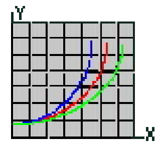
Web site de foguetaria experimental de Richard Nakka



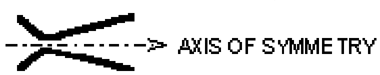
Teoria de motor-foguete sólido

<u>5 Teoria de Tubeira</u>

A tubeira do foguete pode certamente ser descrita como o símbolo de excelente simplicidade. A função principal de uma tubeira é canalizar e acelerar os produtos da combustão produzidos pela queima do propelente, de tal modo a maximizar a velocidade da exaustão na saída, à velocidade supersônica. A tubeira de foguete familiar, também conhecida como *tubeira convergente-divergente ou de Laval*, cumpre este feito notável com uma *geometria* simples. Em outras palavras, ela faz isto variando a área da seção transversal (ou diâmetro) em uma forma precisa.

A análise de uma tubeira de foguete envolve o conceito de "*escoamento de fluido compressível unidimensional, permanente, de um gás ideal*". Resumidamente, isto significa que:

- O escoamento do *fluido* (gases de exaustão + partículas condensadas) é constante e não varia no tempo durante a queima.
- Escoamento unidimensional significa que a direção do escoamento é ao longo de uma linha reta. Para uma tubeira, o escoamento é assumido ser ao longo do eixo de simetria.



<u>Tradução</u>:
AXIS OF SIMMETRY: eixo de simetria

- O escoamento é *compressível*. O conceito de escoamento de fluido compressível é geralmente empregado para gases se movendo em velocidade alta (geralmente supersônica), ao contrário do conceito de escoamento *incompressível*, que é usado para líquidos e gases se movendo em velocidades bem abaixo da velocidade sônica. Um fluido compressível apresenta variação significativa na massa específica, um fluido incompressível, não.
- O conceito de um gás ideal é uma hipótese simplificativa, um que permite o uso de uma relação direta entre pressão, massa específica e temperatura, que são propriedades particularmente importantes na análise do escoamento em uma tubeira.

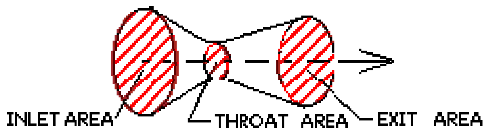
Propriedades do fluido, como velocidade, massa específica, pressão e temperatura, em escoamento de fluido compressível, são afetadas por

1. Variação da área da seção transversal
2. Fricção
3. Perda de calor para as vizinhanças

O objetivo do projeto da tubeira de foguete é acelerar os produtos da combustão a uma **velocidade na saída tão alta quanto possível**. Isto é obtido projetando o perfil geométrico da tubeira que é necessário com a condição de que *escoamento isentrópico* é para ser almejado. Escoamento isentrópico é considerado ser o escoamento que é dependente somente da *área da seção transversal* -- que o escoamento seja invíscido e adiabático (sem perda de calor). Portanto, na tubeira real, é necessário minimizar efeitos friccionais, perturbações no escoamento e condições que podem levar a perdas por choque. Adicionalmente, perdas por transferência de calor são para ser minimizadas. Desta forma, as propriedades do escoamento são quase isentrópicas, e são simplesmente afetadas

somente pela variação da área da seção transversal quando o fluido se move através da tubeira.

Áreas da seção transversal de uma tubeira típica de interesse particular são mostradas na figura abaixo.

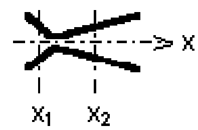


Tradução:
INLET AREA: área da entrada
THROAT AREA: área da garganta
EXIT AREA: área da saída

A análise do escoamento de fluido compressível envolve quatro equações de interesse particular:

1. Energia
2. Continuidade
3. Quantidade de movimento linear
4. Equação de estado

A equação da energia é uma declaração do princípio de conservação da energia. Para escoamento adiabático entre quaisquer dois pontos, x_1 e x_2, ela é dada por



$$h_1 - h_2 = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = C_p\left(T_1 - T_2\right) \tag{5.1}$$

onde h representa a entalpia do fluido (que pode ser considerada a energia disponível para transferência de calor), v é a velocidade do escoamento na direção x, C_p é o calor específico do fluido, e T é a temperatura.

Esta equação proporciona um entendimento valioso de como uma tubeira de foguete funciona. Olhando nos dois primeiros termos, mostra que a variação (diminuição) da entalpia é igual à variação (aumento) da energia cinética. Em outras palavras, o calor do fluido está sendo usado para acelerar o escoamento a uma velocidade maior. O terceiro termo representa a variação (diminuição) resultante na temperatura do escoamento. O calor específico pode ser aproximado ser constante, e é uma propriedade determinada pela composição dos produtos da combustão.

É evidente, então, que as propriedades de um fluido (por exemplo, a temperatura) são uma função da velocidade do escoamento. Na descrição do estado de um fluido em qualquer ponto ao longo do seu escoamento, é conveniente considerar o *estado de estagnação* como um estado de referência. As propriedades de estagnação podem ser consideradas como propriedades que resultariam se o fluido fosse (isentropicamente) desacelerado à velocidade zero (isto é, escoamento estagnado).

A *temperatura de estagnação* (T_o) é obtida da equação da energia (fazendo $v_2 = 0$) para ser

$$T_o = T + \frac{v^2}{2C_p} \tag{5.2}$$

Para um processo de escoamento isentrópico, a seguinte relação importante entre propriedades de estagnação para temperatura, pressão e massa específica é válida

$$\frac{T_o}{T} = \left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^{k-1} \tag{5.3}$$

onde ***k*** é o todo importante **razão entre calores específicos**, também referido como o **expoente isentrópico**, definido como

$$k = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p}{C_p - R} \tag{5.4}$$

Ambos C_p e R (constante do gás específico) são propriedades determinadas pela composição dos produtos da combustão, onde $R = R'/M$, onde R' é a *constante universal dos gases* e M é a *massa molecular efetiva* dos produtos da combustão. Se os produtos da combustão contêm uma percentagem apreciável de partículas na fase condensada (fumaça), o valor da massa molecular efetiva (M) deve considerar isso. Também, o k apropriado deve ser usado que leve em conta o escoamento bifásico. A determinação de k e M para os produtos de combustão é detalhado na Web Page Bloco de Notas Técnico #1.

A velocidade sônica local (a) e o número de Mach (M) (definido como a razão da velocidade do escoamento para a velocidade sônica local), são dados por

$$a = \sqrt{kRT} \tag{5.5}$$

$$M = \frac{v}{a} \tag{5.6}$$

Das equações (5.2), (5.3), (5.5) e (5.6), a relação entre temperatura de estagnação (também referida como *temperatura total*) e o número de Mach pode ser escrito como

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \tag{5.7}$$

Pode ser mostrado da primeira e segunda leis da termodinâmica, para qualquer processo isentrópico, que

$$\frac{P}{\rho^k} = \text{constante} \tag{5.8}$$

Das equações (5.7) e (5.8), e da equação de estado para um gás ideal ($P = \rho RT$), a relação entre pressão de estagnação, massa específica e número de Mach pode ser expressa como dada nas duas equações seguintes:

$$\frac{P_o}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{5.9}$$

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{5.10}$$

As equações (5.7), (5.9) e (5.10) são particularmente úteis, pois elas permitem que cada propriedade seja determinada em um escoamento se o número de Mach e as propriedades de estagnação são conhecidas.

As propriedades de estagnação (ou total) T_o, P_o e ρ_o são simplesmente as propriedades que estão presentes na câmara de combustão do foguete, já que a velocidade do escoamento é (considerada ser) zero neste local. Em outras palavras, T_o é a temperatura de combustão do propelente (AFT), P_o é a pressão de câmara, e ρ_o é a massa específica dos produtos de combustão sob condições de câmara.

Outra importante propriedade de estagnação é a *entalpia de estagnação*. Esta é obtida da equação da energia (fazendo $v_2 = 0$)

$$h_o = h + \frac{v^2}{2} \qquad (5.11)$$

Fisicamente, a entalpia de estagnação é a entalpia que seria alcançada se o escoamento (em algum ponto) fosse de algum modo desacelerado à velocidade zero. É útil anotar que a entalpia de estagnação é **constante** através do escoamento na tubeira. Isto também é verdade para as outras propriedades de estagnação (temperatura, pressão e massa específica).

A segunda das quatro equações de interesse considerando escoamento de fluido compressível, como discutido anteriormente, é a equação da continuidade (ou conservação da massa), que é dada por

$$\rho A v = \text{constante} = \rho^* A^* v^* \qquad (5.12)$$

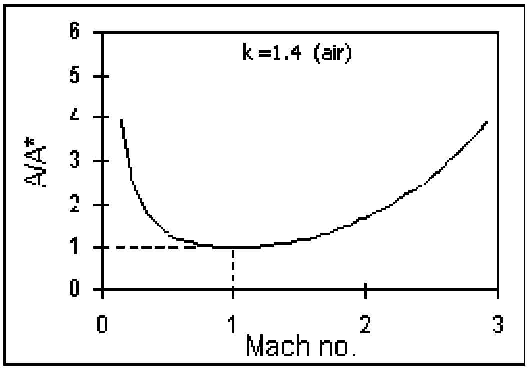
onde A é a área da seção transversal da tubeira, e v é a velocidade do escoamento. Esta equação simplesmente declara que a massa escoando através da tubeira deve ser constante. A “estrela” (asterisco) significa uma assim chamada condição *crítica*, onde o número de Mach é unitário, M = 1 (a velocidade do escoamento é igual à velocidade do som). A importância da condição crítica logo ficará evidente.

Com as equações (5.5), (5.6), (5.7), (5.10) e (5.12), é possível expressar a razão de áreas A/A^* em termos do número de Mach do escoamento. A razão de áreas é simplesmente a área da seção transversal em qualquer ponto x da tubeira dividida pela área da seção transversal onde existe a condição crítica ($M = 1$):

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{1+\frac{k-1}{2}}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \qquad (5.13)$$

Quando um gráfico é feito de A/A^* versus número de Mach, usando esta equação, um resultado muito interessante é obtido! Ele claramente mostra que uma passagem *convergente-divergente* com uma seção de *área mínima* é necessária para acelerar o escoamento de velocidade subsônica para supersônica. O ponto crítico onde o escoamento está na velocidade sônica ($M = 1$ em $A/A^* = 1$) é visto ocorrer na *garganta* da tubeira. Isto mostra a importância da tubeira ter uma seção divergente – sem ela, o escoamento nunca seria maior do que a velocidade sônica!

Escoamento supersônico é atingido somente na porção divergente da tubeira. Já que o número de Mach pode ser determinado ao se conhecer a razão de área, agora é possível plotar a variação da temperatura, pressão e massa específica do fluido através da tubeira, ao se usar as equações (5.7), (5.9) e (5.10). Um gráfico destas propriedades é dado no Apêndice C, para a tubeira Kappa.



<u>Tradução</u>:

air: ar

Mach no.: número de Mach

Das equações (5.11) e (5.12), a velocidade do escoamento na saída da tubeira pode ser expressa por

$$v_e \quad = \quad \sqrt{2(h_x - h_e) + v_x^2} \tag{5.14}$$

onde o subescrito *e* e *x* significam *saída* e qualquer ponto *x* ao longo do eixo da tubeira, respectivamente. Esta equação pode ser colocada em uma forma muito mais útil com o auxílio da equação da energia e a definição de *k*, bem como a equação (5.3).

$$v_e \quad = \quad \sqrt{\frac{2kT_o}{k-1}\left(\frac{R'}{M}\right)\left[1-\left(\frac{P_e}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \tag{5.15}$$

Esta equação é uma das mais úteis, porque ela permite que a **velocidade na saída da tubeira** seja calculada. Em resumo, é necessário conhecer:

- *k*, razão efetiva entre calores específicos dos produtos de exaustão, obtido da análise de combustão. Para a condição de escoamento bifásico, o valor deve ser modificado, como explicado na *Web Page* Teoria de *Escoamento Bifásico.*
- *R'* é a constante universal dos gases (*R'* = 8314 N.m/kmol.K)
- *M* é a massa molecular efetiva dos produtos de exaustão, obtido da análise de combustão, e deve levar em conta a presença de todas as espécies da fase condensada.
- T_o é a temperatura de combustão do propelente, também obtida da análise de combustão.
- P_e e P_o são a pressão na saída da tubeira e a pressão na câmara, respectivamente. Para a maioria dos foguetes amadores, P_e pode ser considerado como a pressão atmosférica ambiente: $P_e = P_a = 1$ atmosfera. P_o pode ser a pressão na câmara medida, a pressão na câmara de projeto, ou a pressão na câmara calculada (ver o capítulo 8 “Pressão na Câmara”).

Um melhor entendimento do comportamento da tubeira pode ser obtido analisando mais cuidadosamente esta equação. Pode ser visto que:

- A velocidade de exaustão máxima é obtida quando a exaustão ocorre no vácuo ($P_e = 0$). Esta é a assim chamada *razão de pressão infinita*, P_o/P_e.
- Aumentar a pressão na câmara *não* aumenta significativamente a velocidade de exaustão. Se $k = 1,2$, então verifica-se que ao dobrar P_o de 35 atm (515 psia) para 70 atm (1030 psia) a velocidade de exaustão aumenta somente cerca de 7%.
- Uma *temperatura de combustão mais alta* e uma *massa molecular mais baixa* são ambos significativos e igualmente benéficos, sendo proporcional e inversamente proporcional à raiz quadrada, respectivamente.

- Embora não óbvio ao olhar nesta equação, o efeito de variar o valor de k não é tão significativo. Uma variação de k = 1,1 para k = 1,2 resulta em uma perda de velocidade de aproximadamente 7%.

A razão entre a área da garganta A^* e qualquer área a jusante na tubeira A_x, na qual a pressão P_x predomina, pode ser convenientemente expressa como um função da razão de pressão P_x/P_o e k. Notando que na garganta M é unitário, e usando as equações (5.3), (5.5), (5.7), (5.10) e (5.15), tem-se

$$\frac{A^*}{A_e} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{P_x}{P_o}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{\left(\frac{k+1}{k-1}\right)\left[1-\left(\frac{P_x}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \qquad (5.16)$$

Esta é outra importante e útil equação. Ela permite que a área de saída A_e seja calculada tal que a pressão na saída P_e seja igual à pressão ambiente P_a (tipicamente 1 atm), simplesmente substituindo P_a em P_x.

$$\frac{A^*}{A_e} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{P_e}{P_o}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{\left(\frac{k+1}{k-1}\right)\left[1-\left(\frac{P_e}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \qquad (5.17)$$

Esta é conhecida como a **condição de projeto da tubeira**. Para tal, uma condição de *empuxo máximo é obtida* (derivação). Para esta [condição de] projeto, a razão de áreas A_e/A^* é conhecida como a toda importante **Razão de Expansão Ótima**.

Para uma explicação altamente informativa sobre operação de tubeira convergente-divergente, em particular escoamento bloqueado e formação de choque, visite o *website* *Nozzle Applet* (inclui simulação).