

# Multiextrapolação de Richardson e Verificação da Ordem de Acurácia de Esquema Híbrido sobre a Equação 2D de Advecção-Difusão com Termo Fonte

**Ana Paula da S. Vargas, Carlos H. Marchi, Marcio A. V. Pinto**

Universidade Federal do Paraná - Departamento de Engenharia Mecânica

81531-980, Curitiba, Paraná

E-mails: vargas.apaulas@gmail.com; machi@pq.cnpq.br; marcio\_villela@ufpr.br

**Resumo:** Este trabalho apresenta a solução numérica da equação de advecção-difusão 2D, com termo fonte e erro de truncamento combinando o método das soluções fabricadas (MSF) com a verificação da ordem de acurácia a priori e a posteriori. A estimativa a priori da ordem de acurácia é realizada por meio da dedução da ordem formal baseada na série de Taylor a partir da aplicação do método da correção adiada (MCA). Tal abordagem é utilizada com o objetivo de verificar efetivamente a ordem de acurácia das soluções numéricas calculada a posteriori pela utilização de técnicas híbridas. A estimativa a posteriori é realizada com base na estimativa do erro de discretização obtida por meio de Multiextrapolações de Richardson (MER). As soluções são obtidas com o emprego dos Métodos de Diferenças Finitas e multigrid. Os resultados obtidos indicam que: i) o valor do parâmetro de mistura tem grande influência na ordem do erro de discretização para todas as variáveis de interesse; ii) o parâmetro de mistura não altera a eficácia de MER; iii) comprovou-se que MER é uma ferramenta capaz de potencializar a acurácia das soluções numéricas reduzindo o seu custo computacional; iv) MER provê subsídios para os casos em que não se consegue estimar a priori ou a posteriori as ordens do erro numérico e v) o efeito de  $Pe$  sobre o erro de discretização obtido com a utilização de MER apresenta melhor resultado para  $Pe$  pequenos.

**Palavras-chave:** Multiextrapolação de Richardson, método das soluções fabricadas, equação de Advecção-Difusão 2D, método da correção adiada.

## 1 Introdução

Dentre os principais interesses na área de dinâmica dos fluidos computacional (*Computational Fluid Dynamics* - CFD) está o de obter soluções numéricas acuradas e confiáveis de modelos que envolvam interação entre os processos advectivo e difusivo. Dificuldades comumente experimentadas na solução desses modelos podem ser reduzidas ou eliminadas pelo conhecimento do comportamento da solução por efeitos causados, por exemplo, pelo número de Péclet ( $Pe$ ), por ordens de acurácia mistas e presença de termo fonte.

Os modelos matemáticos empregados em CFD representam problemas básicos de transferência de calor e de mecânica dos fluidos. Qualquer equação governante tem suas propriedades vinculadas diretamente às propriedades físicas do escoamento. Em modelos de transporte a descrição do escoamento é o resultado de um balanço entre os efeitos dos fluxos advectivo, difusivos, fontes externas e internas.

A solução numérica de equações de advecção-difusão contribui para a solução numérica das equações de Navier-Stokes onde simplificações são realizadas em função das propriedades do escoamento, permitindo assim, o emprego de métodos numéricos mais simples [3].

Atualmente, não se consideram mais apenas efeitos físicos e de modelagem. A preocupação em obter resultados numéricos cada vez mais acurados, na solução de problemas em Engenharia, têm levado muitos pesquisadores a desenvolverem diversas metodologias de solução. Verifica-se o grande interesse no efeito que técnicas numéricas, computacionais, parâmetros físicos e numéricos, causam na solução de forma que possibilite a previsão e a confiabilidade de seus resultados [1,7,8,10].

Acurácia e previsões confiáveis em mecânica dos fluidos são objetivos fundamentais em CFD [7,9,10]. Devido a isso, aumentar a acurácia do resultado da simulação numérica de

escoamento de fluidos e reduzir os recursos computacionais necessários para estas simulações estão em constante estudo.

Tendo em vista o exposto acima, a importância desse trabalho se concentra em comprovar o valor correto da ordem assintótica do erro de discretização para aproximações numéricas de 1ª e 2ª ordens, muito comuns no Método de Diferenças Finitas (MDF), por meio da aplicação do método de correção adiada [2] e Multiextrapolação de Richardson. Verifica-se também a influência de parâmetros, físico (número de Péclet) e numérico (parâmetro de mistura de métodos mistos), sobre o erro de discretização e sua ordem. Este estudo deve contribuir para os processos de verificação em CFD [7].

O interesse em esquemas híbridos está em determinar um modelo numérico apropriado de forma a atender altos níveis de acurácia. Nesse sentido, a verificação da ordem de acurácia da solução numérica *versus* ordem de acurácia formal da técnica numérica tem como objetivo identificar em que medida um modelo numérico é resolvido adequadamente. Para tanto, dois métodos são abordados: estimativa de erro *a priori* e estimativa de erro *a posteriori* [7].

A estimativa *a priori* da ordem de acurácia é realizada por meio da dedução da ordem formal baseada na série de Taylor a partir da aplicação do método de correção adiada (MCA) (ou *Deferred-Correction Approaches* – DCA) [2]. Tal abordagem é utilizada com o objetivo de verificar efetivamente a ordem de acurácia das soluções numéricas calculada *a posteriori* pela utilização de técnicas híbridas. A ideia do MCA consiste em equilibrar a solução através de técnicas de aproximação de baixa e alta ordem por meio de um parâmetro de mistura ( $\beta$ ) na forma:

$$F_e = F_e^L + \beta(F_e^H - F_e^L)^{old} \quad (1)$$

onde  $F_e^L$  é uma aproximação de baixa ordem e  $F_e^H$  é a aproximação de alta ordem. O termo em parênteses é calculado usando valores da iteração imediatamente anterior e é indicado pelo sobrescrito “old”.

Para estimar, *a posteriori*, a magnitude da ordem do erro de discretização bem como a influência do parâmetro numérico de esquemas híbridos, emprega-se o método de extrapolação de Richardson (ER) [6] de forma recursiva. Esse procedimento é conhecido por Multiextrapolação de Richardson (MER) (ou *Repeated Richardson Extrapolation* - RRE) [6,11]. ER também é bastante utilizada para reduzir o erro de discretização e aumentar a ordem de acurácia, pois cada aplicação representa um nível de extrapolação e a sua eficácia pode ser potencializada.

Com isso, os objetivos deste trabalho são: (1) análise da ordem de acurácia da solução numérica *versus* ordem de acurácia formal da técnica numérica; (2) verificação do efeito do parâmetro físico ( $Pe$ ) na solução e no erro numérico; (3) verificação do efeito do parâmetro numérico na solução e no erro numérico; (4) verificação da solução com o emprego de MER.

Para tanto, levando-se em conta as condições do erro de truncamento, e conseqüentemente, o erro de discretização inerentes a aproximações numéricas baseadas no MDF, este trabalho apresenta a solução numérica da equação de advecção-difusão 2D, em regime permanente, com termo fonte e solução analítica, obtidos por meio do método das soluções fabricadas (MSF) (ou *Method of Manufactured Solutions* – MMS) [4]. O procedimento para a utilização do MSF baseia-se na seleção *a priori* de uma solução analítica e então obtém-se um termo fonte para equilibrar a equação governante [4]. Através da análise do erro de discretização verifica-se a concordância das ordens de acurácia teórica e da solução, conferindo assim um elevado grau de confiança referente a erros na codificação.

## 2 Conceitos e métodos

O erro da solução numérica, ou simplesmente erro numérico ( $E$ ), é a diferença entre a solução analítica exata ( $\Phi$ ) de uma variável de interesse e sua solução numérica ( $\phi$ ) [5, 6], ou seja,

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (2)$$

O erro numérico é causado basicamente por quatro fontes, que são: erros de iteração, erros de truncamento, erros de arredondamento e erros de programação [5, 6]. Quando as demais fontes são minimizadas ou inexistentes, o erro de truncamento passa a ser denominado erro de discretização ( $Eh$ ). Similarmente à forma geral do erro de truncamento,  $Eh$  é dado por

$$Eh = c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + \dots \quad \text{para } h \rightarrow 0 \quad (3)$$

onde o menor expoente de  $h$  na expressão de  $Eh$  na Eq. (3),  $p_0$ , chamamos ordem assintótica ou de acurácia de  $Eh$ . A ordem assintótica ( $p_0$ ) e os expoentes dos termos não nulos na equação do erro de truncamento ( $p_1, p_2, \dots$ ) são denominadas ordens verdadeiras ( $p_V$ ). O conjunto representado por  $p_V$  e seus elementos são números reais e seguem a relação:  $1 \leq p_0 < p_1 < p_2 < \dots$ . Todas as ordens verdadeiras são valores conhecidos. Os coeficientes reais  $c_0, c_1, c_2, \dots$  independem de  $h$  e podem ser positivos ou negativos são função da variável dependente e de suas derivadas. Tanto os coeficientes  $c_i$  como as ordens verdadeiras dependem das aproximações numéricas aplicadas.

A ideia básica de ER exige a solução numérica da variável de interesse em duas malhas com diferentes números de nós. Por exemplo, com base nas Eqs. (2) e (3), consideram-se as soluções aproximadas  $\phi(h)$  e  $\phi(rh)$  representadas por

$$\Phi - \phi(h) = c_0 h^{p_0} + \mathcal{O}(h^{p_1}) \quad (4)$$

$$\Phi - \phi(rh) = c_0 (rh)^{p_0} + \mathcal{O}(h^{p_1}) \quad (5)$$

Subtraindo a Eq. (5) da Eq. (4), obtém-se a expressão para o erro de truncamento:

$$c_0 h^{p_0} = \frac{\phi(h) - \phi(rh)}{r^{p_0} - 1} + \mathcal{O}(h^{p_1}) \quad (6)$$

Assim, substituindo a Eq. (6) na Eq. (4) chega-se a

$$\Phi = \phi(h) + \frac{\phi(h) - \phi(rh)}{r^{p_0} - 1} + \mathcal{O}(h^{p_1}) \quad (7)$$

A aplicação repetida da Eq. (7) é denominada por Multiextrapolação de Richardson (MER) em que a primeira aplicação é considerada o primeiro nível de extrapolação, chegando-se a  $p_0$ . Com a aplicação sucessiva desse processo, definem-se os valores sequenciais das ordens por  $p_m$ , cada nível de malha por  $g$ , e  $m$  o número de aplicações de ER, assim, pode-se reescrever a Eq. (7) como

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1} \quad (8)$$

em que  $g = 2, \dots, G$ ,  $r = h_{g-1}/h_g$  e  $m = 1, \dots, g-1$ ;  $G$  é o número total de malhas e  $\phi_{g,0}$  representa  $\phi$  sem o emprego de ER. Teoricamente, quanto maior o valor de  $m$ , mais próximo  $\phi_{g,m}$  estará de  $\Phi$ . O valor máximo de  $m$  permitido é  $m = M$  onde  $M = G - 1$ . Os valores de  $p_m$  podem ser verificados com base nos conceitos de ordem efetiva ( $p_E$ ) e ordem aparente ( $p_U$ ), dadas pelas Eqs. (8) e (9), isto é,

$$p_{Eg,m} = \frac{\log \left[ \frac{\Phi - \phi_{g-1,m-1}}{\Phi - \phi_{g,m}} \right]}{\log(r)} \quad e \quad p_{Ug,m} = \frac{\log \left[ \frac{\phi_{g-1,m-1} - \phi_{g-2,m-2}}{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m-1}} \right]}{\log(r)} \quad (9)$$

assumindo-se  $g = 2, \dots, G$  para  $p_{Eg,m}$ ,  $g = 3, \dots, G$  para  $p_{Ug,m}$  e  $m = 1, \dots, M$ .

### 3 Modelo Matemático

A equação de advecção-difusão [3] utilizada neste trabalho representa o comportamento da temperatura em um domínio bidimensional, com termo fonte, em um sistema de coordenadas cartesianas, para regime permanente e considerando-se propriedades constantes, dada por

$$Pe_x \frac{\partial T}{\partial x} + Pe_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + S(x, y) \quad (10)$$

onde  $T$  é a temperatura,  $Pe_i$  é o número de Péclet (com  $i = x$  ou  $y$ ) e o termo fonte  $S$  é dado por

$$S(x, y) = \frac{\pi[(\pi \text{sen}(\pi x) + Pe_x \cos(\pi x))(e^{Pe_x x} - 1) - 2Pe_x \cos(\pi x)e^{Pe_x x}](e^{Pe_y y} - 1)}{(e^{Pe_x} - 1)(e^{Pe_y} - 1)} \quad (11)$$

obtido por meio do MSF.

As condições de contorno são dadas por

$$T(0, y) = T(1, y) = T(x, 0) = 0 \text{ e } T(x, 1) = \text{sen}(\pi x) \frac{(e^{Pe_x x} - 1)}{(e^{Pe_x} - 1)} \quad (12)$$

Como já mencionado anteriormente, o termo fonte e as condições de contorno foram ajustadas por meio do MSF de forma a possibilitar a obtenção da solução analítica dada por

$$T(x, y) = \text{sen}(\pi x) \frac{(e^{Pe_x x} - 1)(e^{Pe_y y} - 1)}{(e^{Pe_x} - 1)(e^{Pe_y} - 1)} \quad (13)$$

Neste trabalho, por conveniência, os resultados são analisados considerando  $Pe_x = Pe_y = Pe$ .

### 4 Modelo Numérico

O modelo numérico é caracterizado pelo uso do MDF com malhas uniformes. Com o intuito de verificar as ordens verdadeiras da solução numérica, *a priori* e *a posteriori*, o MCA [2] é aplicado de forma que, nas aproximações para os termos de advecção é utilizada a técnica CDS-2 com correção adiada sobre UDS-1 conforme a Eq. (14).

$$T_P = T_{P,UDS-1} + \beta(T_{P,CDS-2}^* - T_{P,UDS-1}^*) \quad (14)$$

onde  $T_{P,CDS-2}^*$  e  $T_{P,UDS-1}^*$  são os valores conhecidos da iteração anterior e são aplicados conforme o esquema dado pela Eq. (15).

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{caso UDS - 1} \\ 1, & \text{caso CDS - 2} \\ 0 < \beta < 1, & \text{mistura} \end{cases} \quad (15)$$

A Eq. (15) fornece a possibilidade de uma análise do comportamento da solução e de seu erro por meio da variação do parâmetro de mistura ( $\beta$ ).

Substituindo as aproximações definidas anteriormente na Eq. (10), obtém-se

$$\left(\frac{Pe}{h_x} + \frac{Pe}{h_y} + \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right)T_P = \left(\frac{Pe}{h_x} + \frac{1}{h_x^2}\right)T_W + \left(\frac{Pe}{h_y} + \frac{1}{h_y^2}\right)T_S + \frac{1}{h_x^2}T_E - \frac{1}{h_y^2}T_N + S(x, y) + \beta \left[ \left(\frac{Pe}{h_x} + \frac{Pe}{h_y}\right)T_P^* - \frac{Pe}{2h_x}(T_W^* + T_E^*) - \frac{Pe}{2h_y}(T_S^* + T_N^*) \right] + \varepsilon_{\tau\beta} \quad (16)$$

onde  $\varepsilon_{\tau\beta}$  é o erro de truncamento obtido e apresentado na Eq. (17) considerando  $h = h_x = h_y$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\tau\beta} = & -\frac{(1-\beta)}{2!}(T_{P_x}^{ii} + T_{P_y}^{ii})h + \left[ (2T_{P_x}^{iii} - T_{P_x}^{iv}) + (2T_{P_y}^{iii} - T_{P_y}^{iv}) \right] \frac{h^2}{12} \\ & -\frac{(1-\beta)}{4!}(T_{P_x}^{iv} + T_{P_y}^{iv})h^3 + \left[ (3T_{P_x}^v - T_{P_x}^{vi}) + (3T_{P_y}^v - T_{P_y}^{vi}) \right] \frac{h^4}{360} \\ & -\frac{(1-\beta)}{6!}(T_{P_x}^{iv} + T_{P_y}^{iv})h^5 + \left[ (4T_{P_x}^{vii} - T_{P_x}^{viii}) + (4T_{P_y}^{vii} - T_{P_y}^{viii}) \right] \frac{h^6}{20160} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Na Eq. (17) os subscritos  $P_x$  e  $P_y$  são os pontos de expansão considerados, na direção  $x$  e na direção  $y$ , respectivamente; e o índice sobrescrito indica a ordem da derivada.

Como as derivadas parciais são diferentes de zero, as ordens verdadeiras para o erro no cálculo de  $T$  são

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta < 1 & \Rightarrow p_V(i) = i \\ \beta = 1 & \Rightarrow p_V(i) = 2i \end{aligned} \quad (18)$$

onde  $i = 1, 2, 3, \dots$  confirmando, assim, a ordem assintótica do erro no cálculo de  $T$  quando o esquema utilizado é UDS-1,  $p_0 = 1$ , e CDS-2,  $p_0 = 2$ .

## 5 Resultados e Conclusão

A metodologia proposta foi aplicada a diversas variáveis de interesse, a saber, a temperatura no centro do domínio ( $T_c$ ), a temperatura média ( $T_m$ ), a taxa de transferência de calor ao leste ( $q_e$ ), a taxa de transferência de calor ao norte ( $q_n$ ) e a média da norma  $l_1$  do erro numérico ( $L$ ). Os resultados obtidos para cada uma destas variáveis podem ser encontrados em [11].

Os resultados obtidos *a posteriori* podem ser verificados nas Figuras 1, 2 e 3 para as variáveis  $T_c = T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $T_m$  e  $q_e$ , respectivamente. Elas apresentam as três primeiras ordens verdadeiras obtidas com o emprego de MER quando  $\beta = 0$  e 1.

Estes resultados mostram a tendência das ordens verdadeiras do erro de discretização obtidas *a posteriori*, considerando a variação do parâmetro de mistura ( $\beta$ ) dada pela Eq. (15). As ordens obtidas desta forma podem ser corroboradas com aquelas obtidas na estimativa *a priori*, por exemplo, para a variável  $T_c$ , tem-se  $p_V(i) = i$  para  $0 \leq \beta < 1$  e, para  $\beta = 1$  tem-se  $p_V(i) = 2i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots$ . As ordens obtidas *a priori* para a variável  $T_m$  são:  $p_V(i) = 2i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots$ ; e para  $q_e$  são:  $p_V(i) = 2 + i$ , com  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ , para qualquer valor de  $\beta$ .

Os resultados apresentados são os obtidos para  $Pe = 1$  e as indicações encontradas nas legendas de cada gráfico referem-se ao método de obtenção da respectiva ordem, isto é, para  $p_E(Th)$  (ordem efetiva) e  $p_U(Th)$  (ordem aparente);  $Ti\_pU$  é a solução extrapolada uma vez com base em  $pU$  e  $Tbi\_pU$  é a solução extrapolada duas vezes com base em  $pU$ .

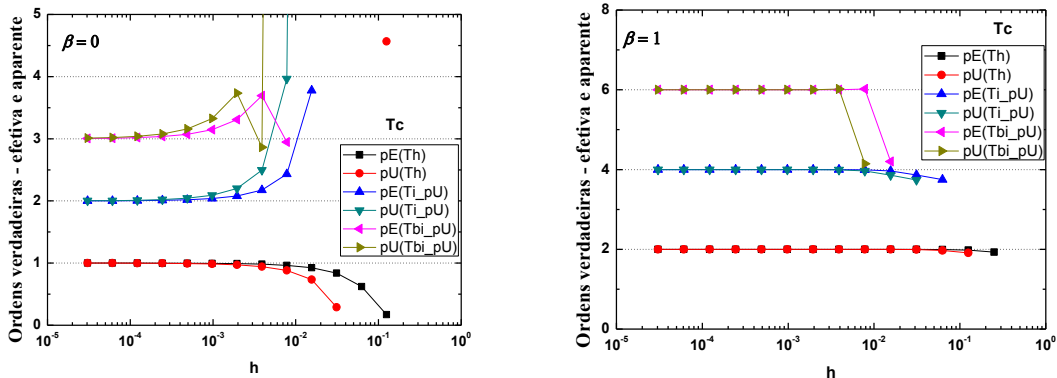


Figura 1: Ordens verdadeiras – efetiva e aparente da variável  $T_c$ .

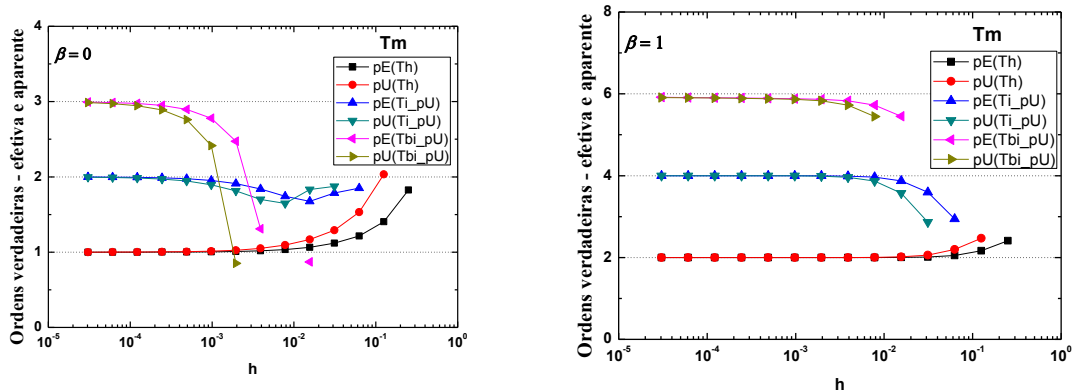


Figura 2: Ordens verdadeiras – efetiva e aparente da variável  $T_m$ .

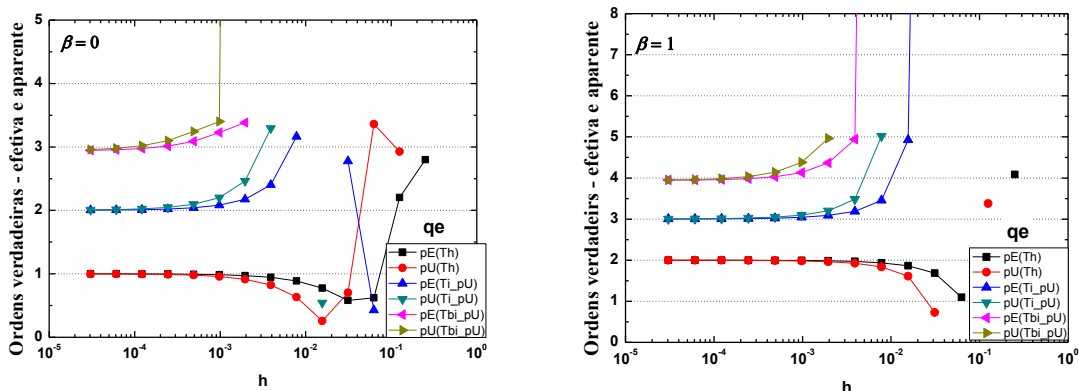


Figura 3: Ordens verdadeiras – efetiva e aparente da variável  $q_e$ .

Análises para outros valores de  $Pe$ , como  $Pe = 0,1$  e  $10$ , mostram que este não influencia a solução, mas resultados melhores são observados para  $Pe = 0,1$ .

Os resultados mostram que as ordens efetivas e aparentes são confirmadas para  $\beta = 0$  e  $\beta = 1$  e, pode-se constatar também, que para qualquer mistura entre essas duas técnicas, ou seja, para  $0 < \beta < 1$ , as ordens verdadeiras são como as obtidas para  $\beta = 0$  [11]. Porém, para os casos das variáveis  $T_m$  e  $q_e$ , considerando as ordens verdadeiras obtidas *a priori*, verifica-se que a ordem fica degenerada quando  $0 \leq \beta < 1$  [11].

Este comportamento pode estar relacionado com alguns fatores, que podem ser devido à condição de contorno (no caso da variável  $q_e$ ); ou com a ordem da função de interpolação utilizada; ou ainda, estar relacionado ao erro de poluição definido como a diferença dos erros de discretização e truncamento [5]. Pode-se considerar que as ordens obtidas *a posteriori* informam que as ordens obtidas *a priori* são determinadas conforme a função de interpolação utilizada (ou seja, depende do valor de  $\beta$ ). No caso em que  $0 \leq \beta < 1$ , a menor ordem prevalece.

Em uma análise geral das ordens verdadeiras obtidas *a posteriori*, para cada variável de interesse, conforme o parâmetro de mistura  $\beta = 0$  ou  $\beta = 1$ , todas as tendências assintóticas confirmam as análises obtidas *a priori*. Com isso torna-se confiável a análise das mesmas para outros fatores de mistura dos métodos propostos.

Da mesma forma verificou-se que, independente do número de Péclet, todas as tendências corroboram com os resultados obtidos *a priori*, mostrando assim, que análises feitas *a posteriori* trazem vantagens como ferramenta de previsão da magnitude do erro de discretização.

Ainda na análise *a posteriori*, a ordem aparente (pU) mostrou-se uma ferramenta confiável para a verificação numérica da solução no caso em que a solução analítica é desconhecida.

As ordens de acurácia obtidas *a posteriori* com MER trazem grandes vantagens em relação à perspectiva do comportamento da solução numérica de um problema físico em estudo. Estas podem indicar efetivamente as ordens do erro, uma vez que as ordens de erro *a priori* devem ser confirmadas pelas ordens obtidas *a posteriori*. Esta ideia pode ser ampliada para a verificação da solução nos casos em que não há conclusões significativas na estimativa *a priori* ou a solução analítica é desconhecida.

Detalhes deste trabalho podem ser encontrados em [11].

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), AEB (Agência Espacial Brasileira) através do Programa Uniespaço, Fundação Araucária (Paraná) e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). O segundo autor é bolsista do CNPq.

## Referências

- [1] I. Celik, W. M. Zhang, Calculation of numerical uncertainty using Richardson extrapolation: Application to Some Simple Turbulent Flow Calculations, *Journal of Fluids Engineering*, 117, 439-445, (1995).
- [2] J. H. Ferziger, M. Peric. “Computational Methods for Fluid Dynamics”, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [3] A. O. Fortuna, “Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos”, Edusp, São Paulo, 2000.
- [4] P. M. Knupp, K. Salari, “Verification of computer codes in computational science and engineering”, Chapman & Hall/CRC, New York, 2003.
- [5] C. H. Marchi, “Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos”, Tese de Doutorado, PGMEC-UFSC, Florianópolis, 2001.
- [6] C. H. Marchi, L. A. Novak, C. D. Santiago, A. P. S. Vargas, Highly accurate numerical solutions with repeated Richardson extrapolation for 2D Laplace, *Mathematical Modelling*, 37, 7386–7397 (2013).
- [7] W. L. Oberkampf, T. G. Trucano, Verification and validation in computational fluid dynamics, *Progress in Aerospace Sciences*, 38, 209-272, (2002).
- [8] J. C. Roy, Grid Convergence error analysis for mixed-order numerical schemes, *AIAA Journal*, 41, 595-604, (2003).
- [9] J. C. Roy, Review of code and solution verification procedures for computational simulation. *J. Comp. Phys*, 205, 131 - 156, (2005).
- [10] W. Shyy, M. Garbey, A. Appukuttan, J. Wu, Evaluation of Richardson extrapolation in computational fluid dynamics, *Numerical Heat transfer, Part B*, 41, 139-164, (2002).
- [11] A. P. da S. Vargas, “Multiextrapolação de Richardson e Esquemas de 1ª e 2ª Ordens, Mistos e Crank-Nicolson sobre as Equações 2D de Advecção-Difusão e Fourier”, Tese de Doutorado, PGMEC-UFPR, Curitiba, 2013.