

DIEGO FERNANDO MORO

**DEDUÇÃO DA NOVA EQUAÇÃO RESOLVIDA NO
EMPUXO1P3, CONSIDERANDO APENAS A FASE
GASOSA DO PROPELENTE**

Relatório do grupo de pesquisa CFD,
propulsão e aerodinâmica de foguetes , Setor
de Tecnologia da Universidade Federal do
Paraná.

CURITIBA

17 JUL 2015

SUMÁRIO

1 Dedução anterior.....	2
2 Relato sobre o uso da versão anterior para duplicar os resultados dos TAs com tubeira de alumínio e os PVCs	4
3 Proposta e teste da alteração na massa gerada de gases	4
4 Comparações	5
4.1 Resultados para o TE do dia 2015/07/09 com os TAs 157 a 164	5
4.2 Resultados para o TE do dia 2015/07/09 com os PVCs 1 a 9	7
5 Discussão e conclusões.....	8

1 DEDUÇÃO ANTERIOR

Nas versões anteriores do programa Empuxo_1px a dedução da equação do empuxo era a seguinte.

Aplica-se a conservação da massa, na forma:

$$\dot{m}_g = \frac{d}{dt}(M_s) + \dot{m}_{sai} \quad (1)$$

Onde:

m_g : Massa gerada de gases do propelente

m_{sai} : Massa de gases que sai pela tubeira

$d(M_s)/dt$: Variação da massa com o tempo

A parcela gerada de gases é dada pela Eq. 2:

$$\dot{m}_g = A_b \rho_p r \quad (2)$$

A parcela de gases que deixa a tubeira é dada pelo escoamento bloqueado 1D, Eq. 3:

$$\dot{m}_{sar} = P_0 A_t \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (3)$$

A variação da massa com o tempo é dada pela Eq. 4:

$$\frac{d}{dt}(M_s) = \frac{d}{dt}(\rho_0 v_0) = \rho_0 \frac{d}{dt}(v_0) + v_0 \frac{d}{dt}(\rho_0) \quad (4)$$

O volume da câmara varia conforme o propelente é queimado na forma da Eq. 5:

$$\frac{d}{dt}(v_0) = A_b r \quad (5)$$

Segundo a lei dos gases perfeitos a massa específica de estagnação fica na forma da Eq. 6 ao considerar a constante do gás e a temperatura de estagnação independentes do tempo:

$$\frac{d}{dt}(\rho_0) = \frac{d}{dt}\left(\frac{P_0}{RT_0}\right) = \frac{1}{RT_0} \frac{d}{dt}(P_0) \quad (6)$$

Substituindo as Eqs. 5 e 6 na Eq. 4 teremos a Eq. 7:

$$\frac{d}{dt}(M_s) = \rho_0 A_b r + v_0 \frac{1}{RT_0} \frac{d}{dt}(P_0) \quad (7)$$

Substituindo as Eqs. 2, 3 e 7 e a Lei de Saint Robert para a taxa de queima ($r = aP_0^n$) na Eq. 1, teremos a Eq. 8:

$$A_b \rho_p a P_0^n = \rho_0 A_b a P_0^n + v_0 \frac{1}{RT_0} \frac{d}{dt}(P_0) + P_0 A_t \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{-\gamma+1/\gamma-1}} \quad (8)$$

Isolando na Eq. 8 a derivada temporal, aplicando a lei dos gases perfeitos na massa específica de estagnação e reorganizando os termos, teremos a Eq. 9:

$$\frac{v_0}{RT_0} \frac{d}{dt}(P_0) = A_b a \left(P_0^n \rho_p - \frac{P_0^{n+1}}{RT_0} \right) - P_0 A_t \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{-\gamma+1/\gamma-1}} \quad (9)$$

Integrando a Eq. 9 entre o tempo t e o delta t teremos a Eq. 10:

$$\begin{aligned} (v_0 P_0)_t^{t+\Delta t} &= \left(A_b a (RT_0 P_0^n \rho_p - P_0^{n+1}) - RT_0 P_0 A_t \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{-\gamma+1/\gamma-1}} \right) \Delta t \\ v_0^{t+\Delta t} P_0^{t+\Delta t} - v_0^t P_0^t &= \left(A_b a (RT_0 P_0^n \rho_p - P_0^{n+1}) - RT_0 P_0 A_t \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{-\gamma+1/\gamma-1}} \right) \Delta t \end{aligned} \quad (10)$$

O aplicativo Empuxolp2 e versões anteriores resolvem a Eq. 10 numericamente usando o método Newton-Raphson.

2 RELATO SOBRE O USO DA VERSÃO ANTERIOR PARA DUPLICAR OS RESULTADOS DOS TAs COM TUBEIRA DE ALUMÍNIO E OS PVCS

Utilizando no programa Empuxo 1p2 os parâmetros de taxa de queima médios obtidos pelos testes anteriores com o MTP, não foi possível duplicar os resultados dos TAs com tubeira de alumínio e os PVCS.

Tais parâmetros foram alterados portanto para dar o mesmo impulso total dos testes e o resultado foi que o tempo de queima era excessivamente maior que o real. Ao alterar-se os parâmetros para igualar o tempo de queima, o impulso total dava muito maior.

Foi cogitado após estas análises que o programa não está considerando uma parcela da realidade: a fração de condensado e que os parâmetros da taxa de queima dizem apenas o quão rápido o propelente é consumido e gera gases no motor-foguete

A fração de condensado não contribui em nada para a pressurização no motor e portanto não faz sentido algum dizer que todo o propelente que é consumido pela taxa de queima gera gases, apenas uma parcela de gás é gerada, a outra torna-se condensado.

3 PROPOSTA E TESTE DA ALTERAÇÃO NA MASSA GERADA DE GASES

Propôs-se então a seguinte alteração na Eq. 2, a massa gerada de gases real Eq. 11:

$$\dot{m}_g = A_b \rho_p r (1 - \chi) \quad (11)$$

Onde:

X: Fração de condensado do propelente

Também foi considerado um fluxo de massa mais genérico para o escoamento não bloqueado, que é dependente do número de Mach, na forma da Eq. 12:

$$\dot{m}_{sar} = M^* P_0 A_t \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^{*2}\right)^{-\gamma+1/\gamma-1}} \quad (12)$$

Desta, forma substituindo as Eq. 11, 12 e 7 na Eq. 1, teremos a Eq. 13:

$$A_b \rho_p r (1 - \chi) = \rho_0 A_b r + v_0 \frac{1}{RT_0} \frac{d}{dt} (P_0) + M^* P_0 A_t \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^{*2}\right)^{-\gamma+1/\gamma-1}} \quad (13)$$

Reorganizando e substituindo os termos da Eq. 13 e isolando a derivada temporal, teremos a Eq. 14:

$$v_0 \frac{d}{dt} (P_0) = A_b a (\rho_p P_0^n (1 - \chi) RT_0 - P_0^{n+1}) - M^* P_0 RT_0 A_t \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^{*2}\right)^{-\gamma+1/\gamma-1}} \quad (13)$$

A Eq. 9 foi inserida de forma reorganizada aqui para conveniência de comparação:

$$v_0 \frac{d}{dt} (P_0) = A_b a (\rho_p P_0^n RT_0 - P_0^{n+1}) - RT_0 P_0 A_t \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{-\gamma+1/\gamma-1}} \quad (9)$$

Podemos portanto integrar a Eq. 13 no tempo, gerando a Eq. 14:

$$v_0^{t+\Delta t} P_0^{t+\Delta t} - v_0^t P_0^t = \left(A_b a (\rho_p P_0^n (1 - \chi) RT_0 - P_0^{n+1}) - M^* P_0 RT_0 A_t \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^{*2}\right)^{-\gamma+1/\gamma-1}} \right) \Delta t \quad (14)$$

Basta portanto resolver numericamente a Eq. 14 com o método Newton-Raphson.

4 COMPARAÇÕES

Nesta seção são feitas algumas comparações com o grão tubular perfeito, para duplicar os resultados de alguns TE. Os parâmetros da taxa de queima média utilizados são: $a = 2.65615093030401E-05$ (m/(Pa.s)) e $n = 3.83396151958658E-01$ (adimensional).

4.1 RESULTADOS PARA O TE DO DIA 2015/07/09 COM OS TAS 157 A 164

É replicado o TE dos TAs 157 a 164, com a dedução anterior e na nova dedução do Empuxo 1p3. Os dados reais do TE são dados na Tab.1 abaixo:

Tabela 1 Dados do TE dos TAs 157 a 164

TA	Lgrao (mm)	Dgmed (mm)	Patm (bar)	Mp (g)	Mej (g)	rop (kg/m3)	lt (N.s)	Fmed (N)	tq (s)	fm (g/s)	c (m/s)	ls (s)	CLASSE
157	12.31	2.270	0.9065	2.01	1.83	1443.73	0.933	0.826	1.130	1.619	509.8994	47.3228	1/2 A 0.8
158	12.81	2.250	0.9067	2.00	1.86	1380.47	1.016	0.950	1.070	1.738	546.3087	51.7907	1/2 A 1.0
159	12.52	2.250	0.9067	2.00	1.83	1412.45	0.952	0.966	0.985	1.858	520.1217	48.5129	1/2 A 1.0
160	12.62	2.210	0.9069	2.00	1.77	1401.26	0.819	0.762	1.075	1.647	462.7878	41.7500	1/2 A 0.8
161	23.06	2.275	0.9067	3.80	3.65	1457.04	2.579	2.324	1.110	3.288	706.6446	69.1897	B 2.3
162	23.57	2.210	0.9069	3.81	3.63	1429.27	2.501	2.943	0.850	4.271	689.0193	66.9182	B 2.9
163	24.5	2.160	0.9069	3.81	3.61	1375.01	2.578	2.802	0.920	3.924	714.0881	68.9708	B 2.8
164	23.47	2.215	0.9069	3.79	3.51	1427.82	2.580	2.434	1.060	3.311	735.1248	69.4001	B 2.4

Onde: o diâmetro interno utilizado é o de 13 mm (o nominal dos TAs) e o diâmetro da alma é de 5 mm (nominal da alma).

Os resultados obtidos com a dedução anterior para os TAs 157 a 164 estão mostrados na Tab. 2 abaixo:

Tabela 2 Resultados obtidos com a dedução anterior para os TAs 157 a 164

TA	tq (s)	Fmed (N)	Fmax (N)	lt (N.s)	Pmed (bar)	Pmax (bar)	ls (s)	c (m/s)	CLASSE
157	1.07	1.90	4.184	2.032	4.302	8.190	96.4223	945.5797	A 1.9
158	1.06	1.92	4.218	2.036	4.394	8.366	97.1564	952.7791	A 1.9
159	1.06	1.92	4.212	2.032	4.391	8.357	97.1347	952.5656	A 1.9
160	1.04	2.00	4.369	2.072	4.661	8.871	99.1699	972.5247	A 2.0
161	0.72	6.82	14.153	4.928	12.077	23.003	126.9947	1245.3925	B 6.8
162	0.70	7.21	14.922	5.026	13.300	25.348	129.4131	1269.1087	C 7.2
163	0.68	7.51	15.507	5.097	14.305	27.292	131.1973	1286.6063	C 8.0
164	0.70	7.12	14.746	4.996	13.103	24.985	129.0217	1265.2704	C 7.1

Os resultados obtidos com a nova dedução para os TAs 157 a 164 estão mostrados na Tab. 3 abaixo:

Tabela 3 Resultados obtidos com a nova dedução para os Tas 157 a 164

TA	tq (s)	Fmed (N)	Fmax (N)	lt (N.s)	Pmed (bar)	Pmax (bar)	ls (s)	c (m/s)	ls, mp(s)	c, mp (m/s)	CLASSE
157	1.36	0.76	1.70	1.03	2.24	4.02	71.60	702.20	52.33	513.16	1/2 A 0.8
158	1.36	0.76	1.72	1.04	2.28	4.10	72.37	709.67	52.77	517.54	1/2 A 0.8
159	1.36	0.76	1.72	1.04	2.28	4.10	72.37	709.69	52.78	517.61	1/2 A 0.8
160	1.33	0.80	1.78	1.06	2.40	4.33	74.54	730.94	54.02	529.75	1/2 A 0.8
161	0.96	2.77	5.65	2.65	5.76	10.47	106.69	1046.31	71.07	696.98	B 2.8
162	0.92	2.93	5.94	2.70	6.31	11.46	109.51	1073.95	72.38	709.77	B 2.9
163	0.90	3.05	6.16	2.75	6.76	12.28	111.54	1093.81	73.49	720.68	B 3.0
164	0.93	2.90	5.87	2.69	6.22	11.31	109.08	1069.69	72.29	708.88	B 2.9

Onde:

Is,mp: Impulso específico com base na massa total de propelente (gás + condensado) que é o mais real

c,mp: Velocidade de ejeção efetiva média com base na massa total de propelente (gás + condensado) que é o mais real

Pode-se observar que a nova dedução aproxima-se muito mais do comportamento real do motor-foguete que a dedução anterior, para facilitar a comparação foi feita uma comparação de impulso total abaixo:

Tabela 4 Comparação entre o impulso total experimental e via deduções do código Empuxo_1pX

TA	Experimental	Ded. Antiga	Erro Ded. Antiga	Nova Ded.	Erro Nova Ded.
157	0.933	2.032	54.07%	1.03	9.54%
158	1.016	2.036	50.10%	1.04	1.83%
159	0.952	2.032	53.17%	1.04	8.05%
160	0.819	2.072	60.47%	1.06	22.69%
161	2.579	4.928	47.67%	2.65	2.61%
162	2.501	5.026	50.23%	2.70	7.51%
163	2.578	5.097	49.42%	2.75	6.12%
164	2.580	4.996	48.35%	2.69	3.96%

4.2 RESULTADOS PARA O TE DO DIA 2015/07/09 COM OS PVCS 1 A 9

É replicado o TE dos PVCs 2 a 9, com a dedução anterior e na nova dedução do Empuxo 1p3. Os dados reais do TE são dados na Tab.5 abaixo:

Tabela 5 Dados do TE dos PVCs 2 a 9

PVC	Dg(mm)	Lgrao (mm)	Patm (bar)	Patm (bar)	Mp (g)	Mej (g)	It (N.s)	Fmed (N)	tq (s)	fm (g/s)	c (m/s)	Is (s)	CLASSE
2	3.500	42.36	1550.70	0.9075	13.62	13.94	6.727	2.718	2.475	5.633	482.4787	50.3451	C 2.7
3	3.500	40.53	1620.72	0.9074	13.62	13.97	8.344	4.636	1.800	7.759	597.4087	62.4494	C 4.6
5	3.500	29.42	1673.74	0.9075	10.21	10.19	5.049	2.457	2.055	4.956	495.7587	50.4123	C 2.5
6	3.500	32.48	1516.06	0.9075	10.21	10.41	5.341	2.811	1.900	5.481	512.8715	53.3251	C 2.8
8	3.500	23.21	1415.07	0.9075	6.81	6.80	1.534	0.691	2.220	3.064	225.5762	22.9641	A 0.7
9	3.500	23.09	1422.42	0.9075	6.81	6.73	2.518	1.343	1.875	3.591	374.0238	37.6957	B 1.3

Onde: o diâmetro interno utilizado é o de 17 mm (o nominal dos PVCs) e o diâmetro da alma é de 5 mm (nominal da alma), notando que os PVCs faltantes foram utilizados em teste de resistência e que o diâmetro da garganta erode durante a queima, gerando resultados tão discrepantes.

Os resultados obtidos com a dedução anterior para os PVCs 2 a 9 estão mostrados na Tab. 6 abaixo:

Tabela 6 Resultados obtidos com a dedução anterior para os PVCs 2 a 9

PVC	tq (s)	Fmed (N)	Fmax (N)	It (N.s)	Pmed (bar)	Pmax (bar)	Is (s)	c (m/s)	CLASSE
2	1.10	16.14	38.636	17.756	12.008	26.066	124.9312	1225.1568	D 16
3	1.10	16.16	38.673	17.763	12.025	26.088	125.0096	1225.9251	D 16
5	1.31	9.22	22.589	12.101	7.530	16.349	111.8503	1096.8764	D 9.2
6	1.31	9.20	22.558	12.095	7.519	16.330	111.7930	1096.3144	D 9.2
8	1.69	3.97	10.276	6.714	3.870	8.414	89.1696	874.4555	C 4.0
9	1.69	3.97	10.277	6.714	3.870	8.415	89.1693	874.4517	C 4.0

Os resultados obtidos com a nova dedução para os PVCs 2 a 9 estão mostrados na Tab. 7 abaixo:

Tabela 7 Resultados obtidos com a nova dedução para os PVCs 2 a 9

PVC	tq (s)	Fmed (N)	Fmax (N)	It (N.s)	Pmed (bar)	Pmax (bar)	Is (s)	c (m/s)	Is, mp(s)	c, mp (m/s)	CLASSE
2	1.45	6.57	15.37	9.54	5.73	11.78	104.34	1023.23	71.44	700.62	C 6.6
3	1.45	6.57	15.37	9.53	5.73	11.77	104.38	1023.66	71.37	699.86	C 6.6
5	1.71	3.75	9.11	6.41	3.72	7.62	89.17	874.48	63.97	627.37	C 3.8
6	1.71	3.75	9.11	6.41	3.71	7.62	89.14	874.20	64.02	627.79	C 3.8
8	2.11	1.61	4.18	3.40	2.10	4.12	66.37	650.83	50.91	499.26	B 1.6
9	2.11	1.61	4.18	3.40	2.10	4.12	66.37	650.83	50.91	499.27	B 1.6

Pode-se observar que a nova dedução aproxima-se mais do comportamento real do motor-foguete que a dedução anterior, para facilitar a comparação foi feita uma comparação de impulso total abaixo:

Tabela 8 Comparação entre o impulso total experimental e via deduções do código Empuxo_1pX

PVC	Experimental	Ded. Antiga	Erro Ded. Antiga	Nova Ded.	Erro Nova Ded.
2	6.727	12.008	43.98%	9.54	29.51%
3	8.344	12.025	30.61%	9.53	12.46%
5	5.049	7.530	32.95%	6.41	21.17%
6	5.341	7.519	28.97%	6.41	16.67%
8	1.534	3.870	60.36%	3.40	54.88%
9	2.518	3.870	34.93%	3.40	25.93%

5 DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Este relatório mostrou uma nova dedução para a equação transiente da pressão de estagnação ao considerar a massa gerada apenas de gases, descontando a parcela do condensado.

A **dedução anterior** não apresenta uma boa concordância com os resultados experimentais, no caso dos TAs, o **maior erro do Impulso Total** estimado em relação ao real é de **60,5% no TA 160** e o **menor erro** é de **47,7% no TA 161**. E no caso dos PVCs o **maior erro** foi de **60,4% no PVC 8** e o **menor erro** é de **29,0% no PVC6**.

A **nova dedução** apresenta uma boa concordância com os resultados experimentais, no caso dos TAs, o **maior erro do Impulso Total** estimado em relação ao real é de **22,7% no TA 160** e o **menor erro** é de **1,8% no TA 158**. E no caso dos PVCs o **maior erro** foi de **54,9% no PVC 8** e o **menor erro** é de **12,5% no PVC 3**.

O maior erro no impulso total dos PVC pode ser explicado pela erosão da garganta de durepóxi.

A nova dedução aproxima-se mais do resultado experimental do que a dedução anterior e pode ser utilizada para o projeto de novos motores.