisado foi o número de ciclos V. As conclusões obtidas são apresentadas a seguir:

- Os resultados obtidos via LFA estão de acordo com os resultados obtidos experimentalmente, o que demonstra a importância da LFA na obtenção de parâmetros para a elaboração de um projeto de método *multigrid* eficiente.

- O número de ciclos V cresce à medida que o problema torna-se mais anisotrópico ($\varepsilon \rightarrow 0$ e $\varepsilon \rightarrow \infty$) nos *solvers* GS-RB e GS-LEX. Para os *solvers* x-linha-GS e x-zebra-GS o número de ciclos V cresce apenas em uma direção ($\varepsilon \rightarrow \infty$), mostrando vantagem em relação aos outros *solvers*.

- O melhor desempenho do *multigrid* foi obtido com o *solver* x-zebra-GS em problemas anisotrópicos com $\varepsilon \rightarrow 0$ o qual apresentou ordem de complexidade p mais próxima da unidade do que para as demais anisotropias.

- Para o problema isotrópico ($\varepsilon = 1$), todos os *solvers* estudados apresentaram um bom comportamento com relação aos parâmetros analisados.

- Para o problema anisotrópico com $\varepsilon \rightarrow \infty$ os quatro *solvers* apresentaram um comportamento ruim, pois o t_{CPU} , o número de ciclos V e o fator de convergência obtidos foram piores comparados com $\varepsilon \rightarrow 0$.

- Dentre os *solvers* estudados, considerando o problema anisotrópico com $\varepsilon \rightarrow 0$, o x-zebra-GS foi o que apresentou o melhor desempenho com relação aos parâmetros estudados.

Em trabalhos futuros será analisado o *solver* na direção y , em que acredita-se ter um bom desempenho quando $\varepsilon \rightarrow \infty$.

AGRADECIMENTOS

A primeira autora agradece à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de estudo. Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos para Engenharia (PPGMNE) da UFPR.

REFERÊNCIAS

Briggs, W. L., Henson, V. E., & McCormick, S.F., 2000. *A Multigrid Tutorial*, 2ª ed., SIAM.

- Burden, R. L., & Faires, J. D., 2008. *Análise Numérica*, Tradutor: Ricardo Lenzi Tombi. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.
- Ferziger, J. H., & Peric, M., 2002. *Computational methods for fluid dynamics*. 3ª ed., New York: Springer.
- Fortuna, A., O., 2000. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. São Paulo: Edusp.
- Franco, S. R., Gaspar, F. J., Pinto, M. A. V., & Rodrigo, C., 2018. Multigrid method based on a space-time approach with standard coarsening for parabolic problems. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 317, pp. 25-34 (Disponível on-line outubro/2017)
- Gonçalves, S. F. T., 2013. *Estudo de parâmetros do método multigrid geométrico para equações 2D em CFD e volumes finitos*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- Oliveira, F., Pinto, M. A.V., Marchi, C. H., & Araki, L. K., 2012. Optimized partial semicoarsening multigrid algorithm for heat diffusion problems and anisotropic grids. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, pp. 4665–4676.
- Oosterlee, C. W., & Gaspar, F. J., 2008. Multigrid relaxation methods for systems of saddle point type. *Applied Numerical Mathematics*, vol. 58, Issue 12, pp. 1933-1950.
- Marchi, C.H., 2001. *Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina/Florianópolis.
- Pinto, M. A. V., & Marchi, C. H., 2006. Efeito dos Parâmetros do Método Multigrid CS e FAS sobre o tempo de CPU para a Equação de Laplace Bidimensional. *Proceedings of ENCIT*.
- Stuben, K., & Trottenberg, U., 1982. Multigrid methods: fundamental algorithms, model problem analysis and applications, in: Hackbusch, W., Trottenberg, U. (Eds), *Multigrid Methods, Lecture Notes in Mathematics*, 960, Springer Berlin Heidelberg, pp. 1-176.
- Swanson, R. C., Turkel, E., Rosson, C. C., 2007. Convergence acceleration of Runge-Kutta schemes for solving the Navier-Stoke equations. *Journal of Computational Physics*, vol. 224, pp. 365-388.
- Trottenberg, U., Oosterlee, C., & Schüller, A., 2001. *Multigrid*. Academic Press.
- Vassoler-Rutz, G., Pinto, M. A. V., & Suero, R., 2015. Comparison of the physical anisotropy of multigrid method for two-dimensional diffusion equation. *Proceedings of COBEM*.
- Vassoler-Rutz, G., Pinto, & M. A. V., 2016. Análise de Fourier Local e otimização de parâmetros do método multigrid para a equação de difusão anisotrópica. *XXXVII CILAMCE*.
- Wesseling, P., 1992. *An Introduction to Multigrid Methods*. John Wiley and Sons.
- Wesseling, P., & Oosterlee, C. W., 2001. Geometric Multigrid with Applications to Computational Fluid Dynamics, *Journal of Computation and Applied Mathematics*, vol. 128, pp. 311-334.
- Wienands, R., & Wolfgang, J., 2005. *Practical fourier analysis for multigrid methods*. Chapman & Hall/CRC.