

5 TRAJETÓRIA

5.1 OBJETIVO

Determinar a trajetória seguida pelo minifoguete (MF) durante o seu voo.

5.2 FASES DO VÔO

Subdivisão ou etapas da trajetória do MF (Figura 1). Divide-se em:

- 1) FASE SOBRE A RAMPA: o MF percorre a sua rampa de lançamento ou lançador, partindo de velocidade nula.
- 2) FASE PROPULSADA: etapa durante a qual o motor-foguete está em funcionamento.
- 3) FASE BALÍSTICA: o motor-foguete não está em funcionamento e não há sistema de recuperação ativo (para-quedas ou fita). Esta fase divide-se em:
 - a) ascendente: o MF continua a ganhar altitude; e
 - b) descendente: o MF está em queda-livre.
- 4) FASE SUSTENTADA: o MF está em queda mas sustentado por para-quedas ou fita.
- 5) FASE TERMINAL: o MF está em queda mas com velocidade constante.

5.3 PONTOS IMPORTANTES DA TRAJETÓRIA

- 1) IGNIÇÃO: instante em que o motor é acionado (eletricamente ou pirotecnicamente).
- 2) DECOLAGEM: instante em que o MF inicia seu movimento.
- 3) FIM DA RAMPA: instante em que o MF deixa a rampa de lançamento ou o lançador.
- 4) FIM DA QUEIMA (q): instante em que o motor pára de funcionar.
- 5) APOGEU (H): altitude máxima alcançada pelo MF; ponto ideal para ejeção de para-quedas.
- 6) EJEÇÃO: instante em que o sistema de recuperação (para-quedas ou fita) é ejetado.
- 7) IMPACTO (I): instante em que o MF retorna ao solo.

5.4 ESQUEMA DA TRAJETÓRIA

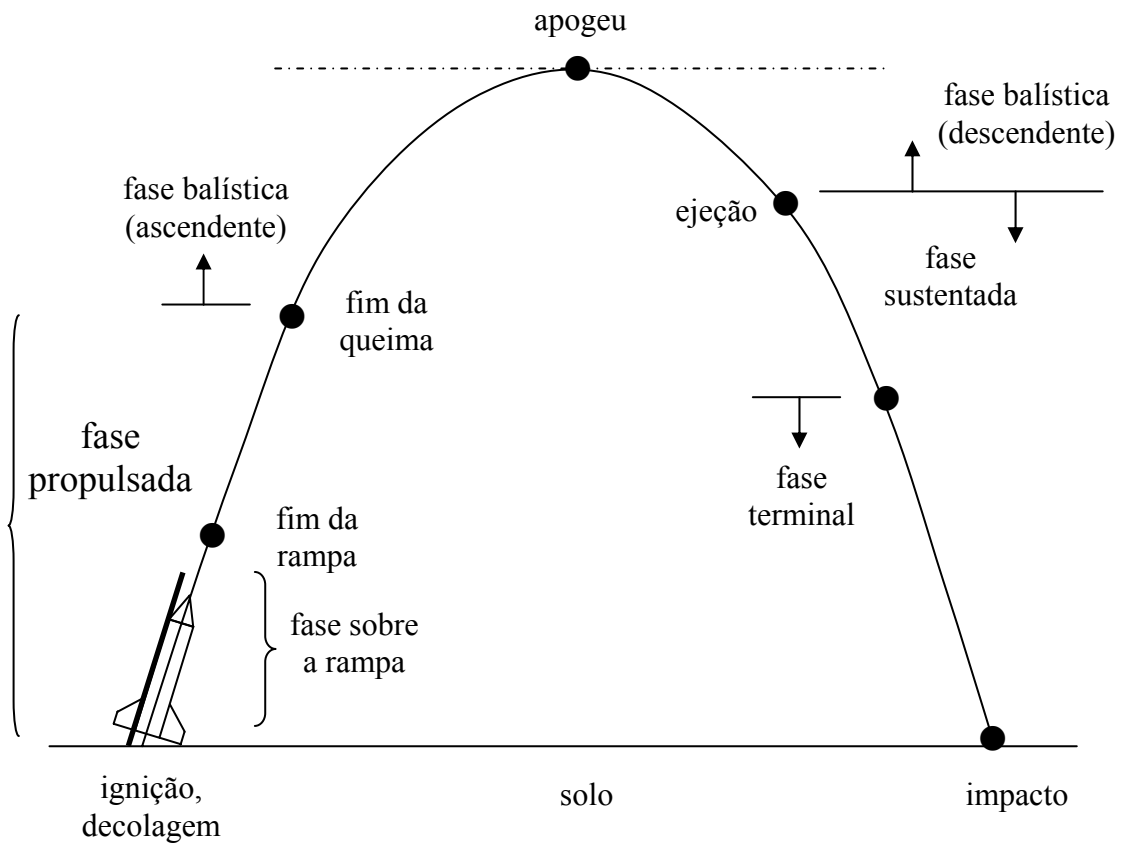


Figura 1: Trajetória do MF

5.5 TRAJETÓRIA VERTICAL SEM VENTO

FORÇAS ENVOLVIDAS:

T = empuxo do motor

P = peso do MF

D = arrasto aerodinâmico

F = força resultante ($\vec{F} = \vec{T} + \vec{D} + \vec{P}$)

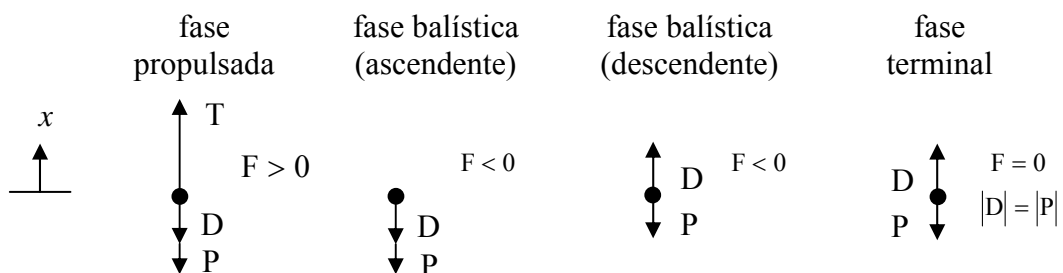


Figura 2: Forças envolvidas durante as fases de voo do MF

5.5.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA SEM ARRASTO (D = 0)

DADOS: t_q , \bar{T} , M_p , M_o , g

onde t_q = tempo de queima do motor [s]

\bar{T} = empuxo médio do motor [N]

M_p = massa de propelente [kg]

M_o = massa total do MF antes do lançamento [kg]

g = aceleração gravitacional local [ao nível do mar: 9,8 m/s²]

FIM DA QUEIMA (q):

t_q = dado

$$\text{Altura: } h_q = \frac{I_t}{\dot{M}} \left[1 + \frac{(1-R)}{R} \ln(1-R) \right] - g \frac{t_q^2}{2} \quad [\text{m}] \quad (5.1)$$

onde

$$I_t = t_q \bar{T} \quad (\text{impulso total}) \quad [\text{N.s}] \quad (5.2)$$

$$R = \frac{M_p}{M_o} \quad (\text{fração de propelente}) \quad [\text{adimensional}] \quad (5.3)$$

$$\dot{M} = \frac{M_p}{t_q} \quad (\text{fluxo de massa médio de propelente}) \quad [\text{kg/s}] \quad (5.4)$$

$$\text{Velocidade: } V_q = - \left[\frac{I_t}{M_p} \ln(1-R) + g t_q \right] \quad [\text{m/s}] \quad (5.5)$$

APOGEU (H):

$$V_H = 0$$

$$H = h_q + \frac{V_q^2}{2g} \quad [\text{m}] \quad (5.6)$$

$$t_H = t_q + \frac{V_q}{g} \quad [\text{s}] \quad (5.7)$$

IMPACTO (I):

$$h_I = 0$$

$$V_I = -\sqrt{2gH} = -\sqrt{2gh_q + V_q^2} \quad [\text{m/s}] \quad (5.8)$$

$$t_I = t_q + \frac{(V_q - V_I)}{g} \quad [\text{s}] \quad (5.9)$$

EXEMPLO SONDINHA II:

$$\left. \begin{array}{l} t_q = 0,7\text{s} \\ \bar{T} = 3\text{N} \\ M_p = 0,010\text{kg} \\ M_o = 0,030\text{kg} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} h_q = 26\text{m} \\ t_H = 8,7\text{s} \\ V_I = -81\text{m/s} = -293\text{km/h} \\ V_q = 78\text{m/s} = 282\text{km/h} \end{array} \right\}$$

SEM ARRASTO

REAL (COM ARRASTO)

$$\left\{ \begin{array}{l} t_I = 17\text{s} \\ H = 338\text{m} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_I \cong 10\text{s} \\ H \cong 100 \text{ a } 120\text{m} \end{array} \right.$$

⇒ grandes erros ao se desprezar o arrasto!

5.5.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA COM ARRASTO PARA A FASE TERMINAL

A velocidade máxima de um MF em geral é atingida no fim da queima, e ela é maior do que a velocidade terminal.

$$\begin{cases} |D| = |P| \\ \frac{1}{2} C_D \rho V_I^2 A = M_f g \end{cases} \quad (5.10)$$

$$V_I = -\sqrt{\frac{2M_f g}{C_D \rho A}} \quad [\text{m/s}] \quad (5.11)$$

onde M_f = massa final do MF [kg] = $M_o - M_p$

C_D = coeficiente de arrasto

A = área de referência

$$\rightarrow \text{para MF: } A = \frac{\pi d^2}{4} \quad [\text{m}] \quad (5.12)$$

onde d = diâmetro máximo do tubo-foguete

$$\rightarrow \text{para pára-quedas circular: } A = \frac{\pi d^2}{8} \quad [\text{m}] \quad (5.13)$$

onde d = diâmetro do pára-quedas circular

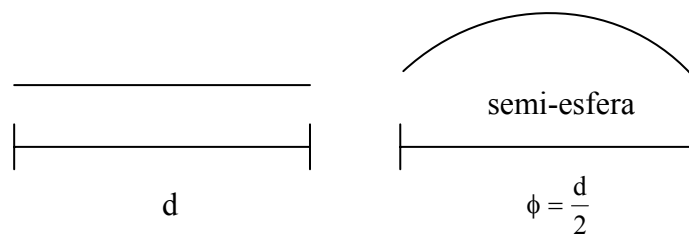


Figura 3: Pára-quedas circular sem e com carga.

EXEMPLO SONDINHA II:

$$\left. \begin{array}{l} M_f = 0,020 \text{ kg} \\ g = 9,8 \text{ m/s}^2 \\ C_D = 1 \\ \rho = 1,18 \text{ kg/m}^3 \\ d = 0,02 \text{ m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_I \cong -33 \text{ m/s} \cong -117 \text{ km/h} \\ (\text{lembrando, sem D, } V_I \cong -81 \text{ m/s} \cong -293 \text{ km/h}) \end{array}$$

EXEMPLO DE PÁRA-QUEDAS PARA O SONDINHA II:

$$\left. \begin{array}{l} M_f = 0,020 \text{ kg} \\ g = 9,8 \text{ m/s}^2 \\ C_D = 1,5 \\ \rho = 1,18 \text{ kg/m}^3 \\ d = 0,5 \text{ m} \end{array} \right\} V_1 \cong -1,5 \text{ m/s} \cong -5,4 \text{ km/h}$$

$$\text{Se } d = 0,3 \text{ m} \rightarrow V_1 \cong -2,5 \text{ m/s} \cong -9,0 \text{ km/h}$$

$$\text{Se } d = 0,1 \text{ m} \rightarrow V_1 \cong -7,5 \text{ m/s} \cong -27 \text{ km/h}$$