



UNIVERSIDADE  
POSITIVO

# MINICURSO “CÁLCULO DE TRAJETÓRIA DE FOGUETE COM APLICATIVO TRAJETÓRIA 2.0”

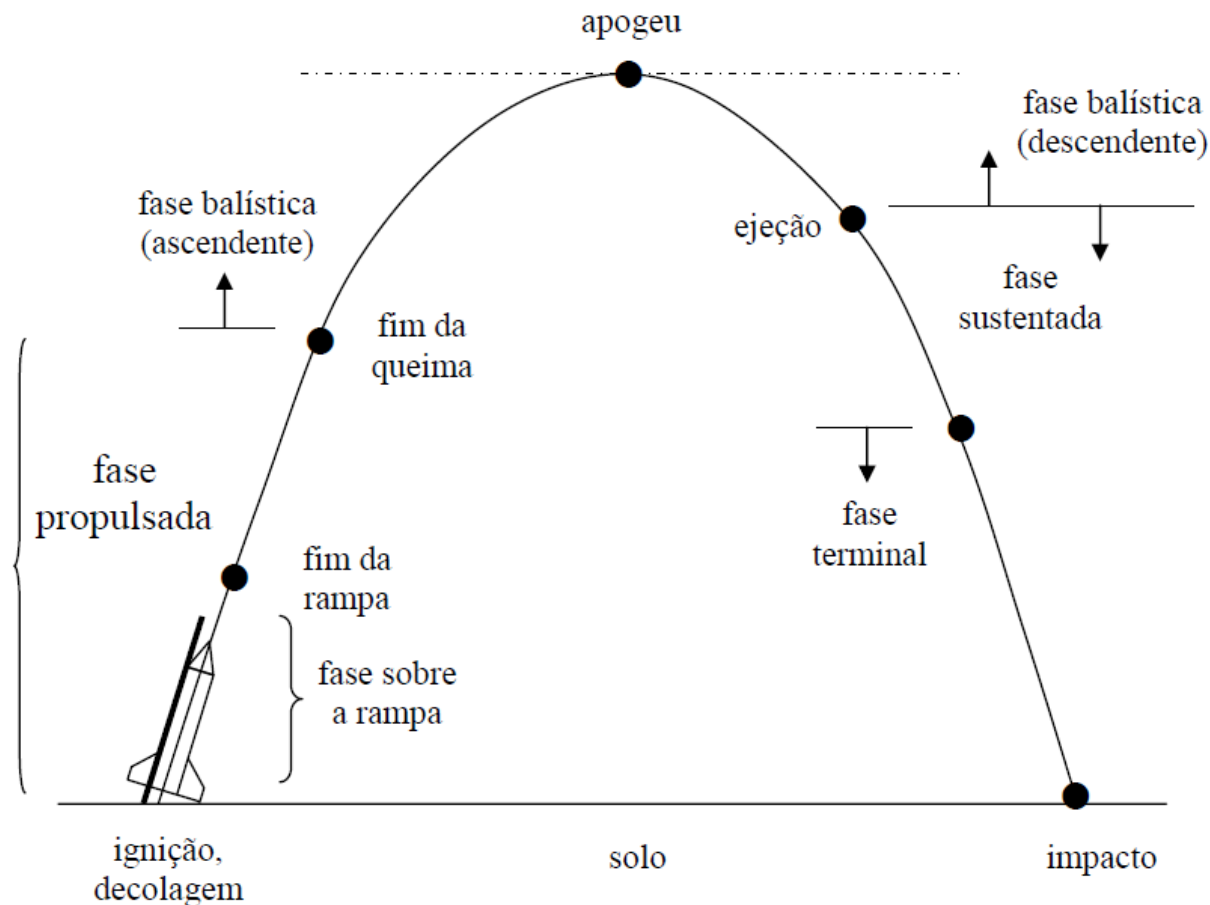
Antonio Carlos Foltran,  
Professor da Universidade Positivo,  
E-mail: [antoniocarlos.foltran@gmail.com](mailto:antoniocarlos.foltran@gmail.com)

# SUMÁRIO

- Modelo Físico do Problema da Trajetória;
- Simplificações;
- Equacionamento;
- Operação;
- Exemplo de Projeto para Apogeu Máximo;
- Exemplo de Projeto para Apogeu Exato.

# MODELO FÍSICO DO PROBLEMA DA TRAJETÓRIA

- Fases do vôo:



# MODELO FÍSICO DO PROBLEMA DA TRAJETÓRIA

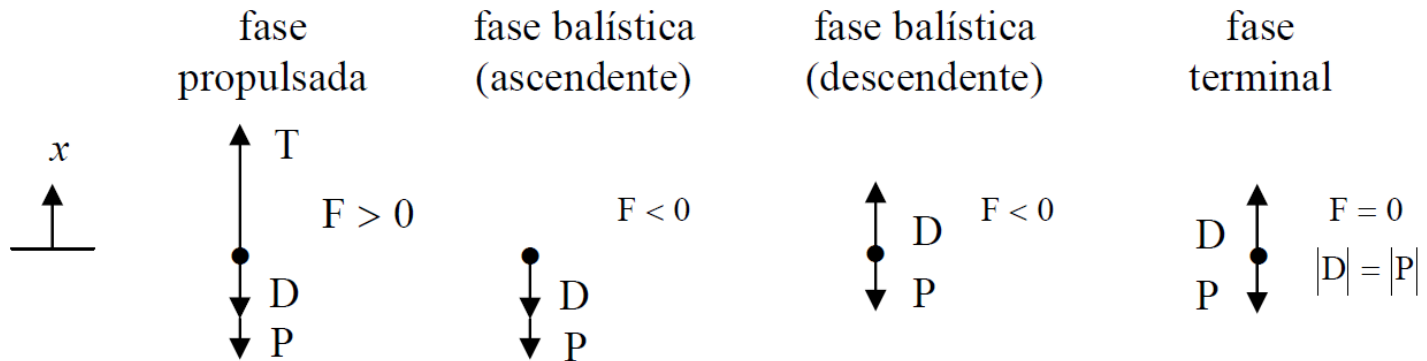
## ○ Forças envolvidas:

T = empuxo do motor

P = peso do MF

D = arrasto aerodinâmico

F = força resultante ( $\vec{F} = \vec{T} + \vec{D} + \vec{P}$ )



# MODELO FÍSICO DO PROBLEMA DA TRAJETÓRIA

- Modelos para a força de empuxo:
  - $ie = 0$  → Empuxo constante informado no próprio arquivo de entrada de dados principal (variável  $E$ );
  - $ie = 1$  → Empuxo em função do tempo a ser informado em arquivo .txt específico. Inserir o nome deste arquivo entre aspas simples ou aspas duplas. Arquivo deve conter duas colunas, a primeira com tempo [s] e a segunda o empuxo [N]. Pode separar por comando “tab”;
- Modelos para o coeficiente de arrasto:
  - $ic = 0$  → Cd constante informado pelo usuário;
  - $ic = 1$  → Cd em função da velocidade [km/h] em duas colunas de forma similar ao modelo para  $ie$ ;
- Modelos para aceleração da gravidade:
  - $ig = 0$  → aceleração constante informada pelo usuário;
  - $ig = 1$  → aceleração calculada de acordo com as variáveis do 3º termo do lado esquerdo da equação do slide 7 desta apresentação que multiplicam a massa, sendo que o valor de aceleração gravitacional  $g_0 = 9,806563 \text{ m/s}^2$ .
- Modelo para massa específica do ar atmosférico:
  - $iro = 0$  → massa específica dada pela equação de estado (com  $R$  informada pelo usuário, assim como pressão atmosférica e temperatura do ar)
  - $iro = 1$  → massa específica função da altitude dada pela equação:  $\rho = 1,225 - 1,175 \times 10^{-4} x + 4,2851 \times 10^{-9} x^2 - 6,504 \times 10^{-14} x^3$ .
- Obs: O Usuário pode escolher o método para solução da equação diferencial + condições iniciais:
  - Método de Euler (2º ordem);
  - Método de Runge-Kutta (4º ordem); } Algoritmos de “Marcha” no tempo.
- Obs: O usuário escolhe o passo de tempo discreto para o qual a equação discretizada é resolvida. Há um intervalo de tempo discreto para a fase propulsada e para a fase balística.

# SIMPLIFICAÇÕES

- Movimento vertical apenas;
  - Efeito do vento não pode ser considerado;
  - Lançamentos em ângulo menor que aproximadamente  $85^\circ$  em relação à horizontal começam a produzir erros não aceitáveis;
  - Rotação e precessão do modelo não podem ser considerados, assim como efeito Coriolis;
- Satisfaz a condição de contato com a base da plataforma de lançamento;
- Apenas modelos Monoestágios;
- Não permite simular diretamente a abertura de paraquedas ou fitas;
  - Velocidade de descida com sistemas de recuperação não pode ser simulada (para isso é necessário reprogramar o código fonte);
- Força de atrito com a rampa não é considerada;

# EQUACIONAMENTO

- $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ , onde  $\begin{cases} 0 < t < t_q, & m = m(t) \\ t > t_q, & m = m_f \end{cases}$

- $\vec{E} + \vec{P} + \vec{D} = m\vec{a}$ , onde o referencial é o nível do solo e sentido positivo a direção para cima.

- $\vec{E} > 0$ ,

- $\vec{P} < 0$ ,

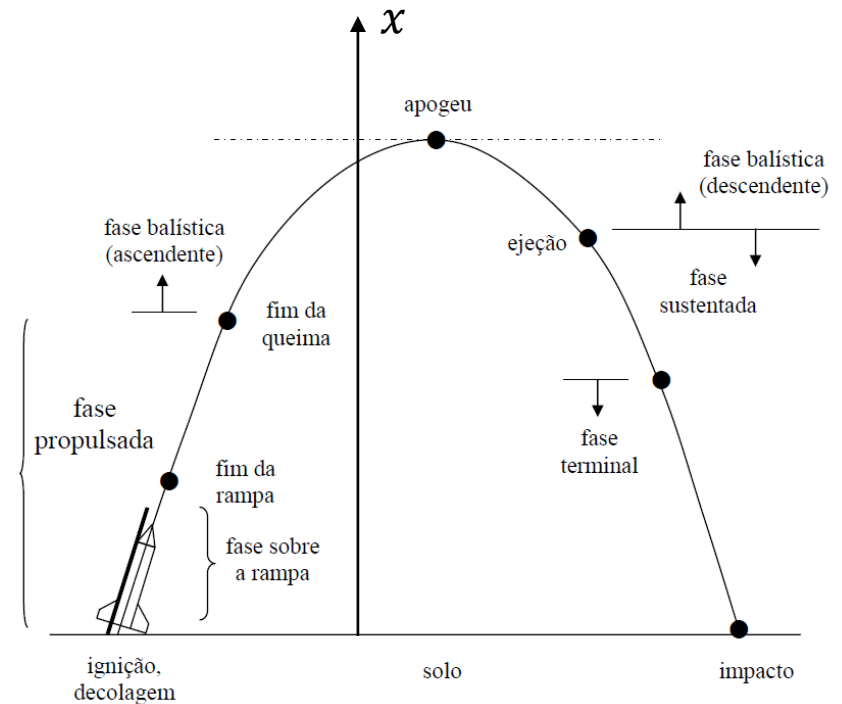
- $\vec{D} = \begin{cases} > 0 \text{ na descida} \\ < 0 \text{ na subida} \end{cases}$ .

- Equação diferencial da trajetória:

$$m(t) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C_D \rho A}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{m(t)g_0 R^2}{(R+x)^2} = E(t),$$

- e condições iniciais:

$$\begin{cases} em t = 0, x = 0 \\ em t = 0, \frac{dx}{dt} = 0 \end{cases}$$



Equação diferencial ordinária de segunda ordem não linear e não homogênea.

# OPERAÇÃO

1. Leitura em arquivo do nome da simulação;
2. Abre um arquivo com o nome da simulação (caso não exista abre arquivo em branco e copia-se dados de uma simulação existente e muda-se os valores das variáveis de acordo com sua simulação);
3. Caso selecionado empuxo variável, abre o arquivo contendo duas colunas, a primeira o tempo em segundos após a ignição e a segunda contendo as respectivas forças em newtons. Caso o arquivo não exista deve-se inserir estes valores. Obs: mesmo anotando o último valor de tempo na planilha, repetir esse tempo na variável tempo de queima ( $t_q$ );
4. Idem o tópico 3, mas para o modelo de coeficiente de arrasto variável. Neste caso a primeira coluna da planilha conterá valores da velocidade em km/h e a segunda os respectivos valores de  $C_d$  (adimensional);
5. O programa executa os cálculos e retorna os resultados em arquivo com nome da simulação que o usuário informou. Os resultados se dividem em 3 partes a saber:
  - Nome da simulação, caso e dados de entrada para que se tenha um registro de quais valores de entrada foram usados na simulação;
  - Dados brutos a cada iteração para as três fases: propulsada, balística ascendente e balística descendente;
  - Resultados globais: pequena lista contendo apogeu, tempo para apogeu, tempo de voo, tempo para impacto e velocidades máxima de subida e descida.
6. Fim.

Obs: 1) Use sempre o ponto como separador de decimal;  
2) Muitas vezes não se sabe de antemão qual será a velocidade máxima que o modelo atingirá, por isso no caso de usar  $C_d$  função de velocidade, verifique se a planilha contempla toda a amplitude da faixa de  $C_d$  versus velocidade.



# EXEMPLO DE PROJETO PARA APOGEU MÁXIMO

- Nesta classe o objetivo é atingir maior altitude com um motor de determinada classe e aprovado para a competição.
- Objetivos do projeto:
  - Reduzir a força de arrasto o máximo, mas sem comprometer a estabilidade de voo;
  - Reduzir massa total do modelo ao máximo possível, mas sem comprometer integridade estrutural, principalmente para classes de menor potência onde a ausência de sistemas de recuperação não gera problemas e o seu não uso seja permitido.
- Atenção especial para:
  - Procurar usar um motor aprovado e que esteja o mais próximo possível do limite superior da classe de potência;
  - A margem estática está reduzida porém não a ponto de produzir voo instável?
  - Tipo da rampa: haste de arame *versus* múltiplas hastes reguláveis?
  - O tempo de queima do motor + tempo de retardo para ejeção é ligeiramente maior que o tempo para apogeu?
  - A velocidade do modelo na saída da rampa é suficiente para dar estabilidade aerodinâmica? Usar rampa mais extensa?



1.000000E-04 = dtq = Intervalo de tempo na fase propulsada (s)  
 1.000000E-04 = dtb = Intervalo de tempo na fase balística (s)  
 1 = solver : =0, Euler; =1, Runge-Kutta 4ª ordem  
 10 = Iq = Número de iterações na fase propulsada  
 10 = Ib = Número de iterações na fase balística  
 100 = w = Frequência de escrita dos resultados de campo

Número de pontos na tabela de empuxo = 5

Curva de empuxo x tempo

ponto	t (s)	E (N)
0	0.000000E+00	0.000000E+00
1	2.200000E-01	8.294184E+00
2	3.445114E-01	3.600000E+00
3	1.964000E+00	3.600000E+00
4	1.964000E+00	0.000000E+00

\*\*\* FASE PROPULSADA \*\*\*

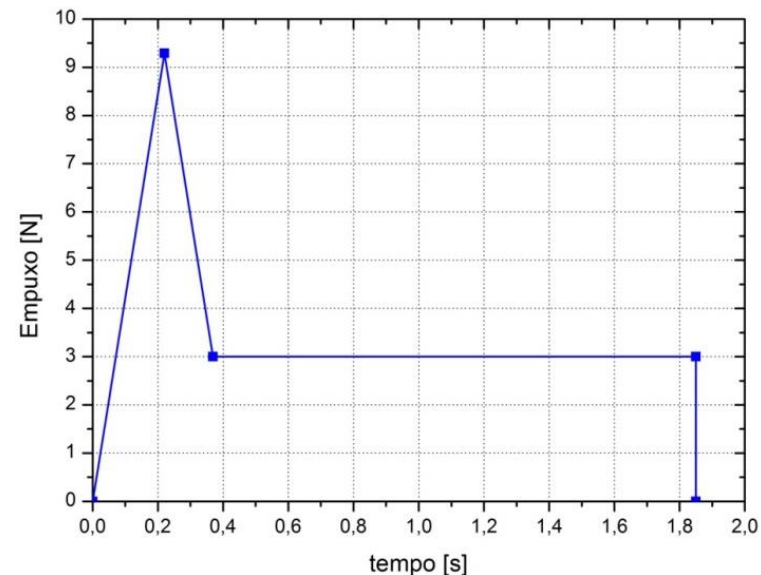
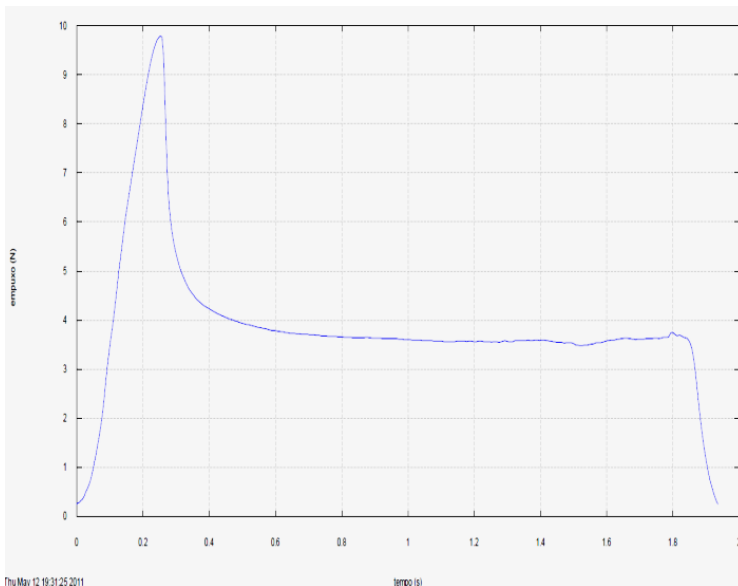
i	t (s)	h (m)	v (km/h)	a (g)	M (g)	P (N)	D (N)
0	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	8.400000E+01	-8.221593E-01	0.000000E+00
1	1.000000E-04	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	8.399945E+01	-8.221539E-01	0.000000E+00
101	1.010000E-02	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	8.394441E+01	-8.216152E-01	0.000000E+00
201	2.010000E-02	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	8.388937E+01	-8.210764E-01	0.000000E+00
301	3.010000E-02	4.327401E-05	5.615301E-02	3.829896E-01	8.383433E+01	-8.205377E-01	-7.505570E-08
401	4.010000E-02	4.618059E-04	2.722433E-01	8.436630E-01	8.377929E+01	-8.199990E-01	-1.764217E-06
501	5.010000E-02	1.706131E-03	6.507592E-01	1.304934E+00	8.372425E+01	-8.194603E-01	-1.008041E-05
601	6.010000E-02	4.227723E-03	1.191910E+00	1.766793E+00	8.366921E+01	-8.189216E-01	-3.381616E-05
701	7.010000E-02	8.478629E-03	1.895900E+00	2.229226E+00	8.361416E+01	-8.183829E-01	-8.555951E-05
801	8.010000E-02	1.491146E-02	2.762928E+00	2.692214E+00	8.355912E+01	-8.178441E-01	-1.817091E-04
901	9.010000E-02	2.397937E-02	3.793187E+00	3.155733E+00	8.350408E+01	-8.173054E-01	-3.424885E-04
1001	1.001000E-01	3.613603E-02	4.986857E+00	3.619755E+00	8.344904E+01	-8.167667E-01	-5.919587E-04
1101	1.101000E-01	5.183560E-02	6.344112E+00	4.084246E+00	8.339400E+01	-8.162280E-01	-9.580302E-04

# EXEMPLO DE PROJETO PARA APOGEU MÁXIMO

- Sondinha II (Edge of Space):
  - $m_f = 20 \text{ g}$ , massa final do modelo (massa do modelo sem motor + massa do motor após funcionamento);
  - $m_p = 10 \text{ g}$ , massa de propelente do motor;
  - $d_r = 20 \text{ mm}$ , diâmetro de referência (diâmetro do tubo foguete);
  - $E_c = 3 \text{ N}$ , empuxo constante do motor BT A-6-4;
  - $t_q = 0,7 \text{ s}$ , tempo de queima do motor;
  - $C_D = 0,9$ , coeficiente de arrasto constante do modelo (pode ser obtido com o programa CD1.0);
  - $H_{real} \cong 110 \text{ m}$ , baseado em lançamentos.

# EXEMPLO DE PROJETO PARA APOGEU EXATO

- LAE-5 (Baseado no FM-300 da Acrux Aerospace Technologies)
  - $m_f = 78,743 \text{ g}$ , massa final do modelo (massa do modelo sem motor + massa do motor após funcionamento);
  - $tq = 1,964 \text{ s}$ , tempo de queima do motor;
  - $m_p = 10,783 \text{ g}$ , massa de propelente do motor;
  - $d_r = 25,2 \text{ mm}$ , diâmetro de referência (diâmetro do tubo foguete);
  - Empuxo variável do motor BT C-6-5, obtido a partir da análise de 15 testes estáticos com lote de motores de 2013:



# EXEMPLO DE PROJETO PARA APOGEU EXATO

	Valor Calculado (Trajetória 2.0)	Valor Experimental	Erro (%)
Apogeu [m]	189,46	174	8,88
Velocidade Máxima [km/h]	219,7	196	12,10
Aceleração Máxima [g]	8,55	12,0	40,35
Tempo de Apogeu [s]	6,67	5,0	33,4

A tall, thin tower or antenna structure is visible in the sky above a dense forest of pine trees. The tower is white and has a small dark object near the top. The forest is composed of many tall, green pine trees. The sky is blue with some light clouds. The text "OBRIGADO PELA ATENÇÃO!" is overlaid on the image in yellow.

**OBRIGADO PELA ATENÇÃO!**