

3

Formulações Forte e Fraca para Problemas Unidimensionais

Neste capítulo, são desenvolvidas as formulações forte e fraca para diversos problemas físicos unidimensionais. A formulação forte consiste nas equações de governo e das condições de contorno para um sistema físico. As equações de governo são normalmente equações diferenciais parciais, mas no caso unidimensional elas tornam-se equações diferenciais ordinárias. A formulação fraca é uma forma integral dessas equações, que é necessária para formular o método de elementos finitos.

Em alguns métodos numéricos para resolver equações diferenciais parciais, estas podem ser discretizadas diretamente (isto é, escritas como equações algébricas lineares adequadas para soluções computacionais). Por exemplo, no método de diferenças finitas, podemos escrever diretamente as equações algébricas lineares discretas das equações diferenciais parciais. Entretanto, isso não é possível no método de elementos finitos.

Um esquema para o desenvolvimento do método de elementos finitos é mostrado na Figura 3.1. Como pode ser visto no esquema, existem três ingredientes distintos que são combinados para chegar até as equações discretas (também chamadas de sistemas de equações; para análises de tensões elas são chamadas de equações rígidas), as quais em seguida são resolvidas por um computador. Esses ingredientes são

1. a formulação forte, que consiste nas equações de governo para o modelo e nas condições de contorno (essas também são necessárias para qualquer outro método);
2. a formulação fraca;
3. as funções de aproximação.

As funções de aproximação são combinadas com a formulação fraca de modo a se obter as equações de elementos finitos discretas.

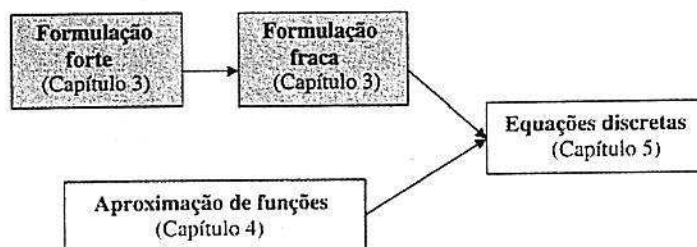


Figura 3.1 Esquema para o desenvolvimento do método de elementos finitos.

Portanto, o caminho para as equações diferenciais de governo é substancialmente mais complicado do que aquele para os métodos de diferenças finitas. No método de diferenças finitas, não existe necessidade de uma formulação fraca; a formulação forte é diretamente convertida para um conjunto de equações discretas. A necessidade de uma formulação fraca torna o método de elementos finitos intelectualmente mais desafiador. Um número de pontos sutis, tais como a diferença entre várias condições de contorno, deve ser estudado para o uso inteligente do método. Entretanto, para compensar essa complexidade adicional, os métodos de elementos finitos podem lidar mais facilmente com as formas complicadas, que necessitam ser analisadas em projeto de engenharia.

Para demonstrar os passos básicos nas formulações forte e fraca, consideraremos os problemas tanto de barras elásticas carregadas axialmente como o de condução de calor unidimensional. As formulações fortes para esses problemas serão desenvolvidas juntamente com as condições de contorno. Em seguida, desenvolveremos as formulações fracas para esses problemas e mostraremos que elas são equivalentes às formulações fortes. Também examinaremos vários graus de continuidade, ou suavidade, os quais terão um papel importante no desenvolvimento dos métodos de elementos finitos.

A formulação fraca é a parte mais intelectualmente desafiadora no desenvolvimento dos elementos finitos, de forma que um estudante pode encontrar algumas dificuldades na compreensão desse conceito; ele é provavelmente diferente de qualquer outra coisa que o estudante tenha visto antes em análise de engenharia. Entretanto, uma compreensão desses procedimentos e as implicações em resolver uma formulação fraca são cruciais para a compreensão do caráter das soluções de elementos finitos. Além disso, os procedimentos são de fato bastante simples e repetitivos, de forma que uma vez seja compreendido para uma formulação forte, os procedimentos podem ser facilmente aplicados a outras formulações fortes.

3.1 FORMULAÇÃO FORTE EM PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS

3.1.1 Formulação Forte para uma Barra Elástica Carregada Axialmente

Considere a resposta estática de uma barra elástica de seção transversal variável, tal como a mostrada na Figura 3.2. Esse é um exemplo de um problema em *análise de tensão linear* ou elasticidade linear, em que procuramos determinar a distribuição de tensão $\sigma(x)$ na barra. A tensão resultará da deformação do corpo, que é caracterizada por deslocamentos de pontos do corpo, $u(x)$. O deslocamento resulta em uma tensão denotada por $\varepsilon(x)$; a deformação é uma variável adimensional. Como mostrado na Figura 3.2, a barra é submetida a uma força de campo ou a um carregamento distribuído $b(x)$. A força de campo poderia ser em razão de gravidade (se a barra fosse colocada verticalmente em vez de horizontalmente, conforme mostrado) a uma força magnética ou a uma tensão térmica; no caso unidimensional, consideraremos a força de campo por unidade de comprimento, então as unidades de $b(x)$ são força/comprimento. Além disso, as cargas podem ser aplicadas nas extremidades da barra, onde o deslocamento não é prescrito; essas cargas são chamadas de trações e indicadas por \bar{t} . Essas cargas estão em unidades de força por área e, quando multiplicadas pela área, fornecem a força aplicada.

A barra precisa satisfazer as seguintes condições:

1. Estar em equilíbrio.
2. Estar de acordo com a lei da tensão-deformação elástica, conhecida como lei de Hooke: $\sigma(x) = E(x) \varepsilon(x)$.
3. O campo de deslocamento precisa ser compatível.
4. Estar de acordo com a equação deslocamento-deformação.

A equação diferencial para a barra é obtida a partir do equilíbrio das forças internas $p(x)$ e das forças externas $b(x)$ que agem sobre o corpo em direção axial (ao longo do eixo x). Considere o equilíbrio de um segmento de barra ao longo do eixo x , conforme mostrado na Figura 3.2. A somatória das forças na direção x fornece

$$-p(x) + b\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x + p(x + \Delta x) = 0.$$

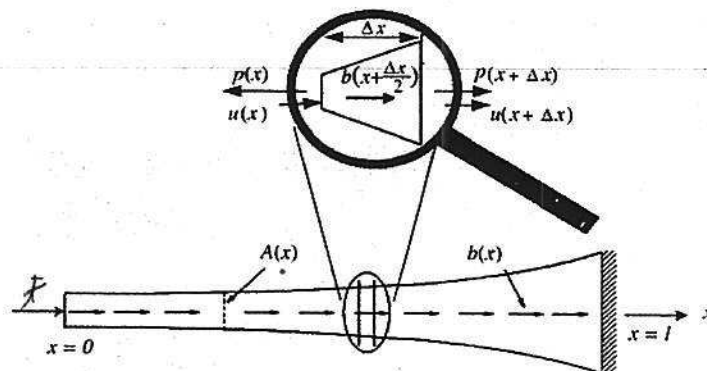


Figura 3.2 Um problema de análise de tensões (elasticidade) unidimensional.

Rearranjando os termos nessa equação e dividindo por Δx , obtemos

$$\frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} + b\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0.$$

Se tomarmos o limite dessa equação quando $\Delta x \rightarrow 0$, o primeiro termo é a derivada dp/dx e o segundo termo torna-se $b(x)$. Portanto, essa equação pode ser escrita como

$$\frac{dp(x)}{dx} + b(x) = 0. \quad (3.1)$$

Essa é a equação de equilíbrio expressa em termos da força interna p . A tensão é definida como a força dividida pela área da seção transversal:

$$\sigma(x) = \frac{p(x)}{A(x)}, \text{ então } p(x) = A(x)\sigma(x). \quad (3.2)$$

A equação deslocamento-deformação (ou cinemática) é obtida pela aplicação da definição de engenharia que utilizamos no Capítulo 2 para um segmento infinitesimal da barra. O alongamento do segmento é dado por $u(x + \Delta x) - u(x)$ e o comprimento original é Δx ; portanto, a deformação é dada por

$$\varepsilon(x) = \frac{\text{alongamento}}{\text{comprimento original}} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Tomando o limite dessa expressão quando $\Delta x \rightarrow 0$, reconhecemos que o lado direito da equação é a derivada de $u(x)$. Portanto, a equação deslocamento-deformação é

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}. \quad (3.3)$$

A lei de tensão-deformação para um material elástico linear é a lei de Hooke, que já vimos no Capítulo 2:

$$\sigma(x) = E(x)\varepsilon(x), \quad (3.4)$$

em que E é o módulo de Young.

Substituindo (3.3) por (3.4) e o resultado por (3.1) temos

$$\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b = 0, \quad 0 < x < l. \quad (3.5)$$

equação diferencial de governo

Essa é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Nela, $u(x)$ é a variável dependente, que é a função desconhecida, e x é a variável independente. Na equação (3.5) e em outras equações, a dependência das funções sobre x será freqüentemente omitida. A equação diferencial (3.5) é uma forma específica da equação de equilíbrio (3.1). A equação (3.1) aplica-se a materiais lineares e não-lineares, ao passo que (3.5) considera a linearidade na definição da deformação (3.3) e da lei de tensão-deformação (3.4). A compatibilidade é satisfeita pela exigência do deslocamento ser contínuo. Posteriormente, discutiremos mais sobre o grau de suavidade, ou continuidade, que é exigido.

Para resolver a equação diferencial (3.5), necessitamos prescrever as condições de contorno nas duas extremidades da barra. Com o objetivo de ilustrar, consideraremos as seguintes condições de contorno específicas: em $x = l$, o deslocamento, $u(x = l)$, é prescrito; em $x = 0$, a força por unidade de área, ou tração, denotada por \bar{t} , é prescrita. Essas condições são escritas como

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= \left(E \frac{du}{dx} \right)_{x=0} = \frac{p(0)}{A(0)} = -\bar{t}, \\ u(l) &= \bar{u}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Observe que a barra superposta indica um valor de contorno prescrito nessa equação e em todo este livro.

A tração \bar{t} tem as mesmas unidades que a tensão (força/área), porém seu sinal é positivo quando age na direção positiva do eixo x , sem considerar sobre qual face ela está agindo, enquanto a tensão é positiva em tração e negativa em compressão, de forma que sobre uma face negativa uma tensão positiva corresponde a uma tração negativa; isto será esclarecido na Seção 3.5. Note que tanto a carga quanto o deslocamento podem ser especificados em um ponto de contorno, mas não em ambos.

A equação diferencial de governo (3.5), juntamente com as condições de contorno (3.6), é chamada de *formulação forte* do problema. Para resumir, a formulação forte consiste na equação de governo e nas condições de contorno, as quais para esse exemplo são

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b = 0 \quad \text{sobre } 0 < x < l, \\ \text{(b)} \quad & \sigma(x = 0) = \left(E \frac{du}{dx} \right)_{x=0} = -\bar{t}, \\ \text{(c)} \quad & u(x = l) = \bar{u}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

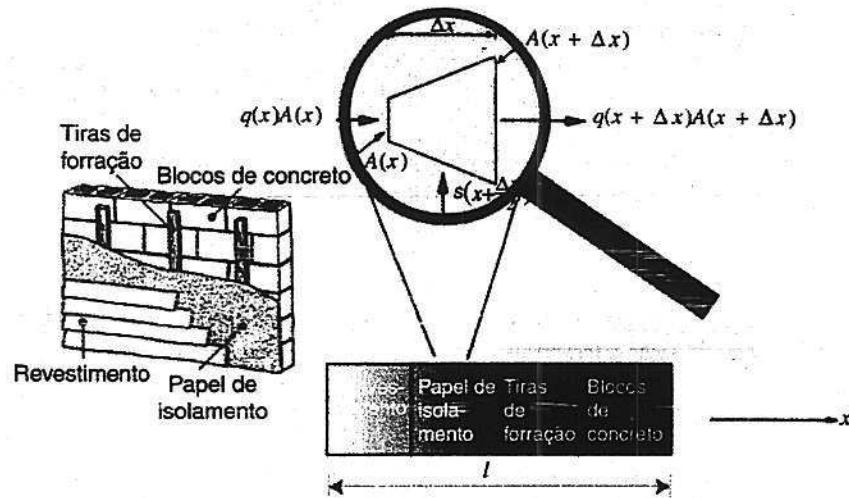


Figura 3.3 Um problema de condução de calor unidimensional.

Deve ser notado que \bar{T} , \bar{u} e b são dados. Eles são os dados que descrevem o problema. A incógnita é o deslocamento $u(x)$.

3.1.2 Formulação Forte para Condução de Calor Unidimensional¹

O fluxo de calor ocorre quando existe uma diferença de temperatura no interior de um corpo ou entre o corpo e o meio que o cerca. O calor é transferido na forma de condução, convecção e radiação térmica. O escoamento de calor pela parede de uma sala aquecida no inverno é um exemplo de condução de calor. Por outro lado, na transferência de calor por convecção, a energia transferida para o corpo depende da diferença de temperatura entre a superfície do corpo e o meio ambiente. Nesta Seção, daremos ênfase à condução de calor. Uma discussão envolvendo a convecção é apresentada na Seção 3.5.

Considere uma seção transversal de espessura da parede l , conforme mostrado na Figura 3.3. Nosso objetivo é determinar a distribuição da temperatura. Seja $A(x)$ a área normal para a direção do fluxo de calor e seja $s(x)$ o calor gerado por unidade de espessura da parede, l . Isso é frequentemente chamado de uma fonte de calor. Um exemplo comum de uma fonte de calor é o calor gerado em um fio elétrico devido à resistência. No caso unidimensional, a taxa de geração de calor é medida em unidades de energia por tempo; no Sistema Internacional de Unidades (SI), as unidades de energia por unidade de comprimento e tempo são, respectivamente, joule (J) por metro (m) e segundo (s). Lembre-se de que a unidade de potência é watt ($1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1}$). Uma fonte de calor $s(x)$ é considerada positiva quando o calor é gerado, isto é, adicionado ao sistema, e negativa quando o calor é retirado do sistema. O fluxo de calor, indicado por $q(x)$, é definido como uma taxa de fluxo de calor sobre uma superfície. Suas unidades são a taxa de calor por unidade de área; Sistema Internacional de Unidades, W m^{-2} . O fluxo de calor é positivo quando o calor escoar na direção positiva do eixo x . Consideraremos um problema em regime permanente, isto é, um sistema que não está variando com o tempo.

Para estabelecer a equação diferencial que governa o sistema, consideramos o balanço de energia (ou a conservação de energia) em um volume de controle da parede. O balanço de energia exige que a taxa de energia sob a forma de calor (qA), que é gerada no volume de controle, precisa ser igual à energia sob a forma de calor saindo do volume de controle, visto que a temperatura e conseqüentemente a energia no volume de controle são constantes em um problema em regime permanente. A energia sob a forma de calor saindo do volume de controle é a diferença entre o fluxo entrando no lado esquerdo, qA , e o fluxo saindo no lado direito, $q(x + \Delta x)A(x + \Delta x)$. Portanto, o balanço de energia para o volume de controle pode ser escrito como

$$\underbrace{s(x + \Delta x/2)\Delta x}_{\text{calor gerado}} + \underbrace{q(x)A(x)}_{\text{Fluxo de calor entrando}} - \underbrace{q(x + \Delta x)A(x + \Delta x)}_{\text{Fluxo de calor saindo}} = 0.$$

Observe que os fluxos de calor são multiplicados pela área para obter a taxa de calor, enquanto a fonte s é multiplicada pelo comprimento do segmento. Rearranjando os termos nessa equação e dividindo por Δx , obtemos

$$\frac{q(x + \Delta x)A(x + \Delta x) - q(x)A(x)}{\Delta x} = s(x + \Delta x/2).$$

Se tomarmos o limite dessa equação quando $\Delta x \rightarrow 0$, o primeiro termo coincide com a derivada $d(qA)/dx$ e o segundo termo reduz-se para $s(x)$. Portanto, essa equação pode ser escrita como

¹Recomendado para a Trajetória de Engenharia e Ciências.

$$\frac{d(qA)}{dx} = s. \quad (3.8)$$

A equação característica para o fluxo de calor, que o relaciona à temperatura, é conhecida como lei de Fourier e é dada por

$$q = -k \frac{dT}{dx}, \quad (3.9)$$

em que T é a temperatura e k é a condutividade térmica (que precisa ser positiva); no Sistema Internacional (SI) de unidades, as dimensões da condutividade térmica são $\text{W m}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Um sinal negativo aparece em (3.9) porque o calor emana de onde a temperatura é mais alta (quente) para onde ela é mais baixa (frio), isto é, contrário à direção do gradiente do campo de temperatura.

Inserindo (3.9) em (3.8) obtemos

$$\frac{d}{dx} \left(Ak \frac{dT}{dx} \right) + s = 0, \quad 0 < x < l. \quad (3.10)$$

Quando Ak é constante, obtemos

$$Ak \frac{d^2 T}{dx^2} + s = 0, \quad 0 < x < l. \quad (3.11)$$

Nas duas extremidades do domínio do problema, tanto o fluxo quanto a temperatura precisam ser prescritos; essas são as condições de contorno. Consideraremos as condições de contorno específicas da temperatura prescrita \bar{T} em $x = l$ e o fluxo prescrito \bar{q} em $x = 0$. O fluxo prescrito \bar{q} é positivo se o calor (energia) escoar para fora da barra, isto é, $q(x = 0) = -\bar{q}$. A formulação forte para o problema de condução de calor é então dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(Ak \frac{dT}{dx} \right) + s &= 0 \quad \text{em } 0 < x < l, \\ -q &= k \frac{dT}{dx} = \bar{q} \quad \text{em } x = 0, \\ T &= \bar{T} \quad \text{em } x = l. \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.1.3 Difusão Unidimensional²

A difusão é o processo em que um material é transportado por movimento atômico. Assim, na ausência do movimento de um fluido, os materiais que se encontram no fluido são difundidos por toda a parte do fluido pelo movimento atômico. Alguns exemplos são a difusão de um perfume quando uma pessoa fortemente perfumada entra em uma sala, a difusão de contaminantes em um lago e a difusão de sal em um copo com água (a água ficará salgada por difusão, mesmo na ausência de movimento do fluido).

A difusão também ocorre em sólidos. Uma das formas mais simples de difusão em sólidos ocorre quando dois materiais entram em contato um com o outro. Existem dois mecanismos básicos para a difusão em sólidos: difusão por lacunas e difusão intersticial. A difusão por lacunas ocorre primeiramente quando os átomos em difusão são de tamanhos similares. Um átomo em difusão necessita de uma lacuna no outro sólido para se mover. A difusão intersticial, representada esquematicamente na Figura 3.4, ocorre quando um átomo em difusão é pequeno o suficiente para se movimentar entre os átomos do outro sólido. Esse tipo de difusão não exige falhas de lacunas.

Seja c a concentração de átomos em difusão, dada na unidade de átomos m^{-3} . O fluxo de átomos, $q(x)$ (átomos $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$), é positivo na direção da maior para a menor concentração. A relação entre o fluxo e a concentração é conhecida como primeira lei de Fick, que é dada por

$$q = -k \frac{dc}{dx},$$

em que k é o coeficiente de difusão, dado em $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$. A equação de balanço para a difusão em regime permanente pode ser desenvolvida a partir da Figura 3.4 pelo mesmo procedimento que usamos para deduzir a equação de condução de calor pela imposição da conservação de cada espécie de átomos e pela lei de Fick. As equações são idênticas em estrutura para a condução de calor em regime permanente e diferem somente nas constantes e variáveis:

$$\frac{d}{dx} \left(Ak \frac{dc}{dx} \right) = 0 \quad \text{em } 0 < x < l.$$

²Recomendado para a Trajetória de Engenharia e Ciência.

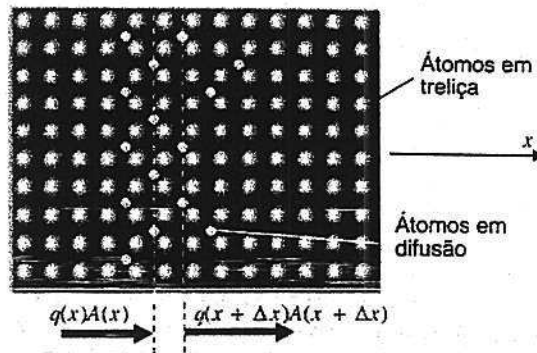


Figura 3.4 Difusão intersticial em uma treliça atômica.

3.2 FORMULAÇÃO FRACA UNIDIMENSIONAL

Para desenvolver as equações de elementos finitos, as equações diferenciais parciais precisam ser reformuladas em uma forma integral chamada *formulação fraca*. Uma formulação fraca das equações diferenciais é equivalente à equação de governo e suas condições de contorno, isto é, à formulação forte. Em muitas disciplinas, a formulação fraca possui nomes específicos; por exemplo, ela é chamada o princípio do trabalho virtual em análise de tensões.

Para mostrar como as formulações fracas são desenvolvidas, primeiramente consideramos a formulação forte do problema de análise de tensões dada em (3.7). Iniciamos pela multiplicação da equação de governo (3.7a) e a condição de contorno de tração (3.7b) por uma função *arbitrária* $w(x)$ e pela integração sobre os seus domínios de ação: para a equação de governo, o domínio pertinente é o intervalo $[0, l]$, enquanto para a condição de contorno de tração, o domínio é a área da seção transversal em $x = 0$ (não é necessária uma integral porque essa condição age somente em um ponto, mas multiplicamos a condição pela área A). As duas equações resultantes são

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^l w \left[\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b \right] dx = 0 \quad \forall w, \\ \text{(b)} \quad & \left(wA \left(E \frac{du}{dx} + \bar{t} \right) \right)_{x=0} = 0 \quad \forall w. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A função $w(x)$ é chamada de *função peso*; em tratamentos mais matemáticos, ela também é chamada de função teste. Nessa equação, $\forall w$ denota que $w(x)$ é uma função arbitrária, isto é, (3.13) deve ser válida para todas as funções $w(x)$. A arbitrariedade da função peso é crucial, como por outro lado uma formulação fraca não é equivalente à formulação forte (veja Seção 3.7). A função peso pode ser pensada como uma função que força uma solução: tudo o que for multiplicado por ela é forçado a ser zero por sua arbitrariedade.

Você deve ter notado que não forçamos a condição de contorno sobre o deslocamento em (3.13) pela função peso. Veremos que é fácil construir soluções tentativas ou candidatas $u(x)$ que satisfaçam essa condição de contorno de deslocamento, de modo que consideraremos que todas as soluções candidatas da Equação (3.13) satisfaçam essa condição de contorno. Do mesmo modo, em breve veremos que é conveniente ter todas as funções peso correspondendo a

$$w(l) = 0. \quad (3.14)$$

De forma que impomos essa condição ao conjunto de funções peso.

Conforme você verá, na solução de uma formulação fraca, é considerado um conjunto de *soluções admissíveis* $u(x)$ que satisfaça certas condições. Essas soluções são chamadas de *soluções tentativas*. Elas também são chamadas de soluções candidatas.

Poderíamos usar (3.13) para desenvolver um método de elementos finitos, mas por causa da derivada segunda de $u(x)$ na expressão, soluções tentativas muito suaves seriam necessárias; tais soluções tentativas muito suaves seriam difíceis de construir em mais que uma dimensão. Além disso, a matriz de rigidez resultante não seria simétrica, porque a primeira integral não é simétrica em $w(x)$ e $u(x)$. Por essa razão, iremos transformar (3.13) em uma formulação que contenha somente a derivada primeira. Isso levará primeiramente a matrizes de rigidez simétricas, e nos permitirá usar soluções menos suaves e simplificará o tratamento da condição de contorno de tração.

Por conveniência, reescrevemos (3.13a) na forma equivalente:

$$\int_0^l w \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) dx + \int_0^l wb dx = 0 \quad \forall w. \quad (3.15)$$

Para obter uma formulação fraca, na qual somente as derivadas primeira apareçam, primeiramente recordemos da regra para a derivada de um produto:

$$\frac{d}{dx}(wf) = w \frac{df}{dx} + f \frac{dw}{dx} \Rightarrow w \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(wf) - f \frac{dw}{dx}.$$

Integrando essa equação sobre o domínio $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l w \frac{df}{dx} dx = \int_0^l \frac{d}{dx}(wf) dx - \int_0^l f \frac{dw}{dx} dx.$$

O teorema fundamental do cálculo estabelece que a integral da derivada de uma função é a própria função. Esse teorema nos permite substituir a primeira integral no segundo membro por um conjunto de valores de contorno e reescrever a equação como

$$\int_0^l w \frac{df}{dx} dx = (wf)'_0 - \int_0^l f \frac{dw}{dx} dx \equiv (wf)_{x=l} - (wf)_{x=0} - \int_0^l f \frac{dw}{dx} dx. \quad (3.16)$$

Esta fórmula é conhecida como *integração por partes*. Descobriremos que a integração por partes é útil sempre que relacionamos as formulações forte e fraca.

Para aplicar a fórmula da integração por partes à (3.15), seja $f = AE(du/dx)$. Portanto, (3.16) pode ser escrita como

$$\int_0^l w \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) dx = \left(wAE \frac{du}{dx} \right)'_0 - \int_0^l \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx. \quad (3.17)$$

Usando (3.17), (3.15) pode ser escrita como segue:

$$\left(\underbrace{wAE \frac{du}{dx}}_{\sigma} \right)'_0 - \int_0^l \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx + \int_0^l wb dx = 0 \quad \forall w \text{ com } w(l) = 0. \quad (3.18)$$

Notamos que pela lei da tensão-deformação e pelas equações de deslocamento-deformação, o termo destacado é a tensão σ (como mostrado), de forma que essa equação pode ser reescrita como

$$(wA\sigma)_{x=l} - (wA\sigma)_{x=0} - \int_0^l \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx + \int_0^l wb dx = 0 \quad \forall w \text{ com } w(l) = 0.$$

O primeiro termo nessa equação desaparece por causa de (3.14): isso é porque é conveniente construir funções peso que desapareçam nos contornos de deslocamento prescritos. Embora o termo pareça bastante insignificante, ele levaria à perda de simetria nas equações finais.

De (3.13b), podemos ver que o segundo termo é igual a $(wA\bar{t})_{x=0}$, de modo que essa equação torna-se

$$\int_0^l \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx = (wA\bar{t})_{x=0} + \int_0^l wb dx \quad \forall w \text{ com } w(l) = 0. \quad (3.19)$$

Vamos recapitular o que fizemos. Multiplicamos a equação de governo e contorno de tração por uma função peso suave, arbitrária, e integramos o produto sobre o domínio de ação. Adicionamos as expressões e transformamos a integral, de modo que as derivadas são de ordem mais baixa.

Agora, chegamos ao ponto mais importante desse desenvolvimento: *Estabelecemos que a solução tentativa que satisfaz o que foi citado anteriormente para todas as funções suaves $w(x)$ com $w(l) = 0$ é a solução.* Então a solução é obtida como se segue:

Determinar $u(x)$ dentre as funções suaves que satisfaçam $u(l) = \bar{u}$ tal que

$$\int_0^l \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx = (wA\bar{t})_{x=0} + \int_0^l wb dx \quad \forall w \text{ com } w(l) = 0. \quad (3.20)$$

Essa equação é chamada de *formulação fraca*. O nome tem origem no fato de que as soluções para a formulação fraca não necessitam ser tão suaves quanto às das soluções da formulação forte, isto é, elas possuem exigências de continuidade mais fracas. Isso será explicado mais tarde.

Compreender como uma solução para uma equação diferencial pode ser obtida por essa instrução um tanto abstrata, e por que ela é uma solução útil, não é fácil. Exige-se que a maior parte dos estudantes tenha considerável raciocínio e experiência para compreender o processo. Para facilitar, daremos dois exemplos nos quais uma solução é obtida para um problema específico.

Mostraremos na próxima seção que a formulação fraca (3.20) é equivalente à equação de equilíbrio (3.7a) e à condição de contorno de tração (3.7b). Em outras palavras, a solução *tentativa que satisfaz* (3.20) é a *solução da formulação forte*. A prova dessa afirmação na Seção 3.4 é um passo fundamental na teoria dos elementos finitos. Na obtenção de (3.19), passamos por um conjunto de etapas matemáticas que está correto, mas não temos base para dizer que a solução para a formulação fraca é uma solução da formulação forte, a menos que possamos mostrar que (3.20) implica (3.7).

É importante lembrar que as soluções tentativas $u(x)$ precisam satisfazer as condições de contorno de deslocamento (3.7c). Satisfazer as condições de contorno de deslocamento é essencial para as soluções tentativas, de modo que essas condições de contorno são frequentemente chamadas de *condições de contorno essenciais*. Veremos na Seção 3.4 que as condições de contorno de tração emanam naturalmente da formulação fraca (3.20), de forma que as soluções tentativas não necessitam ser construídas para satisfazer as condições de contorno de tração. Portanto, essas condições de contorno são chamadas de *condições de contorno naturais*. Outras exigências de suavidade sobre as soluções tentativas serão discutidas nas Seções 3.3 e 3.9.

Uma solução tentativa suave e que satisfaz as condições de contorno essenciais é chamada de *admissível*. Do mesmo modo, uma função peso que seja suave e que desapareça nos contornos essenciais é *admissível*. Quando as formulações fracas são usadas para resolver um problema, as soluções tentativas e as funções peso devem ser admissíveis.

Observe que em (3.20), a integral é simétrica em w e u . Isso levará a uma matriz de rigidez simétrica. Além disso, a derivada de maior ordem que aparece na integral é de primeira ordem: isso terá implicações importantes sobre a construção dos métodos dos elementos finitos.

3.3 CONTINUIDADE

Embora já tenhamos desenvolvido a formulação fraca, ainda não especificamos quão suaves as funções peso e as soluções tentativas devam ser. Antes de examinar esse tópico, examinaremos o conceito de suavidade, isto é, de continuidade. Uma função apresenta um grau de continuidade C^n , se as suas derivadas de ordem j para $0 \leq j \leq n$ existem e são funções contínuas em todo o domínio. Ficaremos preocupados principalmente com as funções com graus de continuidade C^0 , C^{-1} e C^1 . Tais exemplos estão ilustrados na Figura 3.5. Como se pode ver, uma função com grau de continuidade C^0 é sucessivamente derivável por partes, isto é, sua derivada primeira é contínua, exceto em pontos selecionados. A derivada de uma função com grau de continuidade C^0 é uma função com grau de continuidade C^{-1} . Então, por exemplo, se o deslocamento é uma função com grau de continuidade C^0 , a deformação é uma função com grau de continuidade C^{-1} . Do mesmo modo, se um campo de temperatura e a condutividade térmica são funções com grau de continuidade C^0 , o fluxo é uma função com grau de continuidade C^{-1} . Em geral, a derivada de uma função com grau de continuidade C^n é uma função com grau de continuidade C^{n-1} .

As suavidades de funções com graus de continuidades C^0 , C^{-1} e C^1 podem ser relembradas por meio de alguns artifícios mnemônicos simples. Como pode ser visto na Figura 3.5, uma função com grau de continuidade C^{-1} pode ter torções ou saltos. Uma função com grau de continuidade C^0 não possui saltos, isto é, descontinuidades, porém possui torções. Uma função com grau de continuidade C^1 não possui saltos ou torções. Assim, existe uma progressão de suavidade conforme o sobrescrito aumenta, e que está resumida na Tabela 3.1. Na literatura, os saltos na função são frequentemente chamados de descontinuidades fortes, enquanto as torções são chamadas de descontinuidades fracas.

É importante mencionar que as bases de dados do CAD para superfícies suaves normalmente empregam funções com grau de suavidade no mínimo igual a C^1 ; as mais comuns são as funções "splines". De outra maneira, a superfície apresentaria torções provocadas pela função descritiva da geometria, por exemplo, em um carro existiriam torções na chapa metálica, em que o grau de continuidade de C^1 não fosse observado. Veremos que os elementos finitos normalmente empregam funções com grau de continuidade C^0 .

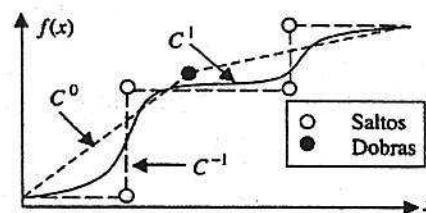


Figura 3.5 Exemplos de funções com graus de continuidade C^{-1} , C^0 e C^1 .

Tabela 3.1 Suavidades de funções.

Suavidades	Dobras	Saltos	Comentários
C^{-1}	Sim	Sim	Contínua por partes
C^0	Sim	Não	Derivável continuamente por partes
C^1	Não	Não	Derivável continuamente

3.4 EQUIVALÊNCIA ENTRE AS FORMULAÇÕES FRACA E FORTE

Na seção anterior, construímos a formulação fraca a partir da formulação forte. Para mostrar a equivalência entre as duas, agora mostraremos o inverso: a formulação fraca subentende a formulação forte. Isso garantirá que quando resolvermos a formulação fraca, teremos uma solução para a formulação forte.

A prova de que a formulação fraca implica a formulação forte pode ser obtida pela simples inversão dos passos pelos quais obtivemos a formulação fraca. Dessa forma, em vez de usar a integração por partes para eliminar a derivada segunda de $u(x)$, invertamos a fórmula para obter uma integral com uma derivada maior e um termo de contorno. Para isso, trocamos os termos em (3.17), que fornece

$$\int_0^l \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx = \left(w AE \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^l - \int_0^l w \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) dx.$$

Substituindo essa equação em (3.20) e colocando os termos da integral no lado esquerdo e os termos de contorno no lado direito obtemos

$$\int_0^l w \left[\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b \right] dx + wA(\bar{t} + \sigma)_{x=0} = 0 \quad \forall w \text{ com } w(l) = 0. \quad (3.21)$$

O segredo para fazer a possível prova é a arbitrariedade de $w(x)$. Ela pode ser assumida como sendo *algo que precisamos* para comprovar a equivalência. Nossa seleção de $w(x)$ é guiada por ter visto essa prova antes – O que faremos não é imediatamente óbvio, mas você verá que funciona! Primeiramente, seja

$$w = \psi(x) \left[\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b \right], \quad (3.22)$$

em que $\psi(x)$ é suave, $\psi(x) > 0$ sobre $0 < x < l$ e $\psi(x)$ desaparece nos contornos. Um exemplo de uma função que satisfaz essas condições é $\psi(x) = x(l-x)$. Em razão de como $\psi(x)$ é construída, segue-se que $w(l) = 0$, então, a condição de que $w = 0$ no contorno de deslocamento prescrito, isto é, no contorno essencial, é satisfeita.

Inserindo (3.22) em (3.21) obtemos

$$\int_0^l \psi \left[\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b \right]^2 dx = 0. \quad (3.23)$$

O termo de contorno desaparece porque construímos a função peso, de forma que $w(0) = 0$. Como o integrando em (3.23) é o produto de uma função positiva e o quadrado de uma função, ele precisa ser positivo em cada ponto no domínio do problema. Então, a única forma da igualdade em (3.23) ser satisfeita é se o integrando for igual a zero em cada ponto! Portanto, segue-se que

$$\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.24)$$

que é precisamente a equação diferencial na formulação forte, (3.7a).

De (3.24) segue que a integral em (3.21) desaparece, e ficamos com

$$(wA(\bar{t} + \sigma))_{x=0} = 0 \quad \forall w \text{ com } w(l) = 0. \quad (3.25)$$

Como a função peso é arbitrária, nós a selecionamos, de forma que $w(0) = 1$ e $w(l) = 0$. É muito fácil construir tal função, por exemplo, $(l-x)/l$ é uma função peso adequada; qualquer função suave que você possa esboçar sobre o intervalo $[0, l]$ e que desapareça em $x = l$ é também adequada.

Como a área da seção transversal $A(0) \neq 0$ e $w(0) \neq 0$, segue-se que

$$\sigma = -\bar{t} \quad \text{em } x = 0, \quad (3.26)$$

que é a condição de contorno natural (tração prescrita), a Equação (3.7b).

A última equação restante da formulação forte, a condição de contorno de deslocamento (3.7c), é satisfeita por todas as soluções tentativas por construção, isto é, como pode ser visto de (3.20), exigimos que $u(l) = \bar{u}$. Portanto, podemos concluir que a *solução tentativa que satisfaz a fórmula fraca satisfaz a fórmula forte*.

Outra forma de provar a equivalência com a formulação forte partindo de (3.20) e que é mais instrutiva sobre a natureza da equivalência é a seguinte. Primeiramente fazemos

$$r(x) = \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b \quad \text{para } 0 < x < l$$

e

$$r_0 = A(0)\sigma(0) + \bar{t}.$$

A variável $r(x)$ é chamada de o resíduo; $r(x)$ é o erro na Equação (3.7a) e r_0 é o erro na condição de contorno de tração (3.7b). Note que quando $r(x) = 0$, a equação de equilíbrio (3.7a) é exatamente satisfeita e quando $r_0 = 0$, a condição de contorno de tração (3.7b) é exatamente satisfeita.

A Equação (3.20) pode então ser escrita como

$$\int_0^l w(x)r(x) dx + w(0)r_0 = 0 \quad \forall w \text{ com } w(l) = 0. \quad (3.27)$$

Agora provamos que $r(x) = 0$ por contradição. Considere que em algum ponto $0 < a < l$, $r(a) \neq 0$. Em seguida considerando que $r(x)$ é suave, deve ser diferente de zero em uma pequena vizinhança de $x = a$, como mostrado na Figura 3.6(a). Temos a extensão completa na construção de $w(x)$, visto que esta é uma função suave arbitrária. Assim, a construímos como mostrado na Figura 3.6(b). A Equação (3.27) então se torna

$$\int_0^l w(x)r(x) dx + w(0)r_0 \approx \frac{1}{2} r(a)\delta \neq 0.$$

Essa expressão implica que (3.27) é violada, e por contradição $r(a)$ não pode ser diferente de zero. Isso pode ser repetido em qualquer outro ponto do intervalo aberto $0 < x < l$, então se segue que $r(x) = 0$ para $0 < x < l$, isto é, a equação de governo (3.27) é satisfeita. Façamos agora $w(0) = 1$; como a integral desaparece porque $r(x) = 0$ para $0 < x < l$, segue-se de (3.27) que $r_0 = 0$ e, portanto, a condição de contorno de tração é também satisfeita.

Do que foi exposto, podemos ver por que dizemos que a equação é forçada quando ela, ou mais precisamente o resíduo, é multiplicada pela função peso: isso ocorre por causa da arbitrariedade da função peso, qualquer coisa que ela multiplica deve desaparecer. As provas da equivalência das formulações forte e fraca são de modo crítico ligadas na validade da formulação fraca para *qualquer função suave*. Na primeira prova (Equações [3.7]-[3.20]), selecionamos uma função peso arbitrária especial (baseada na previsão de como a prova evoluiria) que tem que ser suave, enquanto na segunda prova, usamos a arbitrariedade e a suavidade diretamente. A função peso na Figura 3.6(b) pode não parecer particularmente suave, mas ela é tão suave quanto se necessita para essa prova.

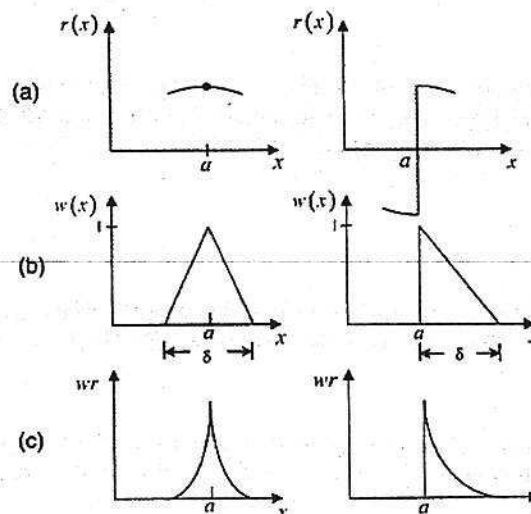


Figura 3.6 Ilustração da equivalência entre as formulações fraca e forte: (a) um exemplo da função residual; (b) escolha da função peso e (c) produto das funções residual e peso. À esquerda, o procedimento é mostrado para uma função com grau de continuidade C^0 ; à direita, para uma função com grau de continuidade C^{-1} .

Exemplo 3.1

Desenvolva a formulação fraca da formulação forte:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + 10Ax = 0, \quad 0 < x < 2, \\ \text{(b)} \quad & u_{x=0} \equiv u(0) = 10^{-4}, \\ \text{(c)} \quad & \sigma_{x=2} = \left(E \frac{du}{dx} \right)_{x=2} = 10. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A Equação (3.28c) é uma condição sobre a derivada de $u(x)$, então é uma condição de contorno natural; (3.28b) é uma condição sobre $u(x)$, então é uma condição de contorno essencial. Portanto, como a função peso precisa desaparecer nos contornos essenciais, consideramos todas as funções peso suaves $w(x)$ tal que $w(0) = 0$. As soluções tentativas $u(x)$ precisam satisfazer a condição de contorno essencial $u(0) = 10^{-4}$.

Começamos multiplicando a equação de governo e a condição de contorno natural sobre os domínios de ação por uma função peso arbitrária:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^2 \left[w \left(\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) \right) + 10Ax \right] dx = 0 \quad \forall w(x), \\ \text{(b)} \quad & (wA(E \frac{du}{dx} - 10))_{x=2} = 0 \quad \forall w(2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Em seguida, integramos a primeira equação por partes, exatamente conforme fizemos indo de (3.13a) para (3.17):

$$\int_0^2 \left[w \left(\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) \right) \right] dx = \left(wAE \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0}^{x=2} - \int_0^2 \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx. \quad (3.30)$$

Construímos as funções peso de forma que $w(0) = 0$; portanto, o primeiro termo do segundo membro da equação anterior desaparece em $x = 0$. Substituindo (3.30) por (3.29a) temos

$$- \int_0^2 AE \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx + \int_0^2 10wAx dx + \left(wAE \frac{du}{dx} \right)_{x=2} = 0 \quad \forall w(x) \text{ com } w(0) = 0. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.29b) pelo último termo de (3.31) obtemos (após uma mudança de sinal)

$$\int_0^2 AE \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx - \int_0^2 10wAx dx - 10(wA)_{x=2} = 0 \quad \forall w(x) \text{ com } w(0) = 0. \quad (3.32)$$

Portanto, a formulação fraca é como se segue: encontre a função $u(x)$ tal que para todas as funções $u(x)$ suaves com $u(0) = 10^{-4}$, tal que (3.32) seja verificada para todas as funções $W(x)$ suaves com $w(0) = 0$.

Exemplo 3.2

Desenvolva a formulação fraca para a formulação forte:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= 0 \quad \text{em } 1 < x < 3, \\ \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=1} &= 2, \quad u(3) = 1. \end{aligned} \quad (3.33)$$

As condições sobre a função peso e as soluções tentativas podem ser deduzidas das condições de contorno. O ponto de contorno $x = 1$ é uma condição natural, visto que a derivada nele é prescrita, enquanto o contorno $x = 3$ é um contorno essencial, visto que a própria solução é prescrita. Portanto, é necessário que $w(3) = 0$ e que a solução tentativa satisfaça a condição de contorno essencial $u(3) = 1$.

Em seguida, multiplicamos a equação de governo pela função peso e integramos sobre o domínio do problema; de modo similar, multiplicamos a condição de contorno natural pela função peso, que leva a

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_1^3 w \frac{d^2 u}{dx^2} dx = 0, \\ \text{(b)} \quad & \left(w \left(\frac{du}{dx} - 2 \right) \right)_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

A integração por partes do integrando em (3.34a) fornece

$$\int_1^3 w \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \left(w \frac{du}{dx} \right)_{x=3} - \left(w \frac{du}{dx} \right)_{x=1} - \int_1^3 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx. \quad (3.35)$$

Como $w(3) = 0$, o primeiro termo do segundo membro na equação anterior desaparece. Substituindo (3.35) em (3.34a) obtemos

$$- \int_1^3 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx - \left(w \frac{du}{dx} \right)_{x=1} = 0. \quad (3.36)$$

Adicionando (3.34b) a (3.36) obtemos

$$\int_1^3 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx + 2w(1) = 0. \quad (3.37)$$

Então, a formulação fraca é: encontre uma função suave $u(x)$ com $u(3) = 1$ para a qual (3.37) seja verificada para todas as funções $w(x)$ suaves com $w(3) = 0$.

Para mostrar que a formulação fraca implica a formulação forte, invertemos os passos precedentes. A integração por partes do primeiro termo em (3.37) fornece

$$\int_1^3 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = \left(w \frac{du}{dx} \right) \Big|_1^3 - \int_1^3 w \frac{d^2 u}{dx^2} dx. \quad (3.38)$$

Em seguida, substituímos (3.38) por (3.37), obtendo

$$\left(w \frac{du}{dx} \right)_{x=3} - \left(w \frac{du}{dx} \right)_{x=1} - \int_1^3 w \frac{d^2 u}{dx^2} dx + 2w(1) = 0. \quad (3.39)$$

Como no contorno essencial, a função peso desaparece, isto é, $w(3) = 0$, retira-se o primeiro termo da equação anterior. Coletando os termos e mudando sinais, obtemos

$$\int_1^3 w \frac{d^2 u}{dx^2} dx + \left(w \left(\frac{du}{dx} - 2 \right) \right)_{x=1} = 0. \quad (3.40)$$

Agora usamos os mesmos argumentos que para as Equações (3.22)–(3.26). Como $w(x)$ é arbitrário, fazemos

$$w = \psi(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2},$$

em que

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ > 0, & 1 < x < 3, \\ 0, & x = 3. \end{cases}$$

Então (3.40) torna-se

$$\int_1^3 \psi(x) \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx = 0.$$

Como o integrando é positivo no intervalo $[1, 3]$, segue-se que a única forma do integrando desaparecer é se

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{para} \quad 1 < x < 3,$$

que é a equação diferencial na formulação forte (3.33).

Agora, seja $w(x)$ uma função suave que desapareça em $x = 3$, mas que seja igual a um em $x = 1$. Você pode esboçar um número infinito de tais funções: qualquer curva entre esses pontos com os valores finais especificados servirá. Como já sabemos que a integral em (3.40) desaparece, ficamos com

$$\left(w \left(\frac{du}{dx} - 2 \right) \right)_{x=1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{du}{dx} - 2 \right)_{x=1} = 0,$$

de modo que a condição de contorno natural é satisfeita. Como a condição de contorno essencial é satisfeita por todas as soluções tentativas, podemos então concluir que a solução da formulação fraca é a solução para a formulação forte.

Exemplo 3.3

Obtenha uma solução para a formulação fraca no Exemplo 3.1 utilizando soluções tentativas e funções peso da forma

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x,$$

$$w(x) = \beta_0 + \beta_1 x,$$

em que α_0 e α_1 são parâmetros desconhecidos e β_0 e β_1 são parâmetros arbitrários. Considere que A é constante e $E = 10^5$. Para ser admissível, a função peso precisa desaparecer em $x = 0$, de modo que $\beta_0 = 0$. Para a solução tentativa ser admissível, esta precisa satisfazer a condição de contorno essencial $u(0) = 10^{-4}$, logo $\alpha_0 = 10^{-4}$.

Dessa simplificação, resulta que apenas um parâmetro desconhecido e um parâmetro arbitrário permanecem, e

$$\begin{aligned} u(x) &= 10^{-4} + \alpha_1 x, & \frac{du(x)}{dx} &= \alpha_1, \\ w(x) &= \beta_1 x, & \frac{dw}{dx} &= \beta_1. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Substituindo essa equação na formulação fraca (3.32) obtemos

$$\int_0^2 \beta_1 \alpha_1 E dx - \int_0^2 \beta_1 x^2 10 dx - (\beta_1 x 10)_{x=2} = 0.$$

Avaliando as integrais e fatorando sobre β_1 , obtemos

$$\beta_1 \left(2\alpha_1 E - \frac{80}{3} - 20 \right) = 0$$

Como a equação anterior precisa ser verificada para todo β_1 , segue-se que o termo entre parênteses precisa desaparecer, então $\alpha_1 = \frac{70}{3E} = \frac{7}{3} \times 10^{-4}$. Substituindo esse resultado em (3.41) obtemos a formulação fraca, que indicamos pelo sobrescrito 'lin', visto que é obtida a partir de soluções tentativas lineares: $u^{\text{lin}} = 10^{-4}(1 + \frac{7}{3}x)$ e $\sigma^{\text{lin}} = \frac{70}{3}$ (a lei tensão-deformação precisa ser usada para obter as tensões). Os resultados são mostrados na Figura 3.7 e comparados com a solução exata dada por

$$u^{\text{ex}}(x) = 10^{-4}(1 + 3x - x^3/6), \quad \sigma^{\text{ex}}(x) = 10(3 - x^2/2).$$

Observe que mesmo essa aproximação linear muito simples para uma solução tentativa fornece um resultado razoavelmente preciso, mas ele não é exato. Veremos essa mesma carência de exatidão nas soluções em elementos finitos.

Repita esse exemplo com soluções tentativas e funções peso quadráticas

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2, \quad w(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2.$$

Como antes, em razão das condições nos contornos essenciais, $\alpha_0 = 10^{-4}$ e $\beta_0 = 0$. Substituindo os campos anteriores com os valores dados de α_0 e β_0 na formulação fraca obtemos

$$\int_0^2 (\beta_1 + 2\beta_2 x)(E(\alpha_1 + 2\alpha_2 x))dx - \int_0^2 (\beta_1 x + \beta_2 x^2)10x dx - ((\beta_1 x + \beta_2 x^2)10)_{x=2} = 0.$$

Integrando, fatorando sobre β_1 e β_2 e rearranjando os termos obtemos

$$\beta_1 \left[E(2\alpha_1 + 4\alpha_2) - \frac{140}{3} \right] + \beta_2 \left[\left(4\alpha_1 + \frac{32\alpha_2}{3} \right) E - 80 \right] = 0$$

Como a equação anterior precisa ser válida para funções peso arbitrárias, ela precisa valer para β_1 e β_2 arbitrários. Portanto, os coeficientes de β_1 e β_2 precisam desaparecer (lembre-se do teorema do produto escalar), que fornece a seguinte equação linear algébrica em α_1 e α_2 :

$$E \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & \frac{32}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{140}{3} \\ 80 \end{bmatrix}$$

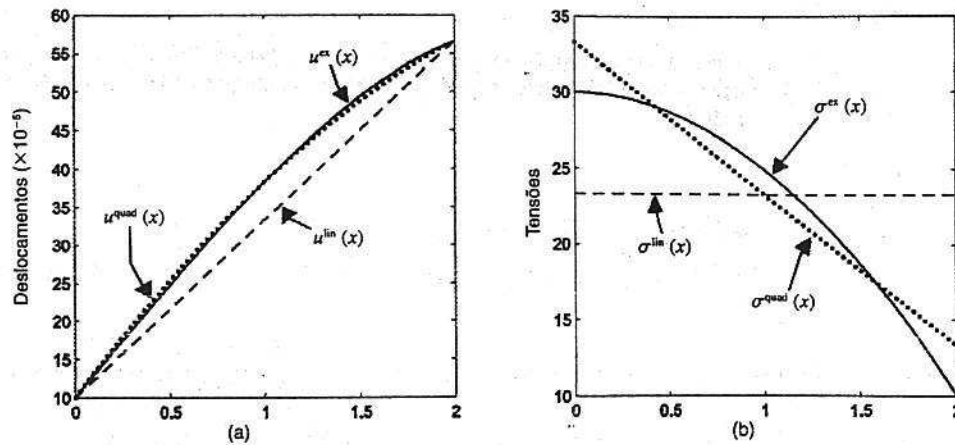


Figura 3.7 Comparação entre as aproximações linear (lin) e quadrática (quad) para a solução exata de (a) deslocamentos e (b) tensões.

A solução é $\alpha_1 = \frac{10}{3} \times 10^{-4}$ e $\alpha_2 = -0,5 \times 10^{-4}$. Os deslocamentos e as tensões resultantes são

$$u^{\text{quad}} = 10^{-4} \left(1 + \frac{10}{3}x - 0,5x^2 \right), \quad \sigma^{\text{quad}} = 10 \left(\frac{10}{3} - x \right).$$

A solução fraca é mostrada na Figura 3.7, da qual você pode ver que a solução tentativa quadrática de dois parâmetros aproxima-se mais da solução exata que a solução tentativa linear de um parâmetro.

3.5 ANÁLISE DE TENSÕES UNIDIMENSIONAL COM CONDIÇÕES DE CONTORNO ARBITRÁRIAS

3.5.1 Formulação Forte para Análise de Tensões Unidimensional

Agora consideraremos uma situação mais geral, onde em vez de especificar uma condição de contorno de tensão em $x = 0$ e uma condição de contorno de deslocamento em $x = l$, as condições de contorno de deslocamento e tensão podem ser prescritas em cada extremidade. Para isso, necessitaremos de uma notação mais geral para os contornos.

O contorno do domínio unidimensional, que consiste em dois pontos extremos, é denotado por Γ . A porção do contorno onde os deslocamentos são prescritos é denotada por Γ_u ; o contorno onde a tração é prescrita é denotado por Γ_t . Nessa notação geral, tanto Γ_u como Γ_t podem ser conjuntos vazios (sem pontos), com um ponto ou dois pontos. *A tração e o deslocamento não podem ser ambos prescritos no mesmo ponto de contorno.* Fisicamente, pode-se ver que isso é impossível, considerando uma barra tal como a mostrada na Figura 3.2. Se pudéssemos prescrever tanto o deslocamento quanto a força sobre o lado direito, isso significaria que a deformação da barra seria independente da força aplicada. Significaria também que as propriedades do material não teriam efeito sobre o comportamento força-deslocamento da barra. Obviamente, isso não é realista do ponto de vista físico, de forma que qualquer ponto de contorno existe: ou uma tração ou um deslocamento prescritos. Escrevemos isso como $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$. Iremos ver nos exemplos subsequentes que isso pode ser generalizado para outros sistemas: condições de contorno naturais e condições de contorno essenciais não podem ser aplicadas nos mesmos pontos de contorno.

Freqüentemente, os contornos com condições de contorno essenciais serão denominados contornos essenciais; do mesmo modo, os contornos com condições de contorno naturais serão denominados contornos naturais. Podemos então dizer que um contorno não pode ser ao mesmo tempo um contorno essencial e natural. Também resulta da teoria dos problemas de valor de contorno que um tipo de condição de contorno é necessário em cada ponto de contorno, isto é, não podemos ter qualquer contorno no qual não seja aplicada uma condição de contorno essencial ou natural. Portanto, qualquer contorno é ou um contorno essencial ou um contorno natural, e sua união é o contorno inteiro. Matematicamente, isso pode ser escrito como $\Gamma_t \cup \Gamma_u = \Gamma$.

Para resumir o que foi dito anteriormente, em qualquer contorno, tanto a função quanto a sua derivada precisam ser especificadas, porém estas não podem ser especificadas no mesmo contorno. Assim qualquer contorno precisa ser um contorno essencial ou um contorno natural, mas não pode ser os dois ao mesmo tempo. Essas condições são muito importantes e podem ser matematicamente expressas pelas duas condições que estabelecemos anteriormente:

$$\Gamma_t \cup \Gamma_u = \Gamma, \quad \Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset. \quad (3.42)$$

Os dois contornos são ditos *complementares*: o contorno essencial mais seu complemento, o contorno natural, constitui o contorno total, e vice-versa.

Usando a notação anterior, resumimos a formulação forte para análise de tensões unidimensional (3.7) no Quadro 3.1.

Quadro 3.1 Formulação forte para análise de tensões unidimensional

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b &= 0, & 0 < x < l, \\
 \sigma n = E n \frac{du}{dx} &= \bar{t} \text{ em } \Gamma_t, \\
 u &= \bar{u} \text{ em } \Gamma_u.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

No Quadro 3.1, adicionamos um vetor unitário normal ao corpo e o indicamos por n ; como pode ser visto da Figura 3.2, $n = -1$ em $x = 0$ e $n = +1$ em $x = l$. Esse artifício nos permite escrever a condição de contorno em termos das trações aplicadas nas extremidades. Por exemplo, quando uma força positiva por unidade de área é aplicada no primeiro membro da barra na Figura 3.2, a tensão naquela extremidade é negativa, isto é, ela é compressiva, e $\sigma n = -\sigma = \bar{t}$. Em qualquer ponto de contorno do segundo membro, $n = +1$ e, portanto, $\sigma n = \sigma = \bar{t}$.

3.5.2 Formulação Fraca para Análise de Tensões Unidimensional

Nesta seção, desenvolveremos a formulação fraca para análise de tensões unidimensional (3.43), com condições de contorno arbitrárias. Primeiramente, reescrevemos a fórmula para integração por partes na notação introduzida na Seção 3.2:

$$\int_{\Omega} w \frac{df}{dx} dx = (wfn)|_{\Gamma} - \int_{\Omega} f \frac{dw}{dx} dx = (wfn)|_{\Gamma_u} + (wfn)|_{\Gamma_t} - \int_{\Omega} f \frac{dw}{dx} dx. \tag{3.44}$$

Na equação anterior, o subscrito Ω na integral indica que a integral é avaliada sobre o domínio do problema unidimensional, isto é, a notação Ω indica quaisquer limites de integração, tais como $[0, l]$, $[a, b]$. O subscrito Γ indica que a quantidade precedente é avaliada em todos os pontos de contorno, enquanto os subscritos Γ_u e Γ_t indicam que as quantidades precedentes são avaliadas sobre os contornos de deslocamento e de tração prescritos, respectivamente. A segunda igualdade resulta da complementaridade dos contornos de tração e deslocamento: visto que, como indicado por (3.42), o contorno total é a soma dos contornos de tração e de deslocamento, o termo contorno pode ser expresso como a soma dos contornos de tração e de deslocamento.

As funções peso são construídas de forma que $w = 0$ em Γ_u , e as soluções tentativa são construídas de maneira que $u = \bar{u}$ em Γ_u .

Multiplicamos as duas primeiras equações na formulação forte (3.43) pela função peso e as integramos sobre os domínios nos quais elas agem: o domínio Ω para a equação diferencial e o domínio Γ_t para a condição de contorno de tração. Isso fornece

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \int_{\Omega} w \left(\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b \right) dx &= 0 \quad \forall w, \\
 (b) \quad (wA(\bar{t} - \sigma n))|_{\Gamma_t} &= 0 \quad \forall w.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Denotando $f = AE(du/dx)$ e usando a integração por partes (3.44) do primeiro termo em (3.45a) e combinando com (3.45b) obtemos

$$(wA\sigma n)|_{\Gamma_t} + (wA\bar{t})|_{\Gamma_t} - \int_{\Omega} \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx + \int_{\Omega} wb dx = 0 \quad \forall w \text{ com } w = 0 \text{ em } \Gamma_u. \tag{3.46}$$

O termo de contorno em Γ_u desaparece porque $w|_{\Gamma_u} = 0$. A formulação fraca então se torna

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx = (wA\bar{t})|_{\Gamma_t} + \int_{\Omega} wb dx \quad \forall w \text{ com } w = 0 \text{ em } \Gamma_u.$$

Neste ponto, introduzimos alguma notação nova, de modo que não necessitaremos continuar repetindo a frase 'u(x) é suave o suficiente e satisfaz a condição de contorno essencial'. Para esse objetivo, indicaremos o conjunto de todas as funções que são suficientemente suaves por H^1 . As funções H^1 apresentam grau de continuidade C^0 . Matematicamente, isso é expresso como $H^1 \subset C^0$. Entretanto, nem todas as funções C^0 são soluções tentativas adequadas. Trabalharemos adicionalmente sobre isso na Seção 3.9; H^1 é um espaço de funções com derivadas de quadrados integráveis.

Denotamos o conjunto de todas as funções que são soluções tentativas admissíveis por U , onde

$$U = \{u(x) | u(x) \in H^1, u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_u\}. \tag{3.47}$$

Qualquer função no conjunto U deve satisfazer todas as condições que seguem a barra vertical. Assim, a expressão anterior denota o conjunto de todas as funções que são suficientemente suaves (a primeira condição depois da barra) e satisfaz a condição de contorno essencial (a condição depois da vírgula). Portanto, podemos indicar que uma função $u(x)$ é uma solução tentativa admissível afirmando que $u(x)$ está contida no conjunto U , ou $u(x) \in U$.

De modo similar, indicaremos o conjunto de todas as funções peso *admissíveis* por

$$U_0 = \{w(x) | w(x) \in H^1, w = 0 \text{ em } \Gamma_u\}. \quad (3.48)$$

Observe que esse conjunto de funções é idêntico a U , exceto que as funções peso precisam desaparecer nos contornos essenciais. Esse espaço é distinguido de U pelo subscrito zero.

Tais conjuntos de funções são freqüentemente chamadas de *função espaços* ou somente *espaços*. A função espaço H^1 contém um número infinito de funções. Por essa razão, ela é chamada de um conjunto infinito-dimensional. Para uma discussão de vários espaços, o leitor pode desejar consultar Ciarlet (1978), Oden e Reddy (1978) e Hughes (1987).

Com essas definições, podemos escrever a formulação fraca ([3.45], [3.47]) e [3.48]) no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 Formulação fraca para análise de tensões unidimensional

Determine $u(x) \in U$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx = (wA\bar{T})|_{\Gamma_r} + \int_{\Omega} wb dx \quad \forall w \in U_0. \quad (3.49)$$

Observe que as funções $w(x)$ e $u(x)$ aparecem simetricamente na primeira integral em (3.49), enquanto isso não acontece em (3.45a). Em (3.49), tanto as soluções tentativas quanto as funções peso aparecem como derivadas primeira, enquanto na primeira integral em (3.45a), as funções peso aparecem diretamente e as soluções tentativas aparecem como uma derivada segunda. Veremos em consequência que (3.49) levará a uma matriz de rigidez simétrica e a um conjunto de equações algébricas lineares simétricas, enquanto isso não acontecerá com (3.45a).

3.6 CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL COM CONDIÇÕES DE CONTORNO ARBITRÁRIAS³

3.6.1 Formulação Forte para Condução de Calor Unidimensional com Condições de Contorno Arbitrárias

Seguindo o mesmo procedimento da Seção 3.5.1, a porção do contorno onde a temperatura é prescrita, isto é, o contorno essencial, é denotada por Γ_T e o contorno onde o fluxo é prescrito é denotado por Γ_q ; esses são os contornos com as condições de contorno naturais. Esses contornos são complementares, então

$$\Gamma_q \cup \Gamma_T = \Gamma, \quad \Gamma_q \cap \Gamma_T = \emptyset. \quad (3.50)$$

Com o vetor normal unitário usado em (3.43), podemos expressar a condição de contorno natural como $qn = \bar{q}$. Por exemplo, o fluxo positivo q causa entrada de calor (\bar{q} negativo) sobre o ponto de contorno à esquerda onde $qn = -q = \bar{q}$ e saída de calor (\bar{q} positivo) sobre o ponto de contorno à direita onde $qn = q = \bar{q}$.

Podemos então reescrever a formulação forte (3.12) como mostrado no Quadro 3.3.

Quadro 3.3 Formulação forte para problemas de condução de calor unidimensional

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(Ak \frac{dT}{dx} \right) + s &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ qn &= -kn \frac{dT}{dx} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q, \\ T &= \bar{T} \quad \text{em } \Gamma_T. \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.6.2 Formulação Fraca para Condução de Calor Unidimensional com Condições de Contorno Arbitrárias

Novamente multiplicamos as duas primeiras equações na formulação forte (3.51) pela função peso e integramos sobre os domínios nos quais elas agem, o domínio Ω para a equação diferencial e o domínio Γ_q para a condição de contorno de fluxo, que leva a

³Recomendado para a trajetória de Engenharia e Ciências.

$$(a) \int_{\Omega} w \frac{d}{dx} \left(Ak \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_{\Omega} ws dx = 0 \quad \forall w, \quad (3.52)$$

$$(b) (wA(qn - \bar{q}))|_{\Gamma_q} = 0 \quad \forall w.$$

O uso da integração por partes do primeiro termo em (3.52a) fornece

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} Ak \frac{dT}{dx} dx = \left(wAk \frac{dT}{dx} n \right) \Big|_{\Gamma} + \int_{\Omega} ws dx \quad \forall w \text{ com } w = 0 \text{ em } \Gamma_T. \quad (3.53)$$

Recordando que $w = 0$ em Γ_T e combinando (3.53) com (3.52b) obtém-se

Quadro 3.4 Formulação fraca para problemas de condução de calor unidimensional
Determine $T(x) \in U$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} Ak \frac{dT}{dx} dx = -(wA\bar{q}) \Big|_{\Gamma_q} + \int_{\Omega} ws dx \quad \forall w \in U_0. \quad (3.54)$$

Observe a similaridade entre (3.54) e (3.49).

3.7 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO COM DOIS PONTOS COM CONDIÇÕES DE CONTORNO GENERALIZADAS⁴

3.7.1 Formulação Forte para Problemas de Valor de Contorno com Dois Pontos com Condições de Contorno Generalizadas

As equações desenvolvidas neste capítulo para problemas de condução de calor, difusão e elasticidade são todos da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx} \left(A\kappa \frac{d\theta}{dx} \right) + f = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.55)$$

Tais problemas unidimensionais são chamados de problemas de *valor de contorno de dois pontos*. A Tabela 3.2 fornece o significado específico das variáveis e dos parâmetros anteriores para diversas aplicações. As condições de contorno naturais podem também ser generalizadas como (baseado em Becker *et al.* [1981])

$$\left(\kappa n \frac{d\theta}{dx} - \bar{\Phi} \right) + \beta(\theta - \bar{\theta}) = 0 \quad \text{em } \Gamma_{\Phi}. \quad (3.56)$$

A Equação (3.56) é uma condição de contorno natural porque a derivada da solução aparece na mesma. A Equação (3.56) se reduz às condições de contorno naturais padrão consideradas nas seções prévias quando $\beta(x) = 0$. Note que a condição de contorno essencial pode ser recuperada como um caso limite de (3.56) quando $\beta(x)$ é um parâmetro de penalidade, isto é, um número grande (veja Capítulo 2). Nesse caso, $\Gamma = \Gamma_{\Phi}$ e a Equação (3.56) é chamada de condição de contorno generalizada.

Um exemplo dessa condição de contorno generalizada é uma barra elástica com uma mola fixada como mostrado na Figura 3.8. Nesse caso, $\beta(l) = k$ e (3.56) se reduz a

$$\left(E(l)n(l) \frac{du}{dx}(l) - \bar{t} \right) + k(u(l) - \bar{u}) = 0 \quad \text{em } x = l, \quad (3.57)$$

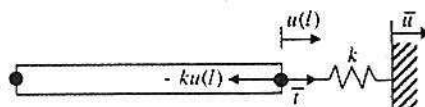


Figura 3.8 Um exemplo do contorno generalizado para problema de elasticidade.

⁴Recomendado para a Trajetória Avançada.

Tabela 3.2 Tabela de conversão para equações físicas aplicáveis à forma geral (3.55) e (3.56).

Campo/parâmetro	Elasticidade	Condução de calor	Difusão
θ	u	T	c
κ	E	k	k
f	b	s	s
$\bar{\Phi}$	\bar{r}	$-\bar{q}$	$-\bar{q}$
$\bar{\theta}$	\bar{u}	\bar{T}	\bar{c}
Γ_{Φ}	Γ_r	Γ_q	Γ_q
Γ_{θ}	Γ_u	Γ_T	Γ_c
β	k	h	h

em que $\beta(l) = k$ é a constante da mola. Se a rigidez da mola for estabelecida em um valor muito grande, a condição de contorno anterior implica $u(l) = \bar{u}$; se fizermos $k = 0$, a condição de contorno anterior corresponde ao contorno de tração prescrito. Na prática, tais condições de contorno generalizadas (3.57) são freqüentemente usadas para modelar a influência do ambiente. Por exemplo, se a barra é um modelo simplificado de um edifício e de sua fundação, a mola pode ser representada pela rigidez do solo.

Outro exemplo da aplicação dessa condição de contorno é a transferência de calor por convecção, na qual a energia é transferida entre a superfície da parede e o meio ambiente. Suponha que ocorra transferência de calor por convecção em $x = l$. Seja $T(l)$ a temperatura da parede em $x = l$ e \bar{T} a temperatura do meio ambiente. Então o fluxo no contorno $x = l$ é dado por $q(l) = h(T(l) - \bar{T})$ de forma que $\beta(l) = h$ e a condição de contorno é

$$k\kappa \frac{du}{dx} + h(T(l) - \bar{T}) = 0, \quad (3.58)$$

em que h é o coeficiente de transferência de calor por convecção, o qual possui dimensões de $W m^{-2} ^\circ C^{-1}$. Note que quando o coeficiente de transferência de calor por convecção é muito grande, a temperatura \bar{T} é imediatamente sentida em $x = l$ e, assim, a condição de contorno essencial é novamente forçada como um caso limite da condição de contorno natural.

Existem duas aproximações para tratar com a condição de contorno (3.56). Nós as chamaremos de métodos da *penalidade* e da *partição*. No método da penalidade, a condição de contorno essencial é forçada a um caso limite da condição de contorno natural, igualando-se $\beta(x)$ a um parâmetro de penalidade. A formulação forte resultante para o método da penalidade é dada no Quadro 3.5.

Quadro 3.5 Formulação forte geral para problemas unidimensionais — método da penalidade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(A\kappa \frac{d\theta}{dx} \right) + f &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \left(\kappa n \frac{d\theta}{dx} - \bar{\Phi} \right) + \beta(\theta - \bar{\theta}) &= 0 \quad \text{em } \Gamma. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Na aproximação da partição, o contorno total é partido no contorno natural, Γ_{Φ} , e no contorno essencial complementar, Γ_{θ} . A condição de contorno natural possui a forma generalizada definida pela Equação (3.56). A formulação forte resultante para o método da partição é resumida no Quadro 3.6.

Quadro 3.6 Formulação forte geral para problemas unidimensionais — método da partição

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{d}{dx} \left(A\kappa \frac{d\theta}{dx} \right) + f = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ (b) \quad & \left(\kappa n \frac{d\theta}{dx} - \bar{\Phi} \right) + \beta(\theta - \bar{\theta}) = 0 \quad \text{em } \Gamma_{\Phi}, \\ (c) \quad & \theta = \bar{\theta} \quad \text{em } \Gamma_{\theta}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

3.7.2 Formulação Fraca para Problema de Valor de Contorno com Dois Pontos com Condições de Contorno Generalizadas

Nesta seção, deduziremos a formulação fraca geral para problemas de valor de contorno com dois pontos. Os métodos da penalidade e da partição descritos na Seção 3.7.1 serão considerados. Para obter a formulação fraca geral para o método da penalidade, multiplicamos as duas equações na formulação forte (3.59) pela função peso e integramos sobre os domínios nos quais elas agem: o domínio Ω para a equação diferencial e o domínio Γ para a condição de contorno generalizada.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{\Omega} w \left(\frac{d}{dx} \left(A \kappa \frac{d\theta}{dx} \right) + f \right) dx = 0 \quad \forall w, \\ \text{(b)} \quad & w A \left(\left(\kappa n \frac{d\theta}{dx} - \bar{\Phi} \right) + \beta(\theta - \bar{\theta}) \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \quad \forall w. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Após integrar por partes o primeiro termo em (3.61a) e adicionar (3.61b), a formulação fraca geral para problemas unidimensionais está resumida no Quadro 3.7.

Quadro 3.7 Formulação fraca geral para problemas unidimensionais — método da penalidade
Determine $\theta(x) \in H^1$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} A \kappa \frac{d\theta}{dx} dx - \int_{\Omega} w f dx - w A (\bar{\Phi} - \beta(\theta - \bar{\theta})) \Big|_{\Gamma} = 0 \quad \forall w \in H^1. \quad (3.62)$$

Observe que no método da penalidade, $\Gamma_{\Phi} = \Gamma$, a função peso é arbitrária em Γ , isto é, $\forall w(x) \in H^1$, e a solução não é, em princípio, forçada a desaparecer sobre o contorno essencial, isto é, $\theta(x) \in H^1$. A condição de contorno essencial é obtida como um caso-limite da condição de contorno natural ao se fazer $\beta(x)$ muito grande, isto é, um parâmetro de penalidade.

No método da partição, a formulação fraca geral para problemas unidimensionais é dada no Quadro 3.8.

Quadro 3.8 Formulação fraca geral para problemas unidimensionais — método da partição
Determine $\theta(x) \in U$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} A \kappa \frac{d\theta}{dx} dx - \int_{\Omega} w f dx - w A (\bar{\Phi} - \beta(\theta - \bar{\theta})) \Big|_{\Gamma_{\Phi}} = 0 \quad \forall w \in U_0, \quad (3.63)$$

em que U e U_0 são dados em (3.47) e (3.48), respectivamente. Note que na aproximação da partição, a função peso desaparece sobre o contorno essencial, Γ_{Φ} , isto é, $\forall w \in U_0$. Os contornos Γ_{Φ} e Γ_{Φ^c} são complementares.

3.8 ADVECÇÃO-DIFUSÃO⁵

Em muitas situações, uma substância é transportada e difundida por um meio. Por exemplo, um poluente em um aquífero é disperso tanto por difusão quanto pelo movimento da água no aquífero. Em tanques de resfriamento para plantas de potência, a energia sob a forma de calor move-se pelo tanque tanto por difusão quanto por transporte em virtude do movimento da água. Se adicionarmos açúcar em uma xícara de café, ele irá se dispersar através da xícara por difusão; a dispersão é acelerada pela agitação, que causa advecção no açúcar. A dispersão devido ao movimento do fluido possui diversos nomes além de advecção: convecção e transporte são outros dois nomes largamente utilizados.

3.8.1 Formulação Forte da Equação de Advecção-Difusão

Considere a advecção-difusão de uma espécie em um modelo unidimensional de área de seção transversal $A(x)$, que poderia ser um tubo ou um aquífero; a concentração da espécie ou a energia é denotada por $\theta(x)$. Em um aquífero, o escoamento pode estender-se a uma grande distância normal ao plano, de modo que consideraremos uma unidade de

⁵Recomendado para a Trajetória Avançada.

profundidade, onde a profundidade é a dimensão perpendicular ao plano. Num tubo, $A(x)$ é simplesmente a área da seção transversal. A velocidade do tubo é denotada por (x) , e ela é considerada constante na seção transversal a cada ponto ao longo do eixo, isto é, para cada x . Uma fonte $s(x)$ é considerada; ela pode ser positiva ou negativa. Esta última indica o declínio ou a eliminação das espécies. Por exemplo, no transporte de um contaminante radioativo, $s(x)$ é a variação em um isótopo específico, o qual pode diminuir devido ao decaimento ou aumentar em razão da formação. O fluido é considerado incompressível, o que acarreta algumas implicações que veremos posteriormente.

O princípio da conservação estabelece que a espécie (seja um material, uma energia ou um estado) é conservada em cada volume de controle Δx . Portanto, a quantidade da espécie que entra menos a quantidade que sai é igual à quantidade produzida (um volume negativo quando as espécies decaem). Neste caso, temos dois mecanismos para escoamentos que entram e saem do volume de controle, a advecção, que é $(Av\theta)_x$, e a difusão, que é $q(x)$. O princípio da conservação pode ser então expresso como

$$(Av\theta)_x + (Aq)_x - (Av\theta)_{x+\Delta x} - (Aq)_{x+\Delta x} + \Delta x s_{x+\Delta x/2} = 0.$$

Dividindo por Δx e tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, obtemos (após uma troca de sinal)

$$\frac{d(Av\theta)}{dx} + \frac{d(Aq)}{dx} - s = 0. \quad (3.64)$$

Agora, consideraremos a incompressibilidade do fluido. Para um fluido incompressível, o volume de material entrando em um volume de controle é igual ao volume de material saindo, que fornece

$$(Av)_x = (Av)_{x+\Delta x}.$$

Passando o segundo membro para o primeiro membro dessa equação e dividindo por Δx e fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{d(Av)}{dx} = 0. \quad (3.65)$$

Se usarmos a regra da derivada do produto no primeiro termo de (3.64), obtemos

$$\frac{d(Av\theta)}{dx} = \frac{d(Av)}{dx} \theta + Av \frac{d\theta}{dx}, \quad (3.66)$$

em que o primeiro termo no segundo membro desaparece por (3.65), então substituindo (3.66) em (3.64) obtemos

$$Av \frac{d\theta}{dx} + \frac{d(Aq)}{dx} - s = 0. \quad (3.67)$$

Essa é a equação da conservação para uma espécie em um fluido incompressível em movimento. Se a difusão for linear, a primeira lei de Fick é verificada, então

$$q = -k \frac{d\theta}{dx}, \quad (3.68)$$

em que k é a difusividade. Substituindo (3.68) em (3.67) obtemos

$$Av \frac{d\theta}{dx} - \frac{d}{dx} \left(Ak \frac{d\theta}{dx} \right) - s = 0. \quad (3.69)$$

Essa é chamada equação de advecção-difusão. O primeiro termo leva em conta a advecção (algumas vezes chamada de transporte) do material. O segundo termo leva em conta a difusão. O terceiro termo é o termo de fonte.

Consideraremos as condições de contorno essencial e natural usuais

$$\begin{aligned} (a) \quad & \theta = \bar{\theta} \quad \text{em } \Gamma_\theta, \\ (b) \quad & -k \frac{d\theta}{dx} n = qn = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q, \end{aligned} \quad (3.70)$$

em que Γ_θ e Γ_q são complementares, veja (3.50).

A equação de advecção-difusão é importante por si própria, mas ela é também um modelo para muitas outras equações. Equações similares à equação de advecção-difusão são encontradas por meio do campo da mecânica dos fluidos computacional. Por exemplo, a equação da vorticidade é dessa forma. Se substituirmos θ por v , então o segundo termo em (3.66) corresponde ao termo de transporte nas equações de Navier-Stokes, que são as equações fundamentais da dinâmica dos fluidos.

3.8.2 Formulação Fraca da Equação de Advecção-Difusão

Obtemos a formulação fraca de (3.69) multiplicando a equação de governo por uma função peso arbitrária $w(x)$ e integrando sobre o domínio. Do mesmo modo, a declaração fraca das condições de contorno naturais é obtida pela multiplicação de (3.70b) pela função peso e pela área A . As equações fracas resultantes são

$$(a) \int_{\Omega} w \left(A v \left(\frac{d\theta}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left(A k \frac{d\theta}{dx} \right) - s \right) dx = 0 \quad \forall w, \quad (3.71)$$

$$(b) A w \left(k n \frac{d\theta}{dx} + \bar{q} \right) \Big|_{\Gamma_q} = 0 \quad \forall w.$$

Os espaços de solução tentativa e função peso são exatamente como antes, veja (3.47) e (3.48).

Podemos ver que o segundo termo na Equação (3.71a) não é simétrico em w e θ e envolve uma derivada segunda, a qual desejamos evitar visto que ela requereria soluções tentativas mais suaves que o conveniente. Podemos reduzir a ordem da derivada por integração por partes.

O primeiro termo em (3.71a) é intrincado, visto que envolve somente uma derivada primeira, mas não é simétrico. Daí não podemos fazer esse termo simétrico via integração por partes, visto que o integrando torna-se $(dw/dx)Av\theta$: nesse caso, a integração por partes somente muda a derivada da solução tentativa para a função peso. Então deixemos esse termo como ele é.

Integrando por partes o segundo termo em (3.71a) e combinando com (3.71b) obtemos

$$\int_{\Omega} w A v \left(\frac{d\theta}{dx} \right) dx + \int_{\Omega} \frac{dw}{dx} A k \left(\frac{d\theta}{dx} \right) dx - \int_{\Omega} w s dx + (A w \bar{q}) \Big|_{\Gamma_q} = 0, \quad (3.72)$$

A formulação fraca é então: encontre a solução tentativa $\theta(x) \in U$ tal que (3.72) seja válida para todos $w(x) \in U_0$.

Não provaremos que a formulação fraca implica a formulação forte; o procedimento é exatamente o mesmo daquele anterior e consiste na simples inversão dos passos precedentes. Uma propriedade importante de (3.72) é que o primeiro termo não é simétrico em $w(x)$ e $\theta(x)$. Portanto, as equações discretas para essa formulação fraca não serão simétricas. A Equação (3.72) e suas condições de contorno tornam-se complicadas quando $k = 0$. Neste caso, não existe difusão, somente transporte. O tratamento deste caso especial está além deste livro, veja Donea e Huerta (2002).

Em vez da condição de contorno de fluxo (3.70b), o influxo total de entrada de material no contorno é frequentemente prescrito pela condição de contorno alternativa

$$(-k \frac{d\theta}{dx} + v\theta)n = \bar{q}_T. \quad (3.73)$$

Integrando o primeiro termo em (3.72) por partes e adicionando o produto da função peso, área A e (3.73), obtemos

$$- \int_{\Omega} \frac{dw}{dx} A v \theta dx + \int_{\Omega} \frac{dw}{dx} A k \left(\frac{d\theta}{dx} \right) dx - \int_{\Omega} w s dx + (A w \bar{q}_T) \Big|_{\Gamma_q} = 0. \quad (3.74)$$

A formulação fraca então consiste na equação (3.74) juntamente com uma condição de contorno essencial (3.70a) e a condição de contorno generalizada (3.73).

3.9 ENERGIA POTENCIAL MÍNIMA⁶

Não é tão importante

Uma aproximação alternativa para o desenvolvimento das equações de elementos finitos, que é amplamente utilizada, é baseada nos *princípios variacionais*. A teoria que lida com os princípios variacionais é chamada de cálculo variacional, e à primeira vista seu entendimento pode ser um pouco difícil para estudantes de graduação. Aqui, daremos uma simples introdução no contexto para a análise de tensões e a condução de calor unidimensional. Também mostraremos que o efeito desses princípios variacionais é equivalente à formulação fraca para sistemas simétricos, tais como condução de calor e elasticidade. Portanto, as equações de elementos finitos são também idênticas. Finalmente, mostraremos como os princípios variacionais podem ser desenvolvidos das formulações fracas. O princípio variacional correspondente à formulação fraca para a elasticidade é chamado de *teorema da energia potencial mínima*. Esse teorema é estabelecido no Quadro 3.9.

Quadro 3.9 Teorema da energia potencial mínima
A solução da formulação forte é minimizada de

$$W(u(x)) \text{ para } \forall u(x) \in U \text{ onde } W(u(x)) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} A E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx}_{W_{\text{int}}} - \underbrace{\left(\int_{\Omega} u b dx + (u A \bar{t}) \Big|_{\Gamma_t} \right)}_{W_{\text{ext}}}. \quad (3.75)$$

⁶Recomendado para as Trajetórias Avançada e de Mecânica Estrutural.

Na elasticidade, W é a energia potencial do sistema. Indicamos pelos subscritos 'int' e 'ext' que fisicamente o primeiro termo é a energia interna e o segundo termo é a energia externa.

Mostraremos agora que o minimizador de $W(u(x))$ corresponde à formulação fraca, a qual, como já sabemos, implica a formulação forte. Mostrar que a equação para o minimizador de $W(u(x))$ é a formulação fraca implica que o minimizador é a solução, conforme já mostramos que a solução para a formulação fraca é a solução da formulação forte.

Uma das maiores barreiras intelectuais no aprendizado do cálculo variacional é compreender o significado de $W(u(x))$. $W(u(x))$ é uma função de uma função. De tal modo, uma função de uma função é chamada de *funcional*. Examinaremos agora como $W(u(x))$ varia conforme a função $u(x)$ é mudada (ou variada). Uma mudança infinitesimal em uma função é chamada de uma *variação da função* e denotada por $\delta u(x) = \zeta w(x)$, em que $w(x)$ é uma função arbitrária (usaremos ambos os símbolos) e $0 < \zeta \ll 1$, isto é, ζ é um número positivo muito pequeno.

A mudança correspondente no funcional é chamada de *variação no funcional* e denotada por δW , que é definida por

$$\delta W = W(u(x) + \zeta w(x)) - W(u(x)) \equiv W(u(x) + \delta u(x)) - W(u(x)). \quad (3.76)$$

Essa equação é análoga à definição de um diferencial, exceto que nessa última considera-se uma mudança na variável independente, veja Oden e Reddy (1983) e Reddy (2000) para detalhes sobre cálculos variacionais. Um diferencial fornece a mudança em uma função devido à mudança da variável independente. Uma variação de um funcional fornece a mudança em um funcional devido a uma variação na função. Se você substitui 'função' por 'funcional' e 'variável independente' por 'função' na primeira sentença, você tem a segunda sentença.

Do enunciado do teorema da energia potencial mínima dado no Quadro 3.9, está claro que a função $u(x) + \zeta w(x)$ deve ainda ser U . Para obter essa condição, $w(x)$ precisa ser suave e desaparecer no contorno essencial, isto é

$$w(x) \in U_0. \quad (3.77)$$

Vamos avaliar a variação do primeiro termo em δW_{int} . Da definição da variação de um funcional, Equação (3.76), segue-se que

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} AE \left(\frac{du}{dx} + \zeta \frac{dw}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} AE \left(\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + 2\zeta \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} + \zeta^2 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (3.78)$$

O primeiro e o quarto termos nessa equação se cancelam. O terceiro termo pode ser desprezado porque ζ é muito pequeno, então seu quadrado é um termo de segunda ordem. Ficamos com

$$\delta W_{\text{int}} = \zeta \int_{\Omega} AE \left(\frac{dw}{dx} \right) \left(\frac{du}{dx} \right) dx. \quad (3.79)$$

A variação no trabalho externo é avaliada pela utilização da definição de uma variação e do segundo termo na Equação (3.75); é dividida em partes devido à força de campo e de tração para maior clareza. Isto fornece

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}}^{\Omega} &= \int_{\Omega} (u + \zeta w) b dx - \int_{\Omega} ub dx = \zeta \int_{\Omega} wb dx \\ \delta W_{\text{ext}}^{\Gamma} &= (u + \zeta w) A \bar{t}|_{\Gamma_r} - (u \bar{t}) A|_{\Gamma_r} = \zeta (w A \bar{t})|_{\Gamma_r}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{ext}}^{\Omega} + \delta W_{\text{ext}}^{\Gamma} = \zeta \left(\int_{\Omega} wb dx + (w A \bar{t})|_{\Gamma_r} \right) \quad (3.81)$$

No mínimo de $W(u(x))$, a variação do funcional precisa desaparecer, justamente como os diferenciais ou as derivadas de uma função desaparecem no mínimo de uma função. Isso é expresso como $\delta W = 0$. Portanto, temos

$$0 = \delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}}. \quad (3.82)$$

Substituindo (3.79)–(3.81) na equação anterior e dividindo por ζ obtemos o seguinte: para $u(x) \in U$,

$$\delta W / \zeta = \int_{\Omega} AE \left(\frac{dw}{dx} \right) \left(\frac{du}{dx} \right) dx - \int_{\Omega} wb dx - (w A \bar{t})|_{\Gamma_r} = 0, \quad w(x) \in U_0. \quad (3.83)$$

Você reconhece a equação anterior? Ela é precisamente a declaração da formulação fraca, a Equação (3.49) que desenvolvemos na Seção 3.6. Também lembre que mostramos na Seção 3.4 que a formulação fraca implica a formulação forte, de forma que o minimizador do funcional da energia potencial fornece a formulação forte.

Para ser preciso, somente mostramos que um ponto estacionário da energia corresponde à formulação forte. Pode também ser mostrado que o ponto estacionário é um minimizador, veja Equação (3.75) ou Becker, Carey e Oden (1981, pp. 60–62).

Na maior parte dos livros sobre princípios variacionais, a mudança na função $u(x)$, em vez de ser denotada por $\zeta w(x)$, é denotada por $\delta u(x)$. A Equação (3.83) é então escrita como se segue. Determine $u \in U$ tal que

$$\delta W = \int_{\Omega} AE \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d(\delta u)}{dx} \right) dx - \int_{\Omega} \delta u b dx - (\delta u A \bar{t}) \Big|_{\Gamma_t} = 0 \quad \forall \delta u \in U_0. \quad (3.84)$$

Isso pode ser adicionalmente simplificado pelo uso da equação da deformação–deslocamento e a lei da tensão–deformação nos primeiros termos no primeiro integrando de (3.84), que fornece

$$\delta W = \underbrace{\int_{\Omega} A \sigma \delta \epsilon dx}_{\delta W_{\text{int}}} - \underbrace{\left(\int_{\Omega} b \delta u dx + (\bar{t} A \delta u) \Big|_{\Gamma_t} \right)}_{\delta W_{\text{ext}}} = 0 \quad (3.85)$$

A equação anterior é chamada de o *princípio do trabalho virtual*: o campo de deslocamento admissível ($u \in U$) para o qual a variação no trabalho interno δW_{int} é igual à variação no trabalho externo δW_{ext} para todo $\forall \delta u \in U_0$, satisfaz o equilíbrio e as condições de contorno naturais. Note que (3.85) é idêntica às formulações fracas (3.49) e (3.83), somente a nomenclatura é diferente.

Uma característica muito interessante do princípio da energia potencial mínima é a sua relação com a energia do sistema. Considere o termo W_{int} na Equação (3.75). A substituição da equação da deformação–deslocamento (3.3) e da lei de Hooke (3.4) permite-nos escrevê-la como

$$W_{\text{int}} = \int_{\Omega} w_{\text{int}} A dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} AE \epsilon^2 dx. \quad (3.86)$$

Se examinarmos um gráfico de uma lei linear como o da Figura 3.9, podemos ver que a energia por unidade de volume é $w_{\text{int}} = (1/2)E\epsilon^2$. Portanto, W_{int} , a integral da densidade de energia sobre o volume, é a *energia interna* total do sistema, o que justifica o subscrito ‘int’, que é a abreviatura de ‘interna’, e que está indexando esse termo. Essa energia também é chamada de energia de deformação, que é a energia potencial estocada em um corpo quando ele é deformado. Essa energia pode ser recuperada quando o corpo é liberado. Pense em uma régua de metal que está curvada ou em uma mola comprimida; quando a força é liberada, elas se descomprimem, liberando a energia estocada. O segundo termo é também uma energia, pois os dois termos que compreendem W_{ext} são produtos da força (b ou \bar{t}) e do deslocamento u ; em qualquer caso, ele deve ser uma energia para que a equação seja dimensionalmente consistente.

Podemos reescrever o funcional na Equação (3.75) como

$$W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} \quad (3.87)$$

pelo uso das definições ressaltadas e pelo princípio variacional, que é $\delta W = 0$. Isto esclarece o significado físico do princípio da energia potencial mínima: a solução é o minimizador (isto é, um ponto estacionário) da energia potencial W dentre todas as funções de deslocamento admissíveis.

Muitos textos de elementos finitos usam o teorema da energia potencial mínima como um modo de formular o método dos elementos finitos. A questão natural que emerge nessa aproximação para ensinar elementos finitos é: como esse teorema surgiu e os princípios correspondentes podem ser desenvolvidos para outras equações diferenciais? De fato, o desenvolvimento dos princípios variacionais consumiu muitos anos e foi um tópico de intensa pesquisa nos séculos XVIII e XIX. Os princípios variacionais não podem ser construídos por regras simples como as que utilizamos para as formulações fracas. Entretanto, algumas formulações fracas podem ser convertidas em princípios variacionais, e na próxima seção, mostraremos como construir um princípio variacional para análises de tensão e de condução de calor unidimensionais.

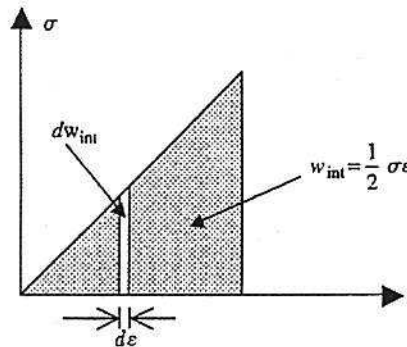


Figura 3.9 Definição da densidade de energia interna ou densidade de energia de deformação w_{int} .

Uma característica atrativa do teorema de energia potencial é que ele vale para qualquer sistema elástico. Assim, se escrevemos a energia para qualquer outro sistema, podemos rapidamente deduzir as equações de elementos finitos para aquele sistema; isso será visto no Capítulo 10 para vigas. Os princípios variacionais também são muito úteis no estudo da precisão e da convergência de elementos finitos.

A desvantagem da aproximação variacional é que existem muitos sistemas para os quais ela não é prontamente aplicável. Os princípios variacionais simples não podem ser desenvolvidos para a equação de advecção-difusão, para a qual desenvolvemos uma formulação fraca na Seção 3.8 pelo mesmo procedimento direto como para as outras equações. Os princípios variacionais somente podem ser desenvolvidos para sistemas que são auto-adjuntos. A formulação fraca para a equação de advecção-difusão não é simétrica, e ela não é um sistema auto-adjunto (veja Becker, Carey e Oden [1981] para definição de sistemas auto-adjuntos).

Os princípios variacionais idênticos àqueles para elasticidade aplicam-se à transferência de calor e a outras equações de difusão. Isso não é uma surpresa, visto que as equações são idênticas, exceto para os parâmetros. Como um exemplo, o princípio variacional para condução de calor é dado no Quadro 3.10.

Quadro 3.10 Princípio variacional para condução de calor

$$\text{Seja } W(T(x)) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} Ak \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dx}_{W_{\text{int}}} - \underbrace{\left(\int_{\Omega} Ts dx - (TA\bar{q})|_{\Gamma_r} \right)}_{W_{\text{ext}}},$$

então a solução da formulação forte de (3.51) é o minimizador de $W(T(x))$ para $\forall T(x) \in U$.

O funcional nesse princípio variacional não é uma energia física; de fato, a temperatura por si só corresponde à energia física. Entretanto, o funcional é freqüentemente chamado de uma energia mesmo para equações de difusão; nós o chamaremos de uma *energia matemática*. A prova da equivalência desse princípio para a formulação fraca (e, portanto, para a formulação forte) das equações de condução de calor envolve somente a substituição dos símbolos em (3.78)–(3.83) de acordo com a Tabela 3.2; a matemática é idêntica independentemente dos símbolos.

3.10 INTEGRABILIDADE⁷

Não é tão import

Até o momento deixamos a discussão da suavidade das funções peso e das soluções tentativas um tanto nebulosa. Definiremos agora mais precisamente o grau de suavidade exigido nas formulações fracas. Muitos leitores podem desejar passar por cima desse material em uma leitura preliminar, visto que o resto do livro é bastante claro sem uma compreensão deste material.

O grau de suavidade que é requerido nas funções peso e tentativa é determinado pelo quão suaves elas necessitam ser, de forma que as integrais na formulação fraca, tais como (3.54), possam ser avaliadas. Isto é chamado de *integrabilidade da formulação fraca*. Se as funções peso e tentativa são muito irregulares, então as integrais não podem ser avaliadas, então obviamente a formulação fraca não é utilizável.

Em seguida, examinamos, de forma grosseira, o quão suave essas funções devem ser. Se você olhar para uma função com grau de continuidade C^{-1} que não é singular (não tende para o infinito), você pode ver que obviamente ela é integrável, conforme a área sob tal função é bem definida. Mesmo a derivada de uma função com grau de continuidade C^{-1} é integrável, para um ponto de descontinuidade $x = a$ de magnitude p , a derivada é a função delta de Dirac $p\delta(x - a)$. Pela definição de uma função delta de Dirac (Veja Apêndice A5),

$$\int_{x_1}^{x_2} p\delta(x - a) dx = p \quad \text{se } x_1 \leq a \leq x_2.$$

Então, a integral da derivada de uma função com grau de continuidade C^{-1} é bem definida. Entretanto, o produto das derivadas das funções peso e tentativa aparece na formulação fraca. Se essas funções tiverem grau de continuidade C^{-1} , e as descontinuidades ocorrerem no mesmo ponto, digamos $x = a$, então a formulação fraca conterá o termo $\int_{x_1}^{x_2} p^2 \delta(x - a)^2 dx$. O integrando aqui pode ser considerado como um 'quadrado infinito': não existe forma significativa para obter essa integral. Assim, o com grau de continuidade C^{-1} das funções peso e tentativa não é suficiente.

Ao contrário, se as funções peso e tentativa tiverem grau de continuidade C^0 e não forem singulares, então as derivadas são funções com grau de continuidade C^{-1} e o integrando será o produto de duas funções com grau de continuidade C^{-1} . Você pode esboçar algumas funções e ver que o produto das derivadas de duas funções com grau de continuidade C^{-1} também será uma função com grau de continuidade C^{-1} enquanto as funções forem limitadas (não tendendo para infinito). Visto que uma função com grau de continuidade C^{-1} e limitada é integrável, a função com grau de continuidade C^0 é suave o suficiente para as funções peso e tentativa.

⁷Recomendado para a Trajetória Avançada.

Essa exigência de continuidade pode também ser justificada fisicamente. Por exemplo, na análise de tensão, um campo de deslocamento com grau de continuidade C^{-1} teria falhas ou superposições nos pontos de descontinuidade da função. Isso violaria a compatibilidade do campo de deslocamento. Embora as falhas possam ser tratadas em métodos mais avançados para modelar as falhas, elas não estão dentro do escopo dos métodos que estamos desenvolvendo aqui. De modo similar, na condução de calor, um campo de temperatura com grau de continuidade C^{-1} acarretaria um fluxo de calor infinito nos pontos de descontinuidade, os quais não são fisicamente razoáveis. Portanto, as noções de suavidade exigidas, que surge da integrabilidade da formulação fraca, também possui uma base física.

Nos tratamentos matemáticos do método de elementos finitos, é feita uma descrição mais precisa do grau de suavidade exigido: as funções peso e tentativa são exigidas por possuir derivadas dos quadrados integráveis. Uma derivada de uma função $u(x)$ é chamada *quadrado integrável* se $W_{\text{int}}(\theta)$, definido como

$$W_{\text{int}}(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \kappa A \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx, \quad (3.88)$$

é limitado, isto é, $W_{\text{int}}(\theta) < \infty$. O valor de $\sqrt{W_{\text{int}}(\theta)}$ é frequentemente chamado de uma norma de energia. Para condução de calor, $\theta = T$ e $\kappa(x) = k(x) > 0$. Em elasticidade, $\kappa(x) = E(x) > 0$ e $\theta = u$ e (3.88) corresponde à energia de deformação, que aparece no princípio da energia potencial mínima.

Pode ser provado que H^1 é um subespaço de grau de continuidade C^0 , isto é, $H^1 \subset C^0$, assim qualquer função em H^1 é também uma função com grau de continuidade C^0 . Entretanto, o inverso não é verdadeiro: existem funções com grau de continuidade C^0 que não existem em H^1 . Um exemplo de uma função com grau de continuidade C^0 , mas que não está contida em H^1 , é examinado no Problema 3.8. Contudo, tais funções não são normalmente do tipo encontrado na análise padrão em elementos finitos (exceto na mecânica da fratura), de modo que a maior parte dos leitores acharão que a especificação do grau de suavidade exigido para uma função com grau de continuidade C^0 é suficiente.

REFERÊNCIAS

- Becker, E. B., Carey, G. F. and Oden, J.T. (1981) *Finite Elements: An introduction*, vol. 1, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Ciarlet, P.G. (1978) *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, New York.
- Donea, J. and Huerta, A. (2002) *Finite Element Methods for Flow Problems*, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester.
- Hughes, T. J. R. (1987) *The Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Oden, J. T. and Reddy, J.N. (1978) *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, Academic Press, New York.
- Oden, J. T. and Reddy, J. N. (1983) *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- Reddy, J. N. (2002) *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, 2nd ed., John Wiley, New York.

Problemas

Problema 3.1

Mostre que a formulação fraca de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + 2x &= 0 \quad \text{em } 1 < x < 3, \\ \sigma(1) &= \left(E \frac{du}{dx} \right)_{x=1} = 0,1, \\ u(3) &= 0,001 \end{aligned}$$

é dada por

$$\int_1^3 \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx = -0,1(wA)_{x=1} + \int_1^3 2xw dx \quad \forall w \text{ com } w(3) = 0.$$

Problema 3.2

Mostre que a formulação fraca no Problema 3.1 implica a formulação forte.

Problema 3.3

Considere uma solução tentativa (candidata) da forma $u(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - 3)$ e uma função peso da mesma forma. Obtenha uma solução para a formulação fraca no Problema 3.1. Cheque a equação de equilíbrio na formulação forte no Problema 3.1; ela é satisfeita?

Cheque a condição de contorno natural; ela é satisfeita?

Problema 3.4

Repita o Problema 3.3 com a solução tentativa $u(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-3) + \alpha_2(x-3)^2$.

Problema 3.5

Obtenha a formulação fraca para a equação da condução de calor com as condições de contorno $T(0) = 100$ e $q(10) = hT$. A segunda condição é uma condição de convecção.

Problema 3.6

Dada a formulação forte para o problema de condução de calor numa placa circular:

$$k \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + rs = 0, \quad 0 < r \leq R.$$

$$\text{condição de contorno natural: } \frac{dT}{dr}(r=0) = 0,$$

$$\text{condição de contorno essencial: } T(r=R) = 0,$$

em que R é o raio total da placa, s é a fonte de calor por unidade de comprimento ao longo do raio da placa, T é a temperatura e k é a condutividade térmica. Considere que k , s , e R são dados:

- Construa a formulação fraca para a formulação forte anterior.
- Use soluções tentativas (candidatas) quadráticas da forma $T = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2$ e funções peso da mesma forma para obter uma solução da formulação fraca.
- Resolva a equação diferencial com as condições de contorno e mostre que a distribuição de temperatura ao longo do raio é dada por

$$T = \frac{s}{4k} (R^2 - r^2).$$

Problema 3.7

Dada a formulação forte para a barra circular em torção (Figura 3.10):

$$\frac{d}{dx} \left(JG \frac{d\phi}{dx} \right) + m = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\text{condição de contorno natural: } M(x=l) = \left(JG \frac{d\phi}{dx} \right)_l = \bar{M},$$

$$\text{condição de contorno essencial: } \phi(x=0) = \bar{\phi}.$$

em que $m(x)$ é uma quantidade de movimento distribuída por unidade de comprimento, M é a quantidade de movimento de torção, ϕ é o ângulo de rotação, G é o módulo de cisalhamento e J é o momento polar de inércia dado por $J = \pi C^4/2$, onde C é o raio do eixo circular.

- Construa a formulação fraca para a barra circular em torção.
- Considere que $m(x) = 0$ e integre a equação diferencial dada. Determine as constantes de integração usando as condições de contorno.

Problema 3.8

Considere um problema no intervalo $0 \leq x \leq l$ que possui uma solução da forma

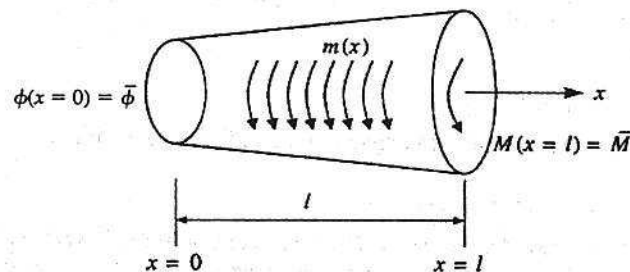


Figura 3.10 Barra cilíndrica em torção do Problema 3.7.

$$u = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda} \frac{x}{l}, & x \leq \frac{l}{2}, \\ \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right)^{\lambda} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda} \frac{x}{l}, & x > \frac{l}{2}. \end{cases}$$

- Mostre que para $\lambda > 0$ a solução u tem grau de continuidade C^0 no intervalo $0 \leq x \leq l$.
- Mostre que para $0 < \lambda \leq 1/2$ a solução u não está contida em H^1 .

Problema 3.9

Considere uma barra elástica com uma mola variável distribuída $p(x)$ ao longo de seu comprimento conforme mostrado na Figura 3.11. A mola distribuída impõe uma força coaxial sobre a barra proporcional ao deslocamento.

Considere uma barra de comprimento l , área de seção transversal $A(x)$, módulo de Young $E(x)$ com força de campo $b(x)$ e condições de contorno conforme mostrado na Figura 3.11.

- Construa a formulação forte.
- Construa a formulação fraca.

Problema 3.10

Considere uma barra elástica na Figura 3.2. A barra está sujeita a um campo de temperaturas $T(x)$. A temperatura causa a expansão da barra e a lei de tensão-deformação é

$$\sigma(x) = E(x)(\epsilon(x) - \alpha(x)T(x)),$$

em que α é o coeficiente de expansão térmica, o qual pode ser uma função de x .

- Desenvolva a formulação forte pela substituição da lei de Hooke padrão pela lei citada anteriormente na equação de equilíbrio; use as condições de contorno dadas no Problema 3.1.
- Construa a formulação forte para (3.43) quando a lei citada anteriormente for válida.

Problema 3.11

Determine a formulação fraca para a seguinte formulação forte:

$$\kappa \frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda u + 2x^2 = 0, \quad \kappa, \lambda \text{ são constantes } 0 < x < 1,$$

sujeita a $u(0) = 1$ e $u(1) = -2$.

Problema 3.12

O movimento de um fluxo de carga elétrica q_v é proporcional ao gradiente de potencial elétrico. Isto é descrito pela lei de Ohm:

$$q_v = -k_v \frac{dV}{dx},$$

em que k_v é a condutividade elétrica e V é o potencial elétrico. Denote Q_v como a fonte de carga elétrica.

Construa a formulação forte pela imposição da condição de que a carga elétrica é conservada.

Problema 3.13

Determine a formulação fraca para a seguinte formulação forte:

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - x = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

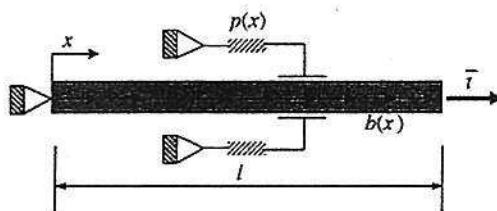


Figura 3.11 Barra elástica com molas distribuídas do Problema 3.9.

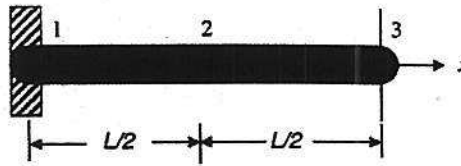


Figura 3.12 Barra elástica sujeita a força de campo linear do Problema 3.14.

sujeita a $u(0) = u(1) = 0$.

Problema 3.14

Considere uma barra na Figura 3.12 sujeita a uma força de campo linear $b(x) = cx$. A barra possui uma área de seção transversal A e módulo de Young E . Considere a solução tentativa quadrática e a função peso

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2, \quad w(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2,$$

em que α_i são parâmetros indeterminados.

- Para que valor de α_i , $u(x)$ é cinematicamente admissível?
- Usando a formulação fraca, estabeleça equações para α_i e resolva-as. Para obter as equações, expresse o princípio do trabalho virtual na forma $\beta_1(\dots) + \beta_2(\dots) = 0$. Pelo teorema do produto escalar, cada um dos termos em parênteses, isto é, os coeficientes de β_i , precisam desaparecer.
- Resolva o problema na Figura 3.12 usando elementos de dois nós considerados no Capítulo 2 de igual tamanho. Aproxime a carga externa no nó 2 pela integração da força de campo de $x = L/4$ até $x = 3L/4$. Do mesmo modo, calcule a carga externa no nó 3 pela integração da força de campo de $x = 3L/4$ até $x = L$.

Problema 3.15

Considere a barra no Problema 3.14.

- Usando uma solução aproximada da forma $u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, determine $u(x)$ pelo teorema da energia potencial mínima. *Sugestão:* após forçar a admissibilidade, substitua a solução tentativa anterior em (3.75) e minimize com respeito aos parâmetros independentes.
- Compare a solução obtida na parte (a) para uma solução exata da equação $E \frac{d^2 u}{dx^2} + cx = 0$.
- Para as soluções aproximadas $\sigma(L) = 0$?
- Cheque se a tensão obtida a partir de $u(x)$ por $\sigma = E \frac{du}{dx}$ satisfaz o equilíbrio.