



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Um Comparativo do desempenho dos solvers Gauss-Seidel linha e zebra no método multigrid em problemas de difusão anisotrópica

Michely Laís de Oliveira
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em
Engenharia (PPGMNE)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Curitiba, Brasil
michely-lais@hotmail.com

Marcio Augusto Villela Pinto,
Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Curitiba, Brasil
marcio_villela@yahoo.com.br, simone.tg@ufpr.br

Grazielli Vassoler Rutz
Departamento de Ensino
Instituto Federal de Santa Catarina-Campus Chapecó
Chapecó, Brasil
grazielli.vassoler@ifsc.edu.br

Resumo— Neste trabalho vamos apresentar o estudo de um problema com anisotropia física com o uso do método *multigrid* (MG), em malhas quadrangulares. Com o auxílio da Análise de Fourier Local (*Local Fourier Analysis*, LFA), foi analisado o fator de convergência assintótica do MG, o qual foi determinado de duas maneiras: numérico (teórico medido numericamente a priori via LFA) e experimental (calculado experimentalmente a posteriori via programa real). O modelo considerado foi a equação de difusão. Para a discretização da equação foi utilizado o método de diferenças finitas (MDF) com o uso do esquema de segunda ordem (*Central Differencing Scheme*, CDS). O sistema de equações gerado pela discretização da equação diferencial foi resolvido pelo MG, com o uso do esquema de correção (*Correction Scheme*, CS). Serão utilizados os seguintes solvers no MG: Gauss-Seidel linha e Gauss-Seidel zebra na direção x . A partir dos parâmetros estudados foi possível perceber que o fator de convergência assintótica calculado numericamente e experimentalmente estão de acordo, confirmando a importância da LFA.

Palavras-chave— *multigrid; Análise Local de Fourier; Problema difusivo; anisotropia física; Método das Diferenças finitas.*

I. INTRODUÇÃO

Simulações numéricas em problemas e aplicações em Engenharia são destaque na área da pesquisa e no desenvolvimento da tecnologia. Segundo [1] a Dinâmica dos Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics*, CFD) é a área que estuda simulações numéricas em problemas que envolvem fluidos em movimento. Para obterem-se bons resultados em CFD é necessário diminuir o erro de discretização, implicando no uso de malhas mais refinadas, aumentando o custo computacional. Isto ocorre devido ao fato de que os problemas que se deseja resolver geralmente envolvem muitas variáveis, além de matrizes esparsas [1].

Neste estudo, o método de discretização empregado é o Método de Diferenças Finitas (MDF) [2], o qual tem como objetivo aproximar cada termo do modelo matemático por meio de expressões algébricas, em cada ponto ou nó da malha, transformando-o em um sistema linear de equações algébricas do tipo:

$$AT = f \quad (1)$$

em que A é a matriz dos coeficientes de tamanho $N \times N$, T é a temperatura (variável de interesse) e f o vetor dos termos independentes, ou termo fonte.

Para solucionar (1) podem ser empregados métodos iterativos, os quais, partindo de uma estimativa inicial, após sucessivas aproximações podem ou não convergir para uma solução. Por meio da análise espectral dos erros percebe-se que apenas os componentes de alta frequência (ou oscilatórios) do erro são reduzidos com rapidez nos *solvers* iterativos, deixando os componentes de baixa frequência inalterados [3], [4]. Devido a isso, o *multigrid* (MG) consiste em usar um conjunto de malhas com diferentes graus de refinamento, percorridos ao longo do processo iterativo. De tal modo que, as diferentes componentes do erro são reduzidas rapidamente, acelerando a convergência dos métodos iterativos.

O método MG é utilizado para resolver diversos tipos de sistemas (lineares ou não) e problemas (isotrópicos ou anisotrópicos). Porém, alguns estudos, apresentados por [5] mostram que o MG não tem sido muito eficiente para problemas com fortes anisotropias.

Problemas anisotrópicos (anisotropia física ou geométrica) são bem comuns na engenharia. A anisotropia física (ou dos coeficientes) ocorre, por exemplo, quando a equação diferencial possui os coeficientes constantes nas derivadas parciais, mas distintos nas direções coordenadas, ou seja, em uma das direções tem-se o coeficiente de anisotropia ε distinto da unidade. Neste caso a distância entre os nós é igual em ambas as direções, $h = h_x = h_y$. Um exemplo de anisotropia física ocorre no estudo que envolve um material no qual a condução de calor depende da direção.

A anisotropia geométrica pode surgir a partir da discretização de malhas, onde as distâncias entre os nós são constantes, h_x e h_y , mas distintos nas direções coordenadas. A anisotropia pode ser analisada pela razão de aspecto, $Q = h_x/h_y$. Para $Q = 1$ o problema é isotrópico [3]. Se $0 < Q \ll 1$ ou $Q \gg 1$ o problema é denominado anisotrópico. Um exemplo é um problema de camada limite, onde a razão de aspecto pode ser da ordem 10^3 , 10^4 ou mais [6].

Nos casos em que os coeficientes das equações diferenciais, distintos da unidade e também distintos entre si, geram anisotropia física, a eficiência dos métodos iterativos é reduzida [3], [4].

Diversos trabalhos encontrados na literatura envolvem o MG em problemas anisotrópicos. [7] calcularam o fator de convergência do MG por meio de um *software* que desenvolve a Análise de Fourier Local (*Local Fourier Analysis*, LFA) em problemas com difusão anisotrópica. Eles

fizeram esta análise com diferentes *solvers* e operadores de restrição e prolongação.

Referência [8] analisaram problemas com anisotropia geométrica. Com a equação de Laplace bidimensional aplicada a algoritmos com diferentes tipos de engrossamento. Constataram que o algoritmo “semi-engrossamento seguido de engrossamento padrão” com suavizador Gauss-Seidel com ordenação lexicográfica (GS-LEX) é eficiente para as anisotropias estudadas.

Referência [9] apresentaram um estudo sobre anisotropia geométrica envolvendo diversas malhas e razões de aspecto. Também estudaram alguns parâmetros do MG tais como: *solvers*, restrição, número de níveis e número de iterações internas, além de diversos algoritmos de engrossamento. Neste estudo, afirmam que o semi-engrossamento parcial (*Partial Weighting*, PW) teve um bom desempenho.

Referência [10] estudaram o resultado da anisotropia física com o uso do MG para dois problemas de difusão anisotrópica. Empregaram o esquema de correção FAS, ciclo V, os *solvers Modified Strongly Implicit* (MSI) e Gauss-Seidel (GS). Com esta análise concluíram que, para fortes anisotropias, a ordem de complexidade do MG torna-se ruim.

Referência [5] analisaram o efeito da anisotropia física sobre o método MG no problema com anisotropia difusiva. Calcularam o fator de convergência e fator de suavização via LFA, e apresentaram uma análise de complexidade. Empregaram o esquema de correção CS, ciclo V, os *solvers* Gauss-Seidel Red-Black (GS-RB) e GS-LEX. Concluíram que os resultados obtidos pela LFA estão de acordo com os obtidos mediante a análise de complexidade e que, para fortes anisotropias, a ordem de complexidade do MG torna-se ruim em ambos os *solvers* analisados.

O desempenho do MG está diretamente ligado aos componentes MG escolhidos, como níveis de malhas, o *solver* e o número de iterações do *solver* em cada ciclo. Porém, esta escolha geralmente é difícil, uma vez que pequenas alterações no método influenciam na taxa de convergência do algoritmo. A LFA fornece estimativas *a priori* para as taxas de convergência de seus componentes e que permitem antecipar qual será o desempenho do *multigrid*.

No presente trabalho o parâmetro do MG analisado foi o fator de convergência assintótica, o qual foi determinado de duas maneiras: numérico (teórico medido numericamente via LFA) e experimental (calculado experimentalmente, ou seja, computacionalmente). O modelo matemático considerado foi a equação de difusão bidimensional, que apresenta anisotropia física e é denotado neste texto por anisotropia difusiva. Para a discretização das equações foi utilizado o esquema de segunda ordem (*Central Differencing Scheme*, CDS) nos termos difusivos.

Para a obtenção do fator de convergência assintótica (ρ_{2g}), os sistemas de equações resultantes da discretização foram resolvidos utilizando os *solvers* Gauss-Seidel linha na direção x (x-linha-GS) e Gauss-Seidel zebra na direção x (x-zebra-GS) [3]. Os operadores de restrição e prolongação

utilizados foram Ponderação Completa (*Full Weighting*, FW) e Bilinear, respectivamente.

Os dados obtidos via LFA foram utilizados para analisar a influência da anisotropia física sobre o tempo de CPU (t_{CPU}) para alguns parâmetros do MG geométrico, tais como: número de incógnitas (N), fator de convergência para diferentes *solvers* e diferentes anisotropias.

II. MODELO MATEMÁTICO E DISCRETIZAÇÃO

O modelo matemático considerado refere-se ao problema de anisotropia difusiva, dado pela equação de difusão bidimensional [3]:

$$\begin{cases} -T_{xx} - \varepsilon T_{yy} = S \\ T(0, y) = T(x, 0) = T(x, 1) = T(1, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

onde, T_{xx} e T_{yy} são as derivadas segundas de T em relação a x e y , respectivamente, e $\varepsilon > 0$.

O termo fonte S e a solução analítica T , são dados por:

$$S = 2[(1 - 6x^2)y^2(1 - y^2) + \varepsilon(1 - 6y^2)x^2(1 - x^2)] \quad (3)$$

$$T(x, y) = (x^2 - x^4)(y^4 - y^2) \quad (4)$$

No problema apresentado o domínio de cálculo utilizado é dado por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ e foram empregados malhas uniformes ($N = N_x = N_y$), onde, N_x e N_y denotam o número de nós nas direções coordenadas x e y , respectivamente, incluindo os contornos.

A discretização das equações foi feita pelo MDF a partir do esquema CDS, de segunda ordem, obtendo:

$$-\left(\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(h_x)^2}\right) - \varepsilon \left(\frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(h_y)^2}\right) = S \quad (5)$$

A discretização de (1) para os nós internos resulta em:

$$a_P T_P + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S = b_P \quad (6)$$

onde T é a incógnita, $P = 2, \dots, N - 1$ é o número de cada incógnita, $W = P - N_x$, $E = P + N_x$, $N = P + N_y$ e $S = P - N_y$.

Considerando $h_x = \frac{1}{N_x}$ e $h_y = \frac{1}{N_y}$, tem-se que:

$$a_P = \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2\varepsilon}{h_y^2}\right), a_W = a_E = -\frac{1}{h_x^2}, a_N = a_S = -\frac{\varepsilon}{h_y^2}, b_P = S \quad (7)$$

Sendo que nos contornos tem-se $a_P = 1$, $a_W = a_S = a_N = a_E = 0$.

III. MÉTODO MULTIGRID

Para reduzir o erro de discretização, são utilizadas malhas muito refinadas, o que gera sistemas lineares de grande porte. A solução destes sistemas por métodos iterativos demanda um alto custo computacional. Assim, o MG é um método alternativo utilizado para acelerar a taxa de convergência destes problemas [3], sendo eficiente na redução do erro.

O MG tem como princípios básicos a propriedade de suavização e correção de malha grossa. É uma técnica que envolve a transferência de informações de um problema para várias malhas, desde a mais fina até a mais grossa [8].

Equação (1) foi resolvida com método MG, mediante o esquema CS, ciclo V e estimativa inicial nula [3], [4].

Considerando malhas uniformes, a razão de engrossamento das malhas é definida como $r = p / q$, onde q mede o espaçamento entre os nós da malha fina (Ω^h) e p mede o espaçamento entre os nós da malha imediatamente mais grossa (Ω^H). Neste trabalho foi utilizado $r = 2$ (engrossamento padrão) [6]. Os sistemas de equações obtidos da discretização foram resolvidos pelos *solvers* x-linha-GS e x-zebra-GS.

O resíduo foi calculado pela expressão a seguir:

$$R^n = b - AT^n \quad (8)$$

onde T^n é a solução da incógnita na iteração n .

Como critério de parada do processo iterativo foi utilizado a norma infinito do resíduo adimensionalizada pela norma infinito do resíduo na estimativa inicial, isto é, $\|R^n\|_\infty / \|R^0\|_\infty$, em que o termo R^n é o resíduo na iteração n e R^0 é o resíduo na estimativa inicial. Assim, o processo iterativo é interrompido após a norma ser menor ou igual um valor estimado, denominado tolerância tol , ou seja, $\|R^n\|_\infty / \|R^0\|_\infty \leq tol$. A norma infinito é definida por [11]:

$$\|R^n\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |R_i| \quad (9)$$

onde R_i é a i -ésima componente do resíduo.

Os algoritmos foram implementados na linguagem Fortran 2003 utilizando o aplicativo Intel 9.1 Visual Fortran e precisão quádrupla. Os testes foram realizados em um computador com processador Intel Core i7 2.6 GHz, 8 GB de RAM e sistema operacional Windows 10, com 64 bits.

IV. ANÁLISE DE FOURIER LOCAL

O objetivo da LFA é determinar o fator de suavização de S_h e os fatores de convergência para o algoritmo de duas malhas [4]. O fator de suavização $\mu(S_h) = \mu_{2g}$ é o raio espectral do operador de suavização, estimando o quanto são reduzidas as componentes de altas frequências do erro do esquema de relaxação (*solver*).

O fator de convergência assintótica $\rho(M_h^{2h}) = \rho_{2g}$ é o raio espectral da matriz M_h^{2h} [4], sendo que $M_h^{2h} := S_h^{v_2} K_h^{2h} S_h^{v_1}$ é operador de duas malhas. Tomando S_h como

operador de suavização, ν_1 e ν_2 o número de pré-suavização e pós-suavização, respectivamente. O operador de correção de malha grossa é dado por $K_h^{2h} = I_h - I_{2h}^h (L_{2h})^{-1} I_h^{2h} L_h$, onde I_{2h}^h, I_h^{2h} são os operadores de transferência, L_{2h}, L_h são operadores discretos de Laplace e I_h o operador identidade na malha fina. O resultado obtido por este fator mostra o comportamento da convergência assintótica do método MG para algoritmo de duas malhas.

Neste trabalho, utilizou-se a LFA para determinar o fator de convergência assintótica para os *solvers* x-linha-GS e x-zebra-GS.

V. VERIFICAÇÃO DOS CÓDIGOS

Nesta sessão, são apresentados os testes para a verificação dos códigos que envolvem os *solvers* x-linha-GS e x-zebra-GS. Os processos de verificação do código apresentam o grau de confiabilidade das soluções numéricas [12].

- Erro de discretização

O comportamento do erro de discretização mediante o refinamento da malha é uma das análises para a verificação das soluções numéricas. Neste caso, espera-se que quando o espaçamento (h) da malha tende a zero o erro tenha o mesmo comportamento. A Fig. 1 apresenta o erro de discretização relativo aos *solvers* estudados.

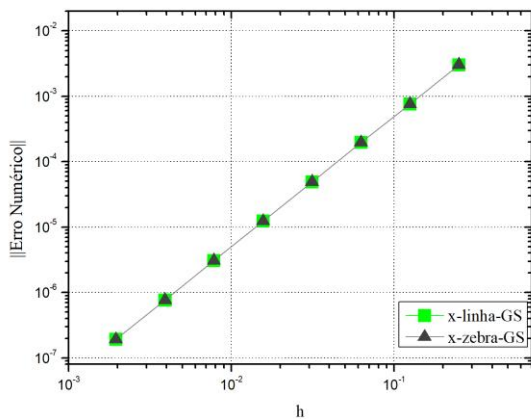


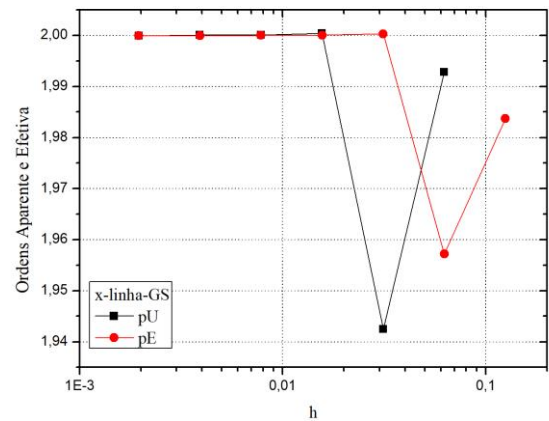
Figura 1. Erro numérico para MG para os *solvers* x-linha-GS e x-zebra-GS

A partir dos resultados analisados, ilustrados na Fig. 1, o comportamento do erro de discretização está de acordo com o esperado. Ou seja, o erro de discretização diminui com o refinamento da malha, para todos os *solvers* estudados.

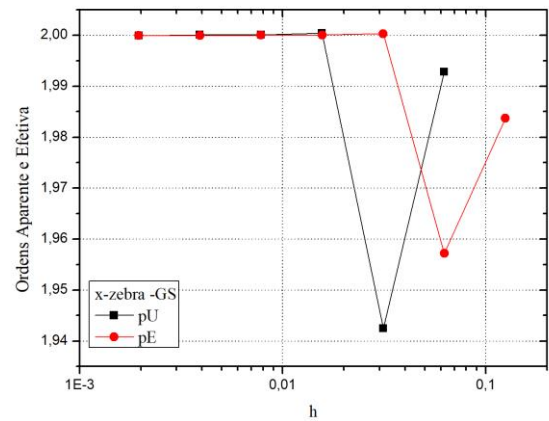
- Ordem aparente e ordem efetiva

Segundo [13], para verificar a solução numérica pode-se utilizar o estimador de Richardson baseado na ordem aparente do erro numérico, $p_U = \log \left(\frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2} \right) / \log(q)$ e a ordem efetiva, $p_E = \log \left(\frac{\phi - \phi_2}{\phi - \phi_1} \right) / \log(q)$, em que ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 representam três soluções em três malhas distintas com elementos de tamanho h_1, h_2 e h_3 , respectivamente e razão

de refinamento $q = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_3}{h_2}$. Considerando-se como variável de interesse o erro numérico ($\|\text{Erro}\|_\infty$), foram obtidos os seguintes resultados, os quais podem ser visualizados na Fig. 2.



(a)



(b)

Figura 2. Ordem efetiva e aparente para a norma infinito com $\varepsilon = 1$ e (a) *solvers* x-linha-GS e (b) x-zebra-GS

Como pode ser observado nos gráficos apresentados na Fig. 2, as ordens de todas as variáveis de interesse referentes aos *solvers* estudados tendem ao valor assintótico, mediante o refinamento da malha. Em todos os casos, as ordens efetiva e aparente do erro de discretização tendem à sua ordem assintótica $p_L = 2$. Para os problemas com anisotropia os resultados obtidos apresentaram comportamento similar ao apresentado nos gráficos da Fig. 2.

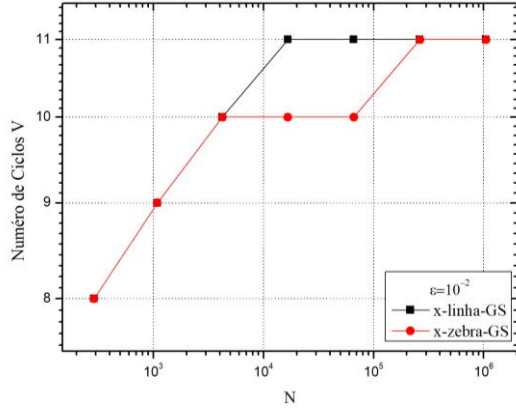
VI. RESULTADOS

Para obter os resultados a seguir foram realizadas diversas simulações com número de iterações internas $\nu = \nu_1 + \nu_2 = 2$, critério de parada $tol = 10^{-10}$ e número de níveis máximo (L). Para a análise da influência do número de

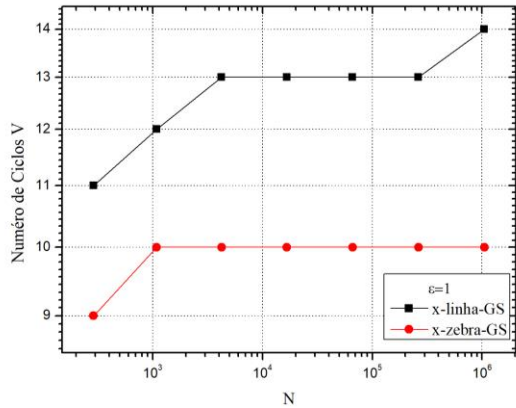
variáveis sobre o t_{CPU} e o número de ciclos V em cada *solver*, utilizou-se malhas com 16×16 a 2048×2048 . Os resultados obtidos para o fator de convergência assintótica são relativos à malha 1024×1024 . É apresentada também uma comparação entre o desempenho dos *solvers* x-linha-GS e x-zebra-GS.

- Comparação do número de ciclos V em cada *solver*

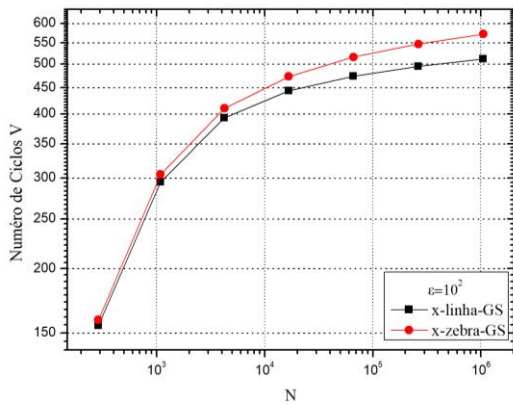
O número de ciclos V, para cada tamanho de problema e cada *solver*, é apresentado nos gráficos da Fig. 3.



(a)



(b)



(c)

Figura 3. Número de ciclos V versus número de nós para (a) $\epsilon = 0.01$, (b) $\epsilon = 1$ e (c) $\epsilon = 100$

Nota-se que na Fig. 3 (a), os *solvers* x-linha-GS e x-zebra-GS são muito eficientes. Para o problema isotrópico, Fig. 3 (b), os dois *solvers* convergem rapidamente, pode-se perceber ainda que o número de ciclos V é grosseiramente constante em relação a N . Já na Fig. 3 (c), problemas anisotrópicos, com fortes anisotropias ($\epsilon \rightarrow \infty$), ambos os *solvers* necessitam de muitos ciclos V para o problema convergir.

-Número de variáveis (N)

Para avaliar o efeito do número de incógnitas sobre o t_{CPU} foram realizadas diversas simulações considerando-se problemas isotrópicos ($\epsilon = 1$) e anisotrópicos ($\epsilon = 0,01$ e $\epsilon = 100$). Os resultados obtidos podem ser observados Fig. 4.

Pode-se observar nos gráficos da Fig. 4 que em ambos os problemas isotrópico ($\epsilon = 1$) e anisotrópico ($\epsilon = 100$ e $\epsilon = 0,01$) o t_{CPU} é menor para o *solver* x-zebra-GS, tornando-o mais eficiente em relação *solver* x-linha-GS. Conclui-se que, independente do ϵ em questão, à medida que N aumenta, o t_{CPU} também aumenta.

Com os resultados do t_{CPU} obtidos com os *solvers* x-linha-GS e x-zebra-GS foi feito um ajuste geométrico do tipo:

$$t_{CPU} = cN^p \quad (10)$$

onde, c é o coeficiente relativo ao método e ao *solver*, p representa a ordem de complexidade do *solver* associado ao MG ou a inclinação da curva de ajuste e N é a dimensão do problema. Para o método MG o valor ideal é $p = 1$, o que indica que o t_{CPU} cresce linearmente com o aumento de N [5].

Os valores obtidos para p e c , mediante o ajuste, para cada problema anisotrópico e os *solvers* x-linha-GS e x-zebra-GS são mostrados na Tabela I.

TABELA I: ORDEM DE COMPLEXIDADE (p) E O COEFICIENTE (c), EM RELAÇÃO AO COEFICIENTE DE ANISOTROPIA (ϵ)

ϵ	x-linha-GS		x-zebra-GS	
	p	c	p	c
0,01	1,281	$1,81 \times 10^{-6}$	1,057	$9,84 \times 10^{-6}$
1	1,227	$4,03 \times 10^{-6}$	1,007	$1,67 \times 10^{-5}$
100	1,314	$4,86 \times 10^{-5}$	1,12	$2,22 \times 10^{-4}$

Mediante os resultados da Tabela I observa-se que os valores encontrados para o coeficiente p estão de acordo com os valores teóricos, para os casos estudados. Estes resultados permitem concluir que o método MG foi implementado corretamente. Percebe-se ainda que o *solver* x-zebra-GS tem melhor desempenho em todos os problemas comparados com o *solver* x-linha-GS.

Pelos resultados apresentados nesta tabela, nota-se ainda que para o *solver* x-zebra-GS o método MG apresentou melhor desempenho para o problema isotrópico, pois neste caso a ordem de complexidade se aproxima da unidade. Comparando os problemas anisotrópicos, a ordem de

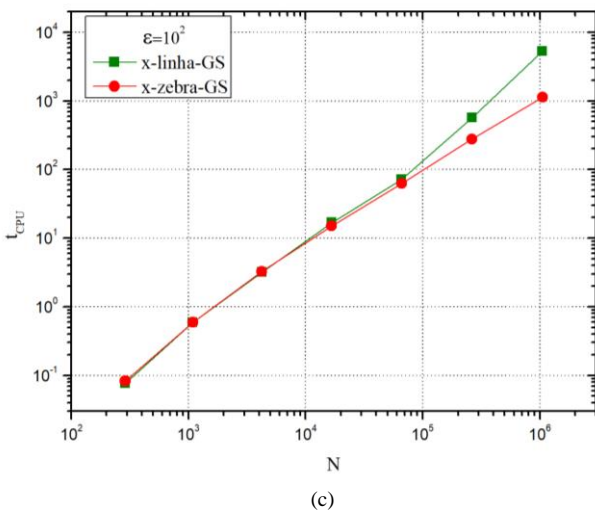
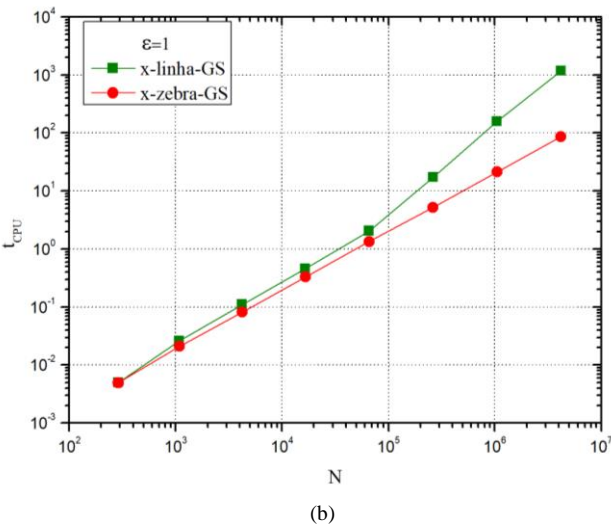
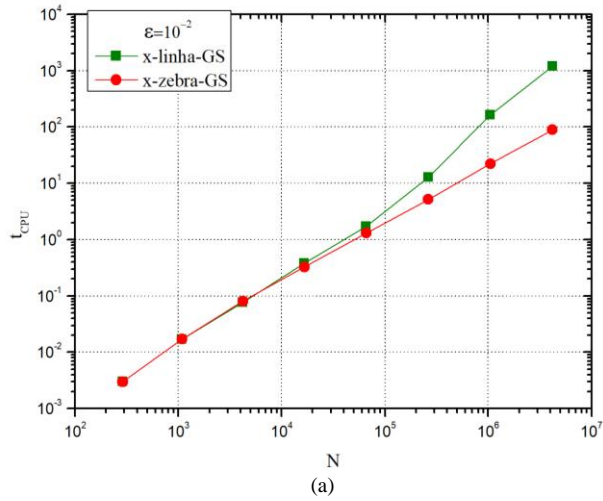


Figura 4. $t_{cpu}(s)$ versus número de nós (N) (a) para $\varepsilon = 0.01$, (b) $\varepsilon = 1$ e (c) $\varepsilon = 100$

complexidade foi melhor ($p \approx 1$) para $\varepsilon \rightarrow 0$, confirmando a informação apresentada na Fig. 4.

Fator de convergência assintótica

No gráfico da Fig. 5, os dois *solvers* estudados, mostra-se o fator de convergência de duas malhas, (ρ_{2g}), previsto pelo LFA, juntamente com o fator de convergência assintótica calculado experimentalmente usando uma malha fina obtida com 10 níveis de refinamento, (ρ_h). Estes resultados são mostrados para diferentes números de coeficientes de anisotropia (ε).

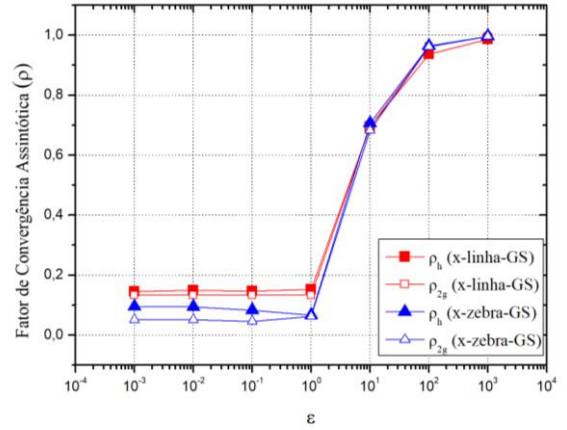


Figura 5. Fator de convergência assintótica (ρ) versus coeficiente anisotrópico (ε)

A partir da Fig. 5, observa-se que a LFA fornece previsões muito precisas dos fatores de convergência assintótica calculados experimentalmente.

Conclui-se que para problemas anisotrópicos, no caso em que $\varepsilon \rightarrow \infty$, os dois *solvers* não possuem um bom fator de convergência. Porém, para $\varepsilon \rightarrow 0$, os dois *solvers* tem melhores fatores de convergência se comparado com o caso $\varepsilon \rightarrow \infty$. Percebe-se ainda que o solver x-zebra-GS é o mais eficiente em relação aos *solvers* estudados quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o que é confirmado com o t_{CPU} apresentado na Fig. 4 (a).

VII. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi analisado o efeito da anisotropia física sobre o método MG para o problema de difusão bidimensional. Inicialmente foi realizada uma LFA para determinar o fator de convergência assintótica para duas malhas (ρ_{2g}). Em seguida o fator de convergência foi calculado experimentalmente (ρ_h). Também foi realizada uma análise de complexidade, para verificar o efeito do número de incógnitas no t_{CPU} . O método MG geométrico foi empregado com CS, ciclo V, estimativa inicial nula e $r = 2$. Os *solvers* estudados foram x-linha-GS e x-zebra-GS. As conclusões obtidas são apresentadas a seguir:

- Os resultados obtidos via LFA estão de acordo com os resultados obtidos experimentalmente, o que demonstra a

importância da LFA na obtenção de parâmetros para a elaboração de um projeto de método MG eficiente.

- O número de ciclos V cresce apenas em uma direção ($\varepsilon \rightarrow \infty$), mostrando vantagem em relação a outra direção ($\varepsilon \rightarrow 0$).

- A ordem de complexidade p do método MG para x-zebra-GS em problemas anisotrópicos com $\varepsilon \rightarrow 0$ se aproxima mais da unidade do que para problemas com $\varepsilon \rightarrow \infty$, tornando o desempenho do MG para o primeiro problema melhor.

- Para o problema isotrópico ($\varepsilon = 1$), os *solvers* estudados possuem um bom comportamento em relação aos parâmetros analisados. Para o problema anisotrópico ($\varepsilon \rightarrow \infty$) ambos os *solvers* têm um comportamento ruim, pois o t_{CPU} , número de ciclos V e fator de convergência são piores comparados com os outros problemas. No entanto quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o *solver* x-zebra-GS tem o melhor desempenho. Em trabalhos futuros será analisado o *solver* na direção y , em que acredita-se ter um bom desempenho quando $\varepsilon \rightarrow \infty$.

AGRADECIMENTOS

A primeira autora agradece à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de estudo. Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos para Engenharia (PPGMNE) da UFPR.

REFERÊNCIAS

- [1] A. O. Fortuna, Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos. São Paulo: Edusp, 2000.
- [2] J. H. Ferziger and M. Peric, Computational methods for fluid dynamics. 3ª ed., New York: Springer, 2002.
- [3] W. L. Briggs, V. E. Henson and S. F. McCormick, A Multigrid Tutorial, 2ª ed., SIAM, 2000.
- [4] U. Trottenberg, C. Oosterlee and A. Schüller, Multigrid. Academic Press, 2001.
- [5] G. Vassoler-Rutz and M. A. V. Pinto, “Análise de Fourier Local e otimização de parâmetros do método multigrid para a equação de difusão anisotrópica”. XXXVII CILAMCE, 2016.
- [6] P. Wesseling and C. W. Oosterlee, Geometric Multigrid with Applications to Computational Fluid Dynamics, Journal of Computation and Applied Mathematics, vol. 128, 2001, pp. 311-334.
- [7] R. Wienands and J. Wolfgang, Practical fourier analysis for multigrid methods. Chapman & Hall/CRC, 2005.
- [8] M. A. V. Pinto and C. H. Marchi, “Efeito dos Parâmetros do Método Multigrid CS e FAS sobre o tempo de CPU para a Equação de Laplace Bidimensional”. Proceedings of ENCIT, 2006.
- [9] F. Oliveira, M. A. V. Pinto, C. H. Marchi and L. K. Araki, “Optimized partial semicoarsening multigrid algorithm for heat diffusion problems and anisotropic grids”. Applied Mathematical Modelling, vol. 36, 2012, pp. 4665–4676.
- [10] G. Vassoler-Rutz, M. A. V. Pinto and R. Suero, “Comparison of the physical anisotropy of multigrid method for two-dimensional diffusion equation”. Proceedings of COBEM, 2015.
- [11] R. L. Burden and J. D. Faires, Análise Numérica, Tradutor: Ricardo Lenzi Tombi. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2008.
- [12] S. F. T. Gonçalves, “Estudo de parâmetros do método multigrid geométrico para equações 2D em CFD e volumes finitos”. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.
- [13] C. H. Marchi, “Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos”. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina/Florianópolis, 2001