Fase propulsada (desconsiderando arrasto com massa variável)

Equação diferencial a ser calculada:

$$
\begin{aligned}
&\sum F = m\,a \\
&F - P = m\,a \\
&\bar{F} - m\,g = m\,a \\
&m\,a + m\,g - \bar{F} \\
&m\frac{d^2h}{dt^2} + mg - \bar{F} \\
&\frac{d^2h}{dt^2} + g - \frac{\bar{F}}{m} \\
&m = m_f - \frac{t - t_q}{t_q} m_p
\end{aligned}
$$

Obtida pela conservação da quantidade de movimento do minifoguete (2ª lei de Newton), desconsiderando a força de arrasto

As condições iniciais para este problema são dadas pelo repouso do MF.

Sendo a posição e a velocidade no final da queima do motor:

$$
\begin{cases}
h(0) = 0 \\
\dfrac{dh}{dt}(0) = 0
\end{cases}
$$

Desta forma usando o software Maple 7 para resolver a EDO, obteremos as seguintes expressões:

$$h_q = \bar{F} m_f \frac{{t_q}^2}{{m_p}^2} \ln\left(\frac{m_f}{m_f + m_p}\right) + {t_q}^2\left(\frac{\bar{F}}{m_p} - \frac{1}{2}g\right)$$

$$v_q = -\frac{\bar{F}\,t_q}{m_p} \ln\left(\frac{m_f}{m_f + m_p}\right) - g\,t_q$$

$$h(t) = \bar{F}\frac{{t_q}^2}{m_p}\left(\frac{m_f}{m_p} + 1 - \frac{t}{t_q}\right)\ln\left(1 - \frac{m_p}{t_q(m_f + m_p)}t\right) - \frac{1}{2}g\,t^2 + \left(\frac{\bar{F}\,t_q}{m_p}t\right)$$

$$v(t) = -\frac{\bar{F}\,t_q}{m_p}\ln\left(1 - \frac{m_p t}{t_q(m_f + m_p)}\right) - g\,t$$

$$a(t) = \frac{t_q\left[\overline{F} - g\left(m_f + m_p\right)\right] + g\,t\,m_p}{t_q\left(m_f + m_p\right) - m_p\,t}$$

Fase propulsada (considerando arrasto mas com massa constante)

Equação diferencial a ser calculada:

$$\begin{aligned}
&\sum F = m\,a \\
&F - P - D = m\,a \\
&\overline{F} - m\,g - \rho C_d A\frac{V^2}{2} = m\,a \\
&m\,a + \rho C_d A\frac{V^2}{2} + m\,g - \overline{F} \\
&m\frac{d^2h}{dt^2} + C_d\frac{\rho A}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + mg - \overline{F} \\
&\frac{d^2h}{dt^2} + C_d\frac{\rho A}{2m}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + g - \frac{\overline{F}}{m} \\
&\frac{d^2h}{dt^2} + \Theta\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + g - \frac{\overline{F}}{m} \\
&\Theta = C_d\frac{\rho A}{2m}
\end{aligned}$$

Obtida pela conservação da quantidade de movimento do minifoguete (2ª lei de Newton), considerando a força de arrasto mas desconsiderando que a massa varie ao longo da queima, podendo ser admitido qualquer massa ao longo desse período (massa inicial, final ou uma média). As condições iniciais para este problema são dadas pelo repouso do MF.

Sendo a posição e a velocidade no final da queima do motor:

$$\begin{cases} h(t=0) = 0 \\ \dfrac{dh}{dt}(t=0) = 0 \end{cases}$$

Desta forma usando o software Maple 7 para resolver a EDO obteremos expressões para a posição e velocidade a cada instante de tempo.

$$h_q = \frac{1}{2\Theta}\ln\left(\cosh\left(\sqrt{\Theta\frac{\overline{F} - gm}{m}}\,t_q\right)^2\right)$$

$$v_q = \sqrt{\frac{\overline{F}-gm}{m\Theta}}\tanh\left(\sqrt{\Theta\frac{\overline{F}-gm}{m}}\,t_q\right)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\Theta}\ln\left(\cosh\left(\sqrt{\Theta\frac{\overline{F}-gm}{m}}\,t\right)^2\right)$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{\overline{F}-gm}{m\Theta}}\tanh\left(\sqrt{\Theta\frac{\overline{F}-gm}{m}}\,t\right)$$

$$a(t) = \frac{\overline{F}-gm}{m}\operatorname{sech}\left(\sqrt{\Theta\frac{\overline{F}-gm}{m}}\quad t\right)^2$$

Fase balística ascendente

Equação diferencial a ser calculada:

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \Theta\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + g = 0$$
$$\theta = \frac{C_D\rho A}{2\,m}$$

Obtida pela conservação da quantidade de movimento do minifoguete (2ª lei de Newton) considerando força peso e arrasto (variável theta) na direção negativa do eixo z.

As condições iniciais para este problema são dadas pela equação analítica da força de empuxo e força peso com massa variável no momento do fim da queima do motor.

Sendo a posição e a velocidade no final da queima do motor:

$$\begin{cases} h(t_q) = h_q \\ \dfrac{dh}{dt}(t_q) = v_q \end{cases}$$

Desta forma usando o software Maple 7 para resolver a EDO, ficamos com as expressões:

$$\Theta^* = t_q\sqrt{g\,\Theta}$$

$$h_H = h(t_H)$$
$$t_H = t(v_H = 0)$$

$$h(t)=\frac{1}{2\Theta}\ln\left(\frac{e^{(2h_q\Theta)}}{g\,sen^2(\Theta^*)}\left\{\frac{sen\left(\sqrt{g\Theta}\;t-\Theta^*\right)}{\left[\sqrt{g}\cos\left(\Theta^*\right)-v_q\sqrt{\Theta}\sin\left(\Theta^*\right)\right]-\sqrt{g}\sin\left(\sqrt{g\Theta}\;t\right)}\right\}^2\right)$$

$$\alpha=-\sqrt{g\Theta}\left[sen\left(\sqrt{g\Theta}\left(t-2t_q\right)\right)-sen\left(\sqrt{g\Theta}\,t\right)\right]$$

$$\beta=\left[\cos\left(\sqrt{g\Theta}\left(t-2t_q\right)\right)-\cos\left(\sqrt{g\Theta}\,t\right)\right]$$

$$v(t)=\frac{v_q\alpha-g\beta}{\alpha+v_q\Theta\beta}$$

$$\gamma=2\sqrt{g\Theta}\left(t-t_q\right)$$

$$a(t)=-2\frac{g\Theta v_q^2+g^2}{g\left(1+\cos\gamma\right)+\Theta v_q^2\left(1-\cos\gamma\right)+2v_q\sqrt{g\Theta}\sin\gamma}$$

O tempo apogeu deve ser calculado numericamente (resolver a equação da velocidade nula para o tempo) para garantir obter o apogeu correto, lembrando que esta função é definida ao longo de todo o tempo, logo nos interessa apenas parte dela, ao resolver analiticamente podemos pegar um valor que não nos interessa.

Fase balística descendente

Equação diferencial a ser calculada:

$$\frac{d^2h}{dt^2}-\Theta\left(\frac{dh}{dt}\right)^2+g=0$$

$$\theta=\frac{C_D\rho A}{2m}$$

As condições iniciais para este problema são dadas pela posição do apogeu e velocidade no apogeu. Sendo a posição e a velocidade no final da queima do motor:

$$\begin{cases} h(t_H)=h_H \\ \dfrac{dh}{dt}(t_H)=0 \end{cases}$$

Desta forma usando o software Maple 7 para resolver a EDO, ficamos com as expressões:

$$t_I=\frac{\sqrt{\Theta g}\;t_H+\ln\left(e^{\Theta h_H}+\sqrt{e^{\Theta 2h_H}-1}\right)}{\sqrt{\Theta g}}$$

$$v_I = -\frac{\sqrt{g}\left(e^{h_H\Theta} + e^{2\Theta h_H} - 1 + \sqrt{e^{2h_H\Theta} - 1}\right)e^{-h_H\Theta}}{\sqrt{\Theta}\left(e^{h_H\Theta} + \sqrt{e^{2h_H\Theta} - 1}\right)}$$

$$h(t) = \frac{\sqrt{\Theta g}\,t + \ln(2) - \ln\left(e^{-2\sqrt{\Theta g}\,t_H - 2\Theta x_H}\left(e^{2\sqrt{\Theta g}\,t} + e^{2\sqrt{\Theta g}\,t_H}\right)^2\right)\Big/2}{\Theta}$$

$$v(t) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\Theta}}\frac{-e^{2\sqrt{g\Theta}\,t} + e^{2\sqrt{g\Theta}\,t_H}}{e^{2\sqrt{g\Theta}\,t} + e^{2\sqrt{g\Theta}\,t_H}}$$

$$a(t) = -4g\frac{e^{2\sqrt{g\Theta}(t+t_H)}}{\left(e^{2\sqrt{g\Theta}\,t} + e^{2\sqrt{g\Theta}\,t_H}\right)^2}$$

Testes numéricos:

Caso sondinha 2:

$$\text{Dados: }\boxed{\begin{cases} g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \\ m_f = 20\,\mathrm{g} \\ m_p = 10\,\mathrm{g} \\ D_e = 20\,\mathrm{mm} \\ \overline{F} = 3\,\mathrm{N} \\ t_q = 0{,}7\,\mathrm{s} \\ Cd = 1{,}0 \\ p_{Ar} = 90{,}6\,\mathrm{kPa} \\ T_{Ar} = 24\,^{\circ}\mathrm{C} \end{cases}} \text{Resultados: }\boxed{\begin{cases} \rho_{Ar} = 1{,}06\,\mathrm{kg/m^3} \\ h_q = 25{,}4\,\mathrm{m} \\ v_q = 78{,}3\,\mathrm{m/s} = 281{,}8\,\mathrm{km/h} \\ t_H = 4{,}75\,\mathrm{s} \\ H = 134{,}8\,\mathrm{m} \\ t_I = 11{,}0\,\mathrm{s} \\ v_I = 32{,}4\,\mathrm{m/s} = 116{,}7\,\mathrm{km/h} \end{cases}}$$

Caso durepoxi:

$$\text{Dados: }\boxed{\begin{cases} g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \\ m_f = 13{,}84\,\mathrm{g} \\ m_p = 1{,}76\,\mathrm{g} \\ D_e = 17{,}21\,\mathrm{mm} \\ \overline{F} = 4{,}18\,\mathrm{N} \\ t_q = 0{,}335\,\mathrm{s} \\ Cd = 1{,}0 \\ p_{Ar} = 90{,}57\,\mathrm{kPa} \\ T_{Ar} = 23{,}9\,^{\circ}\mathrm{C} \end{cases}} \text{Resultados: }\boxed{\begin{cases} \rho_{Ar} = 1{,}06\,\mathrm{kg/m^3} \\ h_q = 15{,}1\,\mathrm{m} \\ v_q = 92\,\mathrm{m/s} = 331\,\mathrm{km/h} \\ t_H = 5{,}59\,\mathrm{s} \\ H = 191{,}9\,\mathrm{m} \\ t_I = 12{,}8\,\mathrm{s} \\ v_I = 42{,}4\,\mathrm{m/s} = 152{,}8\,\mathrm{km/h} \end{cases}}$$