Aplicativo TRAJETORIA 1.0

MODELO MATEMÁTICO

SIMPLIFICAÇÕES

- Voo vertical (sentido positivo para cima; altura h)
- Sem vento
- Sem paraquedas
- Sem cargas ejetora e temporizadora
- Propriedades constantes: g, C_D, ρ , E, R, T, p
- Lançamento e impacto em altura $h = 0$
- Massa do motor varia linearmente com o tempo durante a queima
- Forças envolvidas:
  - E = empuxo
  - D = arrasto
  - P = peso
  - F = força resultante

FASE PROPULSADA $\quad 0 \le t \le t_q$

$$F = Ma = E - P - D \qquad (1)$$

$$P = Mg \qquad (2)$$

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A \qquad (3)$$

$$\rho = \frac{p}{RT} \qquad (4)$$

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 \qquad (5)$$

$$a = \frac{(E - P - D)}{M} = \frac{(E - D)}{M} - g = \frac{dV}{dt} \qquad (6)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \qquad (7)$$

$$M = M_f + M_p \left(1 - \frac{t}{t_q} \right) \qquad (8)$$

$$M_p = M_o - M_f \qquad (9a)$$

$$t = 0 : \quad h = V = a = D = 0 \qquad (9b)$$

FASE BALÍSTICA ASCENDENTE $t_q \leq t \leq t_H$

$$F = Ma = -P - D \tag{10}$$

$$a = -\frac{(P + D)}{M} = -g - \frac{D}{M} = \frac{dV}{dt} \tag{11}$$

$$M = M_f \tag{12}$$

FASE BALÍSTICA DESCENDENTE $t_H \leq t \leq t_I$

$$F = Ma = -P + D \tag{13}$$

$$a = \frac{-P + D}{M} = -g + \frac{D}{M} = \frac{dV}{dt} \tag{14}$$

$$M = M_f \tag{15}$$

MODELO NUMÉRICO

APROXIMAÇÕES: método de Euler implícito ou UDS no tempo

FASE PROPULSADA $\quad 0 \le t \le t_q$

$$i = 0 : \text{condição inicial} \tag{1}$$

$$1 \le i \le N_q \tag{2}$$

$$\Delta t_q = \frac{t_q}{N_q} \tag{3}$$

$$a_i = \frac{(E - D_i)}{M_i} - g \tag{4}$$

$$D_i = \frac{1}{2} C_D \rho V_i^2 A \tag{5}$$

$$M_i = M_f + M_p \left(1 - \frac{t_i}{t_q} \right) \tag{6}$$

$$\frac{dV}{dt} = a \rightarrow \frac{V_i - V_{i-1}}{\Delta t_q} = a \rightarrow V_i = V_{i-1} + \Delta t_q a_i \tag{7}$$

$$\frac{dh}{dt} = V \rightarrow \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta t_q} = V_i \rightarrow h_i = h_{i-1} + \Delta t_q V_i \tag{8}$$

Algoritmo

1) Definir as condições iniciais, $i = 0$ e $t_i = 0$
2) Fazer $t_i = t_{i-1} + \Delta t_q$ e estimar V
3) Calcular M, P
4) Calcular D, a
5) Calcular V
6) Voltar ao item 4 até atingir I_q
7) Calcular h
8) Voltar ao item 2 até atingir t_q

FASE BALÍSTICA ASCENDENTE

Algoritmo

1) Definir as condições iniciais, $i = N_q$, $t_i = t_q$, $M = M_f$ e $P = M_f g$
2) Fazer $t_i = t_{i-1} + \Delta t_b$ e estimar V
3) Calcular D com a Eq. (5) e a
4) Calcular V com a Eq. (10)
5) Voltar ao item 3 até atingir I_b
6) Calcular h com a Eq. (11)
7) Voltar ao item 2 enquanto $h_i > h_{i-1}$
8) Interpolar e obter H, t_H, i_H, etc

$$a_i = -g - \frac{D_i}{M_f} \tag{9}$$

$$V_i = V_{i-1} + \Delta t_b a_i \qquad (10)$$

$$h_i = h_{i-1} + \Delta t_b V_i \qquad (11)$$

Quando $h_i < h_{i-1}$:

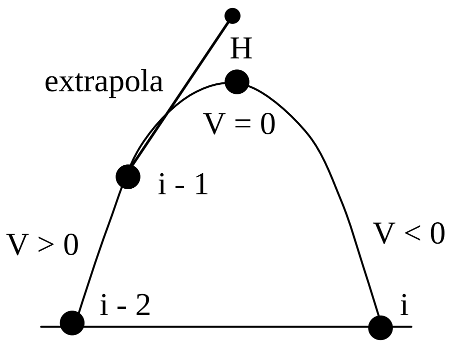

Figura 1. Extrapolação para a fase balística ascendente.

$$\frac{\phi_H - \phi_{i-1}}{\phi_i - \phi_{i-1}} = \frac{0 - V_{i-1}}{V_i - V_{i-1}} \quad \text{e} \quad \frac{H - h_{i-2}}{h_{i-1} - h_{i-2}} = \frac{t_H - t_{i-2}}{t_{i-1} - t_{i-2}} \qquad (12)$$

ou

$$t_H = t_{i-1} - \frac{V_{i-1}}{(V_i - V_{i-1})}(t_i - t_{i-1}) \qquad (13)$$

e em H:

$$V = 0\,,\; a = -g\,,\; D = 0\,,\; M = M_f\,,\; P = M_f\, g \qquad (14)$$

FASE BALÍSTICA DESCENDENTE

Algoritmo

1) Definir as condições iniciais, $t_i = t_H$, $i = i_H$, $M = M_f$, $P = M_f g$, $h_i = H$
2) Fazer $t_i = t_{i-1} + \Delta t_b$ e estimar V
3) Calcular D com a Eq. (5) e a
4) Calcular V com a Eq. (10)
5) Voltar ao item 3 até atingir I_b
6) Calcular h com a Eq. (11)
7) Voltar ao item 2 enquanto $h_i > 0$
8) Interpolar e obter $h_I = 0$, t_I, V_I, i_I, etc

$$a_i = -g + \frac{D_i}{M_f} \tag{15}$$

Quando $h_i < 0$:

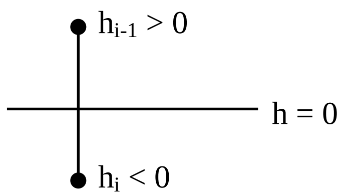

Figura 2. Extrapolação para a fase balística descendente.

$$\frac{\phi_I - \phi_{i-1}}{\phi_i - \phi_{i-1}} = \frac{0 - h_{i-1}}{h_i - h_{i-1}}$$

ou

$$\phi_I = \phi_{i-1} - \frac{h_{i-1}}{(h_i - h_{i-1})}(\phi_i - \phi_{i-1}) \qquad (16)$$

onde

$$\phi = t\,,\ V,\ D,\ a,\ \text{etc} \qquad (17)$$

e em I:

$$h = 0 \qquad (18)$$