

## CAPITULO 4

### AERODINÂMICA DE PERFIS FINOS E NÃO FINOS

#### 4.1 Introdução

A história do desenvolvimento das formas de aerofólios é longa e envolve muitos nomes que contribuem pelo uso dos métodos clássicos de hidrodinâmica no desenvolvimento de formas matemáticas de aerofólios. De modo geral as formas matematicamente geradas eram longe de aerofólios de ótimo desempenho e assim em 1930, NACA iniciou um imenso programa experimental para o desenvolvimento de famílias aerofólios de melhor desempenho e de fácil fabricação. As famílias de aerofólios foram projetadas para demonstrar os efeitos das variáveis geométricas sobre o desempenho aerodinâmico do aerofólio tal como sustentação, arrasto, momento em termos de ângulo de ataque. As variáveis geométricas incluem o arqueamento máximo, espessura máxima, etc.

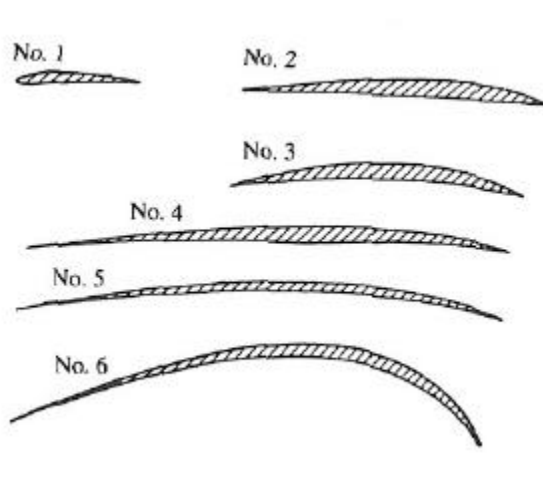


Figura 4.1a Os perfis do Horatio Phillips patentados em 1884.

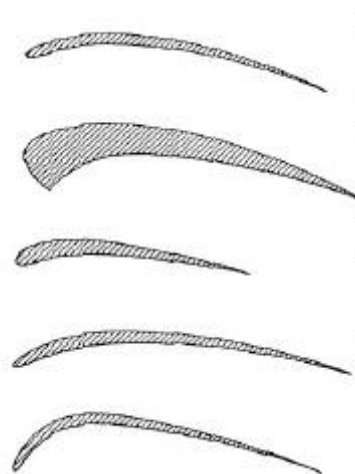


Figura 4.1b Perfis projetados, testados e patentados pelos irmãos Wright durante o período 1902-1903.

Na virada do século vinte, e no início de vôo á propulsão, a importância de boa aerodinâmica tornou-se indispensável o entendimento da ação aerodinâmica de tais superfícies de sustentação como asas fixas finitas para aeronaves e mais tarde com superfícies móveis nos motores de helicópteros. No período de 1912-1918, análise de asa para as aeronaves avançou rapidamente com os trabalhos de Ludwig Prandtl e seus colaboradores em Gottingen, na Alemanha, que mostrou que os aspectos aerodinâmicos da asa podem ser divididos em duas partes; 1) o estudo da seção da asa, perfil e, 2) a modificação das propriedades de tal perfil para tomar conta da asa completa finita. Estes mesmos pensamentos que propulsionaram as atividades de pesquisa da NASA no período de 1970-1980.

Em 1804, primeira configuração moderna de aeronave foi concebida e construída por Sir George Cayley na Inglaterra, foi um pequeno planador de lançado à mão em torno de 1 m de comprimento com asa no formato de uma pipa. Desde o início da configuração das aeronaves modernas, as seções da asa era muito fina e a espessura era pra obter asa com rigidez estrutural adequada. Seções de aerofólios finos foram perpetuadas pelo trabalho do Horatio Phillips na Inglaterra. Phillips realizou pela primeira vez testes no túnel de vento no qual ele obteve as características aerodinâmicas de diversos perfis, como mostra a figura 4.1a. Os primeiros pioneiros da aviação como Otto Hlenthal na Alemanha e Samuel Plerpont Langley na América continuaram a mesma tradição de asas finas. Isto foi também verdadeiro no caso dos irmãos Wright, que no período 1901-1902 testaram centenas de perfis e forma de plano da asa

no túnel de vento próprio. Alguns dos aerofólios dos irmãos Wright são mostrados na figura 4.1b. De fato uma seção de aerofólio foi usada para construir a aeronave usada em 1903. Como pode ser visto na figura 4.1e. É importante confirmar que todas as aeronaves pioneiras inclusive a dos irmãos Wright utilizou aerofólios extremamente finos e asas se comportam como placas planas.

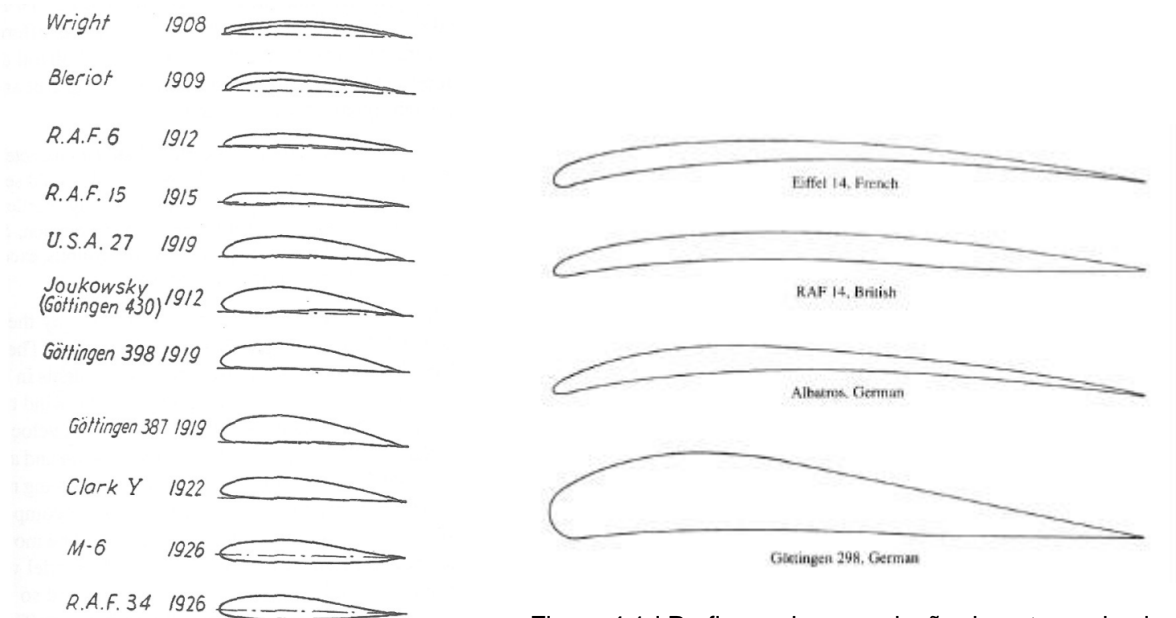


Figura 4.1d Perfis usados na aviação durante a primeira Guerra Mundial.

Figura 4.1c Aerofólios usados na era de bi plano com barras e arame

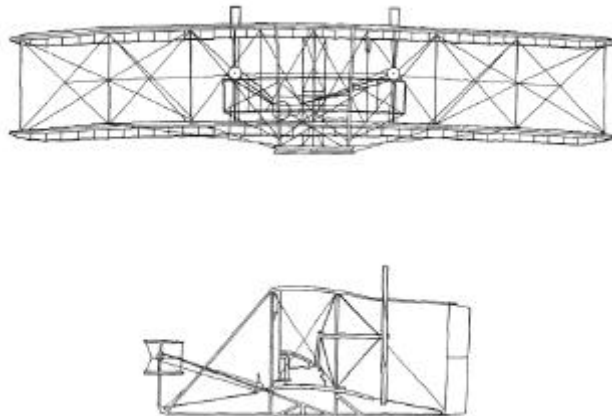


Figura 4.1e Vistas frontal e lateral da aeronave dos Wright, 1903.

Em conclusão, estes aerofólios muito finos tiveram problemas de separação de escoamento mesmo com ângulos de ataque pequenos e conseqüentemente baixa sustentação e baixo valor de  $C_{l_{max}}$ .

Esta situação continuou durante o início da primeira Guerra Mundial. A figura 4.1d mostra perfis que foram usados na primeira Guerra Mundial, onde as primeiras três seções têm razão de espessura de 4 a 5% e são representativos das aeronaves até 1917. Por exemplo, o SPAD XIII mostrado na figura 4.1f, a mais rápida das aeronaves de combate da 1ª Guerra Mundial, tem uma seção de asa com seção Eiffel, mostrada na figura 4.1d. Estas seções muito finas foram usadas naquela época por dois motivos a

tradição e a idéia errada que aerofólios finos provocam menos arrasto que os aerofólios mais grossos. Como consequência disto todas as aeronaves da Primeira Guerra Mundial inglesas, francesas e americanas foram construídas usando os perfis muito finos e conseqüentemente perderam no desempenho de alta sustentação. O fato importante que os efeito de espessura não eram claros para os projetistas da época.



Figura 4.1f A Spad XIII francesa da Segunda Guerra Mundial.



Figura 4.1g A aeronave de combate Fokker Dr I da Primeira Guerra Mundial.

Essa situação mudou dramaticamente em 1917, quando Prandtl e seus colegas em Göttingen demonstraram a superioridade de aerofólios grossos em comparação com os finos. A seção Gottingen 298 mostrada na figura 4.1d, foi utilizada por Anthony Fokker na aeronave de combate Fokker -Dr1 a famosa aeronave tri plano pilotada pelo "Barão Vermelho". Esta aeronave é mostrada na figura 4.1g. A espessura deste aerofólio é de 13% e sua utilização no Fokker Dr-1 mostrou as seguintes vantagens:

- i – A estrutura da asa tornou-se interna e assim eliminando as barras e arame e conseqüentemente suas resistências aerodinâmicas.
- ii – A seção de aerofólio mais grosso forneceu do Fokker Dr-1 um coeficiente de sustentação máxima maior e portanto tornou a aeronave mais hábil e com taxas de subida e manobras maiores que as aeronaves oponentes. O Fokker D VIII da figura 4.1h é mais ágil e de desempenho tal que ultrapassou o desempenho dos oponentes, Sopwith Camel e a SPAD VIII mostrada na figura 4.1f.



Figura 4.1h A aeronave de combate mais eficiente Fokker D-VII da Primeira Guerra Mundial.

## 4.2 Nomenclatura de aerofólio.

Os primeiros aerofólios patenteados foram desenvolvidos por Horacio F. Phillips em 1884, figura 4.1a, que realizou os primeiros testes sérios em túneis de vento sobre aerofólios. Em 1902, os irmãos Wright realizariam seus testes próprios, desenvolvendo perfis relativamente eficientes que contribuíram para o sucesso de seu primeiro voo em 1903. Estes perfis são mostrados na figura 4.1b. No início, os projetos dos perfis aerodinâmicos eram basicamente personalizados, e somente no início dos anos 1930, a NASA iniciou um programa de pesquisa desenvolvendo séries de aerofólios construídos em forma racional e sistemática que estão em uso em grande parte das aeronaves atuais. Também as empresas de grande porte como Boeing usando túneis de vento próprios e programas computacionais de desenvolvimento de aerofólios projetou perfis específicos para suas aeronaves, 727,737,747,757 e 767.

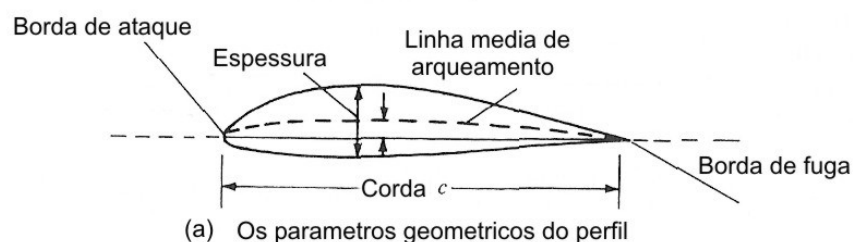


Figura 4.2 a Variáveis geométricas do perfil.

A figura 4.2a. mostra um aerofólio. A linha média de arqueamento é o traço dos pontos médios entre as superfícies superior e inferior, medidas perpendiculares a linha média de arqueamento. Os pontos externos da linha média de arqueamento são chamados de bordas de ataque e de fuga de aerofólio. A linha reta conectando as bordas de ataques e de fuga são chamadas de linha de corda do aerofólio. A distância medida ao longo da linha de corda entre a borda de ataque e a borda de fuga é chamada de corda do aerofólio. O arqueamento é a distância máxima entre a linha média de arqueamento e a linha de corda medida perpendicular a linha de corda. A espessura é a distância entre a superfície inferior e superior medida perpendicular a linha de corda. A forma do aerofólio na borda de ataque é usualmente circular, com raio de borda de ataque de cerca de 0,02 do comprimento da corda. As formas de todos os

aerofólios padrão da NASA são geradas pela especificação da geometria da linha média de arqueamento e cobrindo esta linha por uma distribuição de espessura, como pode ser visto na figura 4.5. Os aerofólios comerciais da NACA serão apresentados numa seção posterior. Figura 4.2b mostra as linhas de corrente em torno de um perfil RAF 30 num ângulo de ataque de 7 graus. Figura 4.2c mostra a distribuição de pressão ao longo da corda para um ângulo de ataque de 7°.

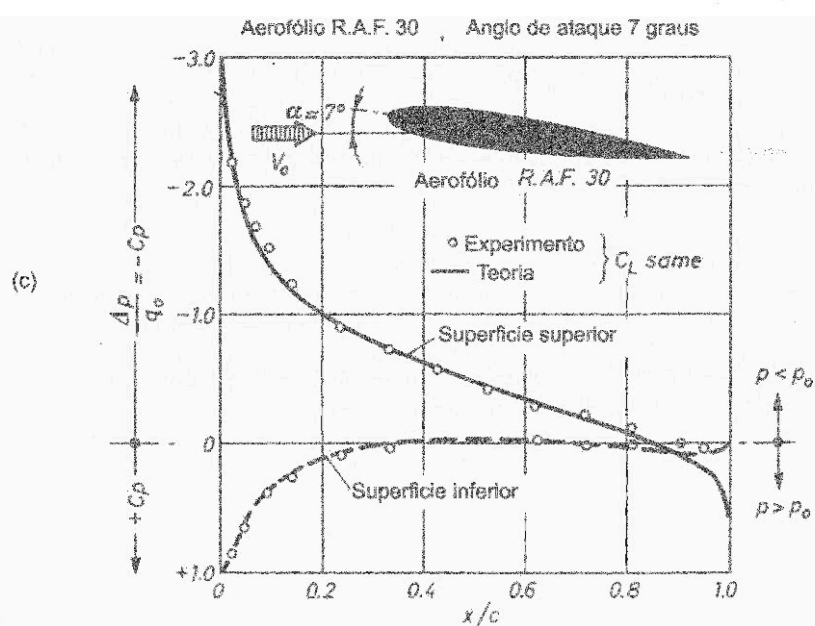
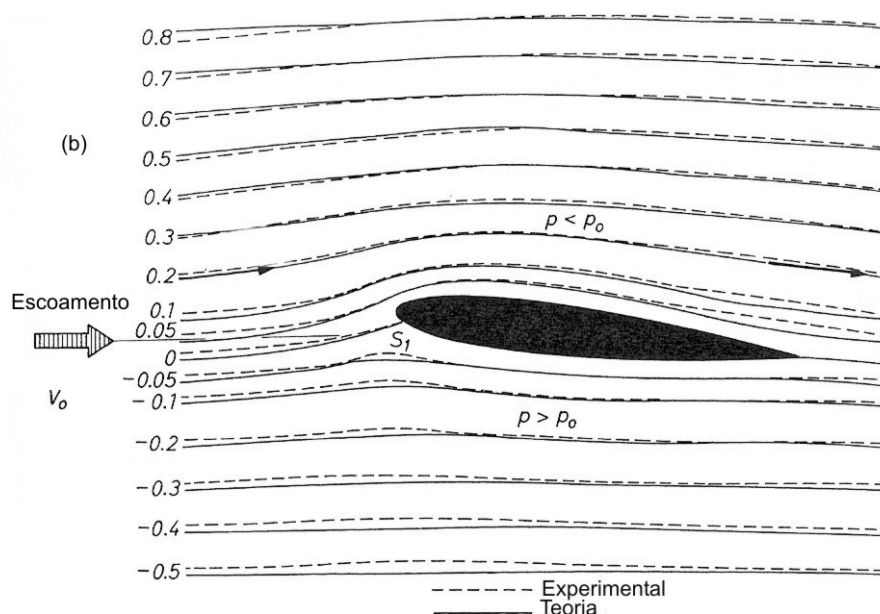


Figura 4.2 b,c Distribuição de pressão ao longo da corda do perfil RAF 30.

### 4.3 As características de aerofólio

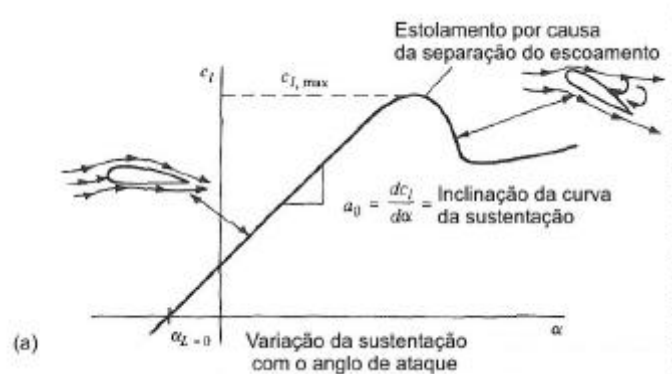


Figura 4.3a A variação típica do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque.

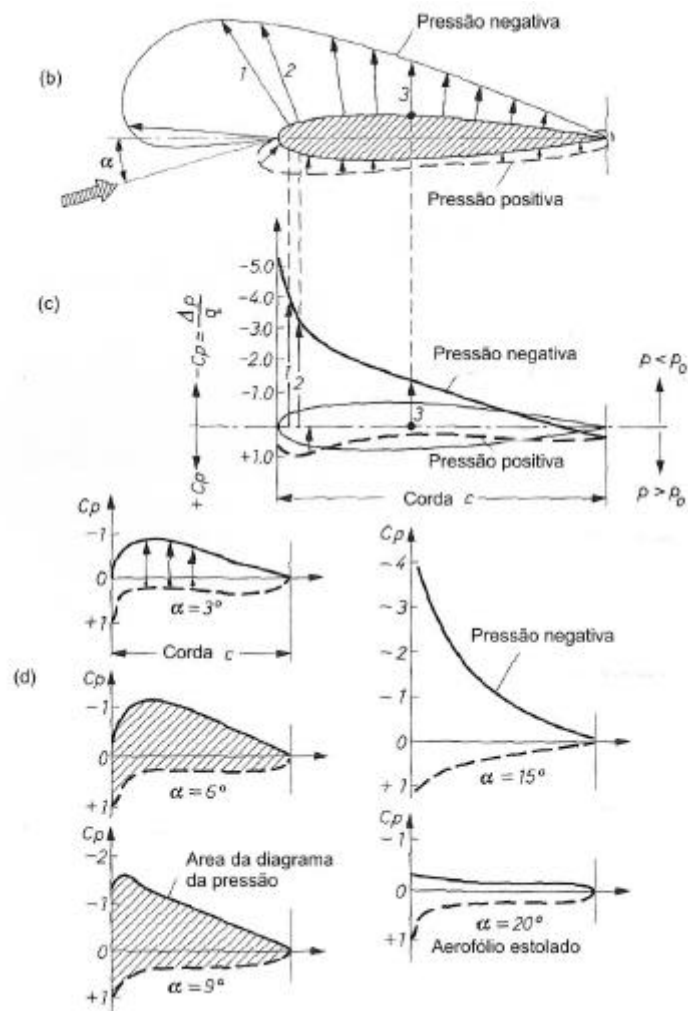


Figura 4.3 b,c,d Variação da pressão ao longo da corda de um aerofólio e os métodos de representação.

Durante os anos de 1930 e 1940, a NACA realizou um numero intensivo de testes aerodinâmicos sobre muitas series de seus aerofólios para determinar os coeficientes de sustentação, arrasto e momento. Os testes foram realizados no túnel de vento com asa estendendo de um lado para outro. Uma variação típica das características aerodinâmicas do aerofólio é mostrada na figura 4.3a. Nos baixos valores de velocidade e para pequenos ângulos de ataque o coeficiente de sustentação,  $c_l$ , varia linearmente com o ângulo de ataque. A medida que aumenta o ângulo de ataque o escoamento começa a descolar da superfície superior do aerofólio formando uma bolsa de ar chamada de esteira com intensa recirculação de escoamento o que resulta numa redução da sustentação e aumento no atrito e o aerofólio entra no estado de estolamento.

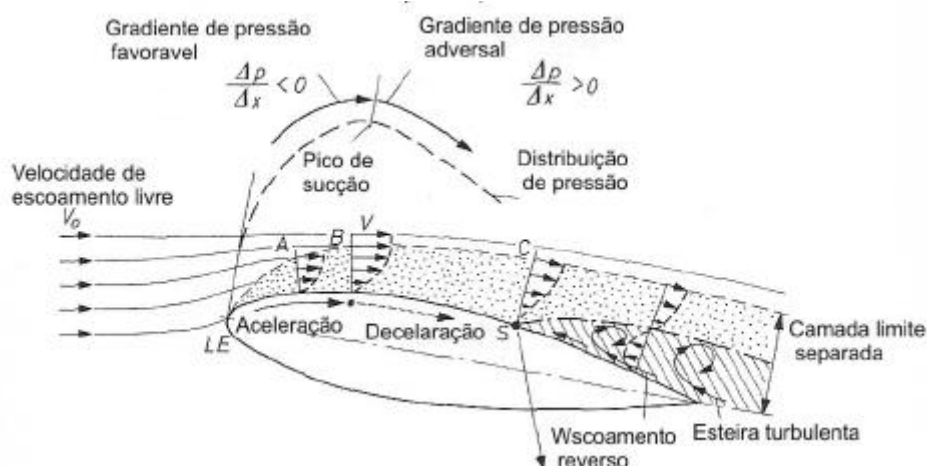


Figura 4.3e Separação do escoamento na superfície superior de um perfil provocando o estolamento.

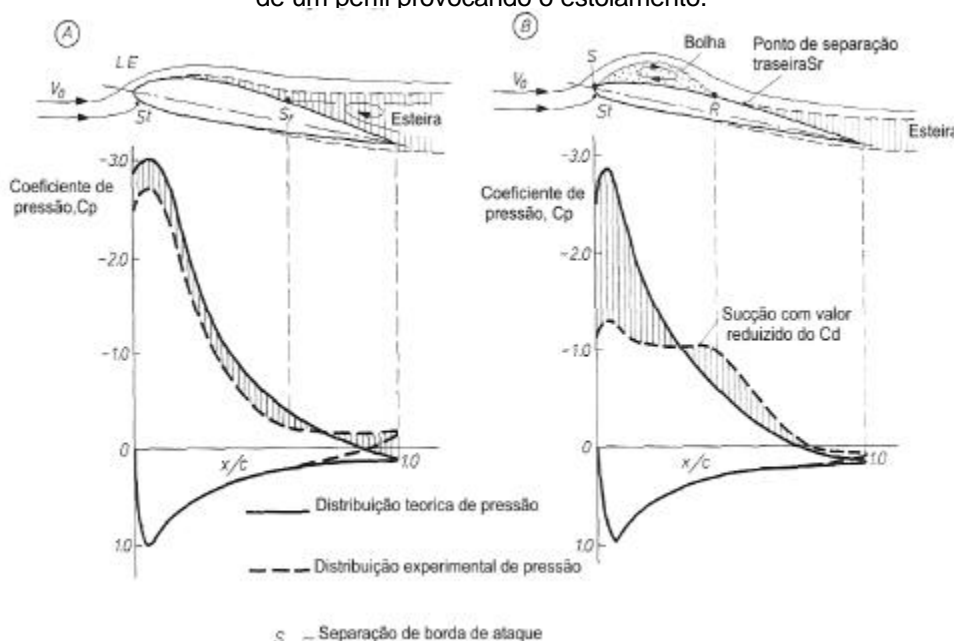


Figura 4.3f Separação do escoamento na superfície superior de um perfil provocando o estolamento.

O valor da sustentação máxima atingida pelo aerofólio é chamado de  $C_{lmax}$ , o que representa um dos aspectos mais importantes de desempenho do aerofólio que determina a velocidade estol da aeronave.

Quanto maior  $C_{lmax}$ , menor a velocidade de estol. A figura 4.3a mostra que inicialmente o  $c_l$  aumenta de forma linear com o ângulo de ataque, atinge um valor máximo, e finalmente estola. Figuras 4.3b á 4.3d a distribuição de pressão sobre o perfil e os métodos utilizados para sua representação. Figura 4.3e mostra o fenômeno de separação do escoamento e consequentemente o fenômeno de estolamento do perfil. Figura 4.3f Separação do escoamento na superfície superior de um perfil próximo da borda de ataque formando uma bolha ou bolso que provoca mudanças na distribuição de pressão ao longo da corda da asa provocando queda na sustentação.o estolamento. Figura 4.3g mostra a variação do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque para vários perfis de diferentes espessuras. Como pode verificar o aumento da espessura do aerofólio aumenta a sustentação máxima além de aumentar o ângulo de estolamento do aerofólio.

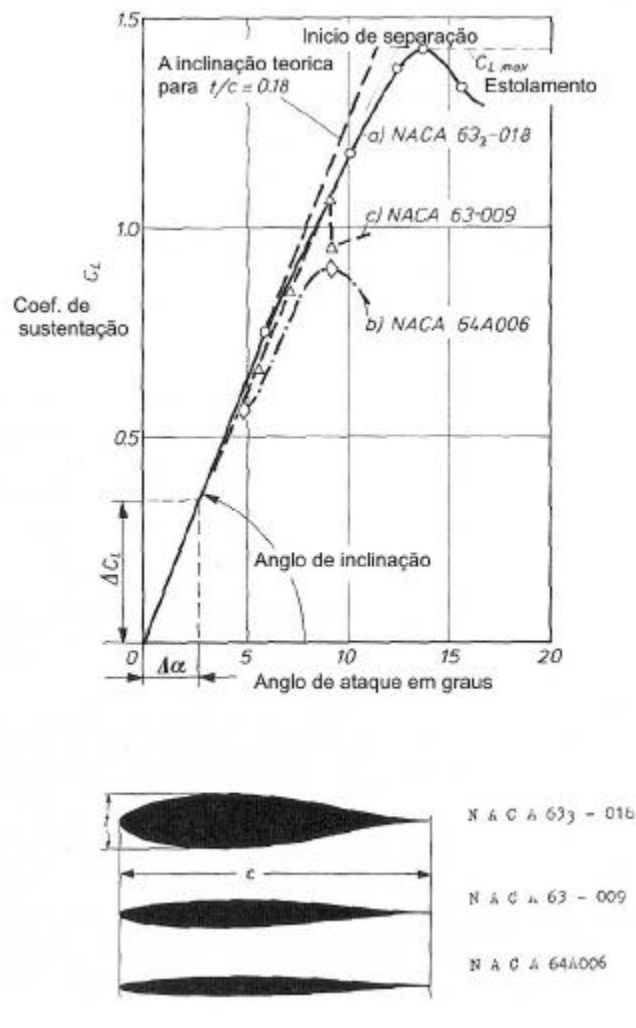


Figura 4.3 g Variação do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque para vários perfis de diferentes espessuras.

#### 4.4 Nomenclatura da asa

A figura 4.4 mostra uma vista plana de uma asa. A distância (b) de uma extremidade da ponta da asa para a outra é chamada envergadura e é medida ao longo do eixo y. Similarmente, a corda (c), numa posição da envergadura é a distância de borda de ataque até a borda de fuga medida paralela ao eixo x.



A asa mostrada na figura 4.4 é linearmente afilada onde a razão de afilamento,  $\lambda$ , é definida como a razão da corda da ponta  $c_t$  a corda de meia envergadura  $c_o$  ou seja:

$$I = \frac{c_t}{c_o} \quad (4.1)$$

e a corda em qualquer ponto é dada por:

$$c = c_o \left[ 1 - (1 - I) \left| \frac{2y}{b} \right| \right] \quad (4.2)$$

A área no plano é dada por:

$$S = c_o (1 + I) \frac{b}{2} \quad (4.3)$$

A razão de aspecto é definido como  $AR = (\text{Envergadura})^2 / \text{Área}$

$$AR = b^2 / S = \frac{2b}{c_o (1 + I)} \quad (4.4)$$

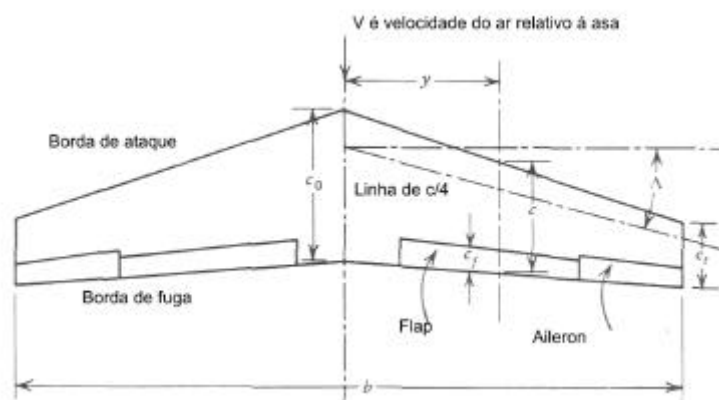


Figura 4.4 Nomenclatura da asa.

A linha de  $\frac{1}{4}$  da corda da asa é o traçado de todos os pontos de  $\frac{1}{4}$  da corda a partir da borda de ataque e para este caso da asa linearmente afilada, é uma reta.

O ângulo de flechamento desta linha,  $\Lambda_{1/4}$  e aquele da borda de ataque é  $\Lambda$  e são relacionados pela relação:

$$\tan \Lambda_{1/4} = \tan \Lambda - \frac{4(1 - I)}{AR(1 + I)} \quad (4.5)$$

Usualmente a parte central da asa inclui a fuselagem. Neste caso a razão de aspecto e a razão de afilamento são determinadas, desprezando a presença da fuselagem e extrapolando o plano da asa até a linha do centro. A corda de meia envergadura é fictícia. A raiz da asa é definida como sendo a secção na junção da asa e a fuselagem.

Aproximadamente 20 a 30% da borda de fuga da asa é móvel. Ao longo de cerca 1/3 externo da envergadura a borda de fuga de um lado da asa deflete oposto ao outro lado. Estas superfícies de movimentos opostos são chamadas de aileron, são necessárias para obter o movimento de rotação ao longo do eixo longitudinal da aeronave.

A parte interna móvel da borda de fuga da asa é chamada de flap. Para decolagem e aterrissagem os flaps são abaixados por igual nos dois lados para permitir maior sustentação. Assim, para um dado peso, a aeronave pode voar com os flaps abaixados.

Para algumas aplicações ambos os ailerons são baixados servindo assim como extensão dos flaps. Neste caso os ailerons são chamados de flaperons. Quando os flaperons são empregados, o controle

adicional de rolagem é obtido pelos “spoilers” que são painéis que se projetam no escoamento próximo a borda de fuga para causar separação de escoamento e auxiliar na perda de sustentação.

#### 4.5 Os aerofólios; Construção e comentários sobre seus desempenho

Para entender e prever o comportamento aerodinâmico de uma asa, é necessário considerar o comportamento do aerofólio bidimensional. O aerofólio pode ser considerado como uma asa de corda constante e razão de aspecto infinito.

A maioria das investigações experimentais foram feitos pela NACA até 1948 e depois de 1948 pela NASA. No período de 1950 a 1960 pouco foi feito em relação aos aerofólios e mais em relação à aeronave. Na década de 60 as aeronaves atingiram a velocidade do som, e portanto iniciaram os trabalhos relativos aos aerofólios e o surgimento do aerofólio supercrítico ou aerofólio de baixa velocidade do Whitcomb.

O desenvolvimento do aerofólio padrão NACA é mostrado na figura 4.5 onde primeiramente a linha de corda  $c$  é desenhada, em seguida, a linha de arqueamento é apresentada graficamente onde  $z$  é a distância a partir da borda de ataque. Em seguida uma certa espessura é adicionada a cada lado da linha de arqueamento e um círculo no nariz, na tangente a linha de ataque. Finalmente um contorno é desenhado passando pelos pontos indicando a espessura local. No início, os aerofólios NACA eram descritos com o arqueamento e a distribuição de espessura dados de forma analítica. Atualmente são apresentados os dados de forma de tabela.

Antes de discutir as famílias de aerofólios, considere inicialmente as características aerodinâmicas que são afetadas pela geometria do aerofólio.

Assumindo uma distribuição de pressão nos dois lados do aerofólio, a sustentação total por unidade de envergadura é

$$L = \int_0^c (p_l - p_u) dx \quad (4.6)$$

O momento em torno da borda de ataque é

$$M_{LE} = - \int_0^c x(p_l - p_u) dx \quad (4.7)$$

ou na forma adimensional

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 c} \quad (4.8)$$

$$C_{m_{LE}} = \frac{M_{LE}}{\frac{1}{2} \rho V^2 c^2} \quad (4.9)$$

Escrevendo

$$\frac{(p_l - p_u)}{\frac{1}{2} \rho V^2} = \frac{(p_l - p_\infty)}{\frac{1}{2} \rho V^2} - \frac{(p_u - p_\infty)}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$

as equações (4.6) e (4.7) podem ser escritas como:

$$C_l = \int_0^1 (C_{p_l} - C_{p_u}) dx \quad (4.10)$$

$$C_{m_{LE}} = - \int_0^1 x(C_{p_l} - C_{p_u}) \quad (4.11)$$

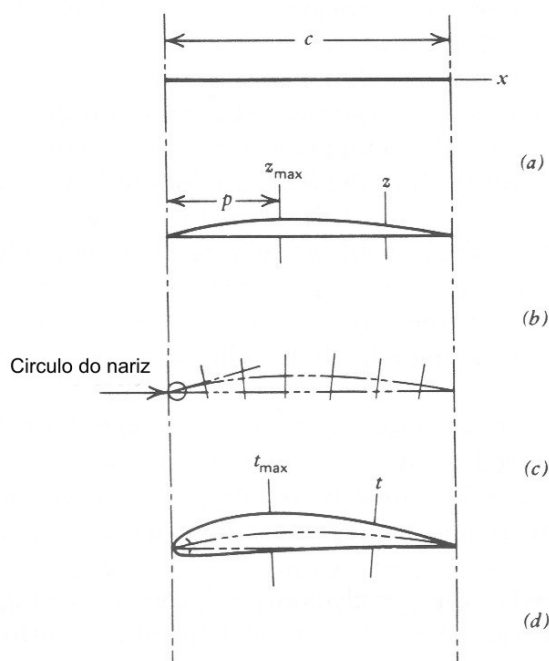


Figura 4.5 A construção de perfil de aerofólio.

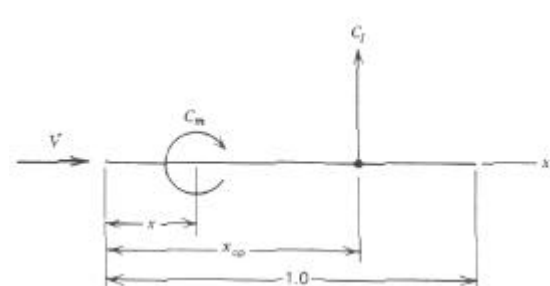


Figura 4.6a Momento adimensional produzido pela sustentação no ponto  $x_{cp}$ .

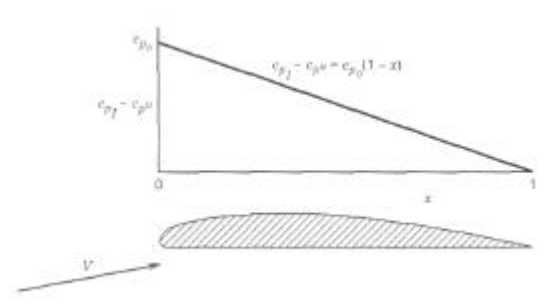


Figura 4.6b Aerofólio com distribuição de pressão triangular ao longo da corda.

O momento calculado da equação (4.11) pode ser visualizado como sendo o momento produzido pela sustentação resultante atuando num ponto específico distante  $x_p$  da borda de ataque onde  $x_p$  é chamado de distância de centro de pressão de modo que

$$-x_{cp} C_l = C_{mLE} \quad (4.12)$$

Conhecendo  $x_{cp}$ , o momento em torno de qualquer outro ponto ( $x$ ) ao longo do aerofólio pode ser determinado com referencia á figura 4.6a.

$$C_m = -(x_{p1} - x) C_l \quad (4.13)$$

Como exemplo da utilização destas equações a distribuição ideal da pressão ao longo da corda mostrada na figura 4.6b, onde a diferença entre os coeficientes de pressão nas superfícies de pressão inferior e superior é dada por.

$$C_{p1} - C_{p2} = C_{po}(1-x) \quad (4.14)$$

Assim usando equação (4.10)  $C_l$  e  $C_{po}$  do aerofólio são relacionados pela equação

$$C_l = \frac{C_{po}}{2}$$

e o coeficiente de momento em torno da borda de ataque fica

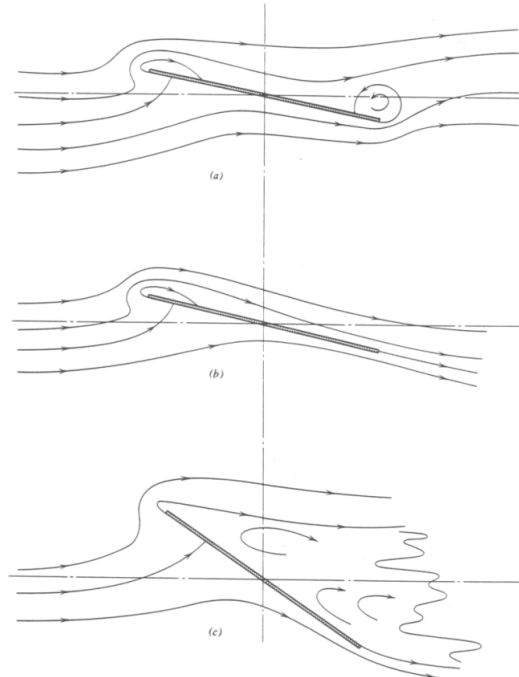
$$C_{mLE} = -\frac{C_{po}}{6}$$

Deste modo, dizendo que o momento é igual á um certo valor numa posição específica implica que a sustentação é considerada atuando neste ponto específico. Assim, visualizando que a sustentação e momento acima atuando na borda de ataque do aerofólio da figura 4.6b, o momento adimensional em torno de qualquer ponto ao longo da corda,  $x$ , podem ser escrito como a soma de coeficiente de

momento em torno da borda de ataque e o produto de sustentação adimensional pela distância adimensional,  $x$ , ou seja:

$$C_{mx} = C_{mLE} + xC_l \quad (4.15)$$

Substituindo os valores de  $C_l$  e  $C_{mLE}$  equação (4.15) e igualizando a zero temos o valor de  $x$  que corresponde à posição do centro de pressão  $x_{cp}$  desta distribuição específica, ou seja,  $x = x_{cp} = 1/3$



Placa plana com ângulo de ataque e borda de ataque agudo  
Placa plana com ângulo de ataque gerando sustentação  
Placa plana com separação na borda de ataque e perdendo sustentação

Figura 4.7a,b,c Desenvolvimento das formas de aerofólio.

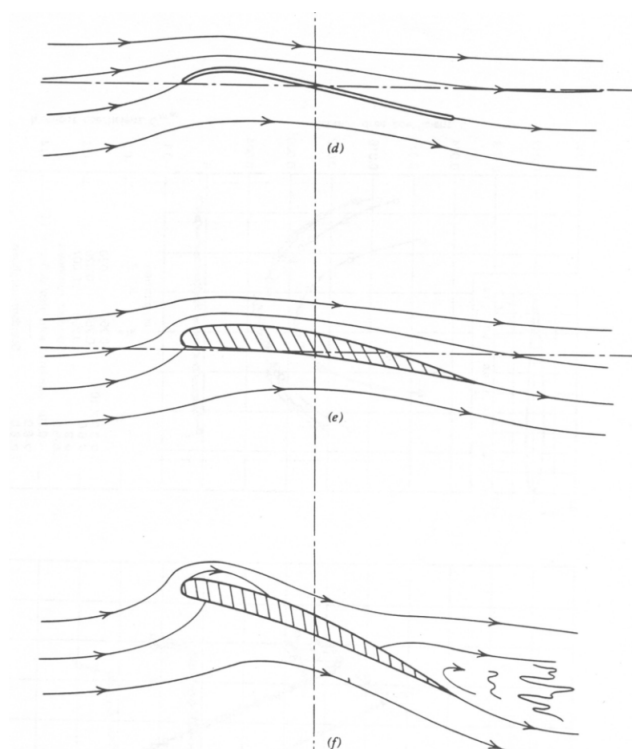
O centro aerodinâmico é o ponto em torno do qual o coeficiente de momento é constante e não é dependente de  $C_l$ . Chamando a posição do centro aerodinâmico de  $x_{ac}$ , equação (4.13) pode ser resolvida na localização do centro de pressão,  $x_{cp}$ :

$$x_{cp} = x_{ac} - \frac{C_{mac}}{C_l} \quad (4.16)$$

É importante lembrar que o centro aerodinâmico é a posição em torno do qual o momento é constante e o centro de pressão é o ponto no qual a sustentação resultante atua.

O desenvolvimento progressivo de formato de aerofólio é mostrado na figura 4.7. A figura 4.7a mostra uma placa plana com pequeno ângulo de ataque e pela quase simetria a sustentação é quase nula. Entretanto por causa dos efeitos viscosos, o escoamento na borda de fuga não pode contornar a quina aguda e rapidamente se ajusta à configuração da figura 4.7b, onde o escoamento deixa a borda de fuga quase tangente. Esta condição é chamada condição de Kutta. Na figura 4.7b a linha divisória de escoamento atinge estagnação num ponto chamado ponto de estagnação. À medida que o escoamento procede ao longo desta linha, não consegue se fixar à superfície e se separa da placa, mas volta a se juntar. O resultado deste escoamento não simétrico causa aceleração no lado superior e desaceleração no lado inferior e conseqüentemente diferença de pressão e sustentação resultante.

Se o ângulo de ataque é grande, o escoamento separado não cola novamente à superfície como está na figura 4.7. Ao acontecer isto, na grande região de separação, (esteira), a pressão aumenta na superfície superior provocando uma queda na sustentação. Este comportamento é chamado estol.



Placa plana com borda de ataque curva para evitar separação  
 Aerofólio com espessura e arqueamento para evitar o estolamento  
 Aerofólio com separação na borda de fuga

Figura 4.7d,e,f Desenvolvimento das formas de aerofólio.(continuação).

Para melhorar esta situação, pode curvar a parte da borda de ataque de borda plana como está na figura 4.7d, para se alinhar com o escoamento nesta região. Tal forma representa uma solução para o problema de separação, mas como se pode esperar, é sensível ao ângulo de ataque e somente adequado para o ângulo de projeto. Entretanto, adicionando espessura à placa fina adequada e colocando uma borda de ataque redonda, o desempenho do aerofólio é melhor numa faixa de ângulo de ataque sem separação do escoamento na borda de ataque. Assim, de forma qualitativa, um aerofólio típico foi definido.

Mesmo um aerofólio arqueado com espessura finita tem também suas limitações como esta da figura 4.7f. À medida que o ângulo de ataque aumenta, o escoamento pode separar inicialmente perto da borda de fuga, onde o ponto de separação progressivamente movimenta para frente à medida que o ângulo de ataque continua aumentando. O grau de separação na borda de ataque e de fuga depende do número de Reynolds e da geometria do aerofólio. Aerofólios espessos com borda de ataque redondo tende a atrasar a separação na borda de ataque. Esta separação também melhora com o aumento do número de Reynolds.

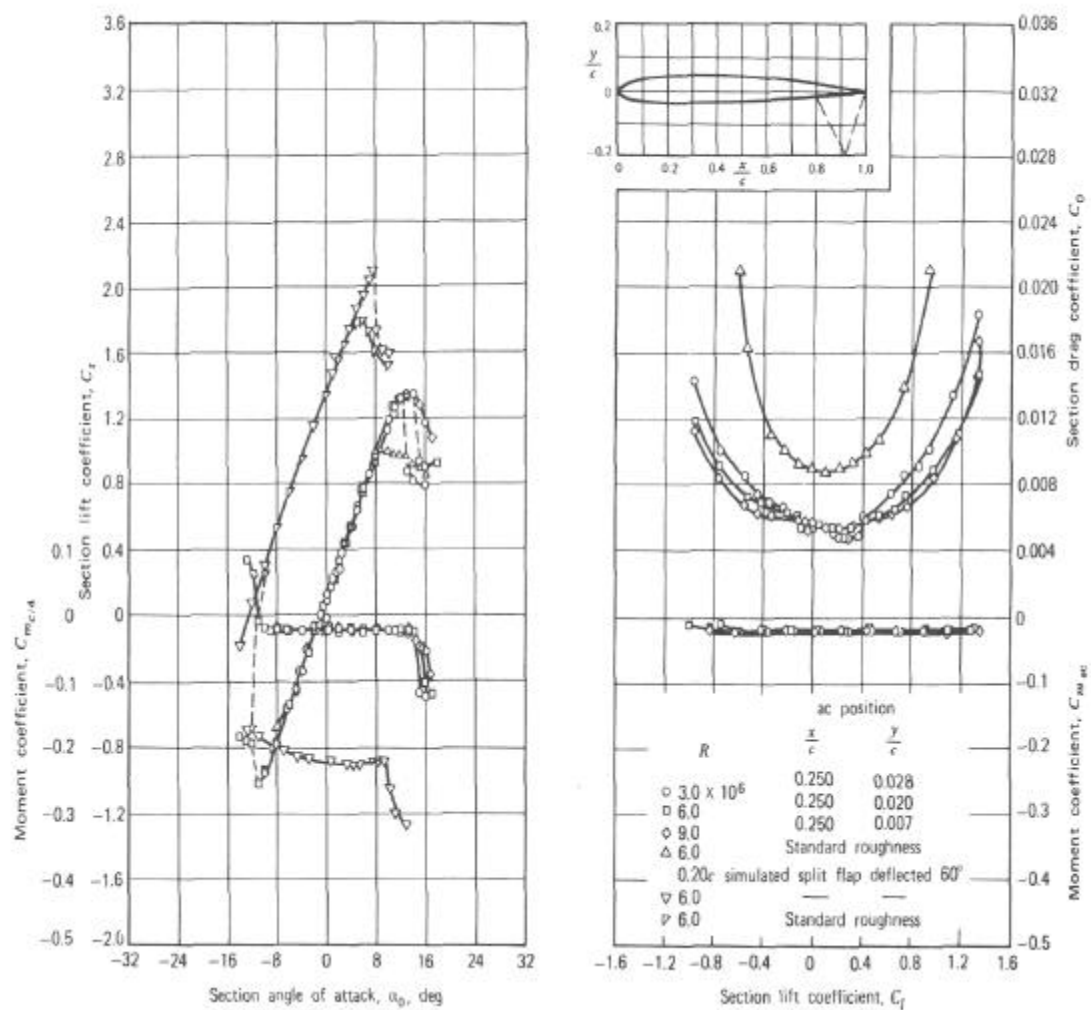


Figura 4.8 As características aerodinâmicas do aerofólio NACA 1408.

A separação na borda de ataque resulta numa separação sobre o aerofólio inteiro provocando queda brusca na sustentação. Por outro lado, a separação na borda de fuga é progressiva com o ângulo de ataque e resulta em estol mais gradual.

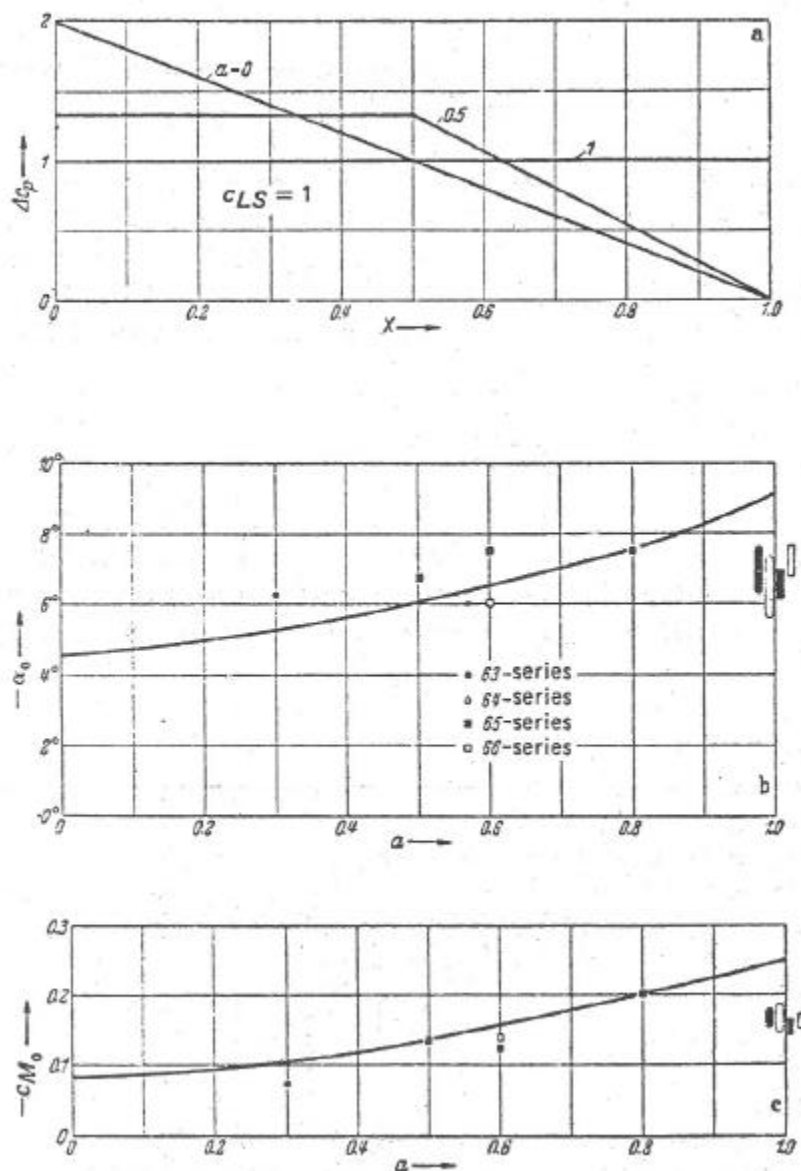


Figura 4.9a Os coeficientes aerodinâmicos de um aerofólio tipo NACA-6 mostrando a distribuição de pressão, ângulo de zero sustentação e coeficiente de momento de arfagem nulo.

## 4.6 Famílias de aerofólios

Série NACA quatro dígitos  
Série NACA cinco dígitos  
Série NACA 1 (série 16)  
Série NACA 6

### 4.6.1 Série NACA quatro dígitos

Em torno de 1932, NACA testou um serie de formas de aerofólios chamados de aerofólios de quatro dígitos. O arqueamento e distribuição das espessuras destes aerofólios foram dados pelas equações que podem ser encontradas no Abbott e Von Doenhoff [1958]. Estas distribuições foram escolhidas sem

qualquer base teórica, formuladas para se aproximar dos aerofólios eficientes em uso na época como, por exemplo, o aerofólio de Clark -Y.

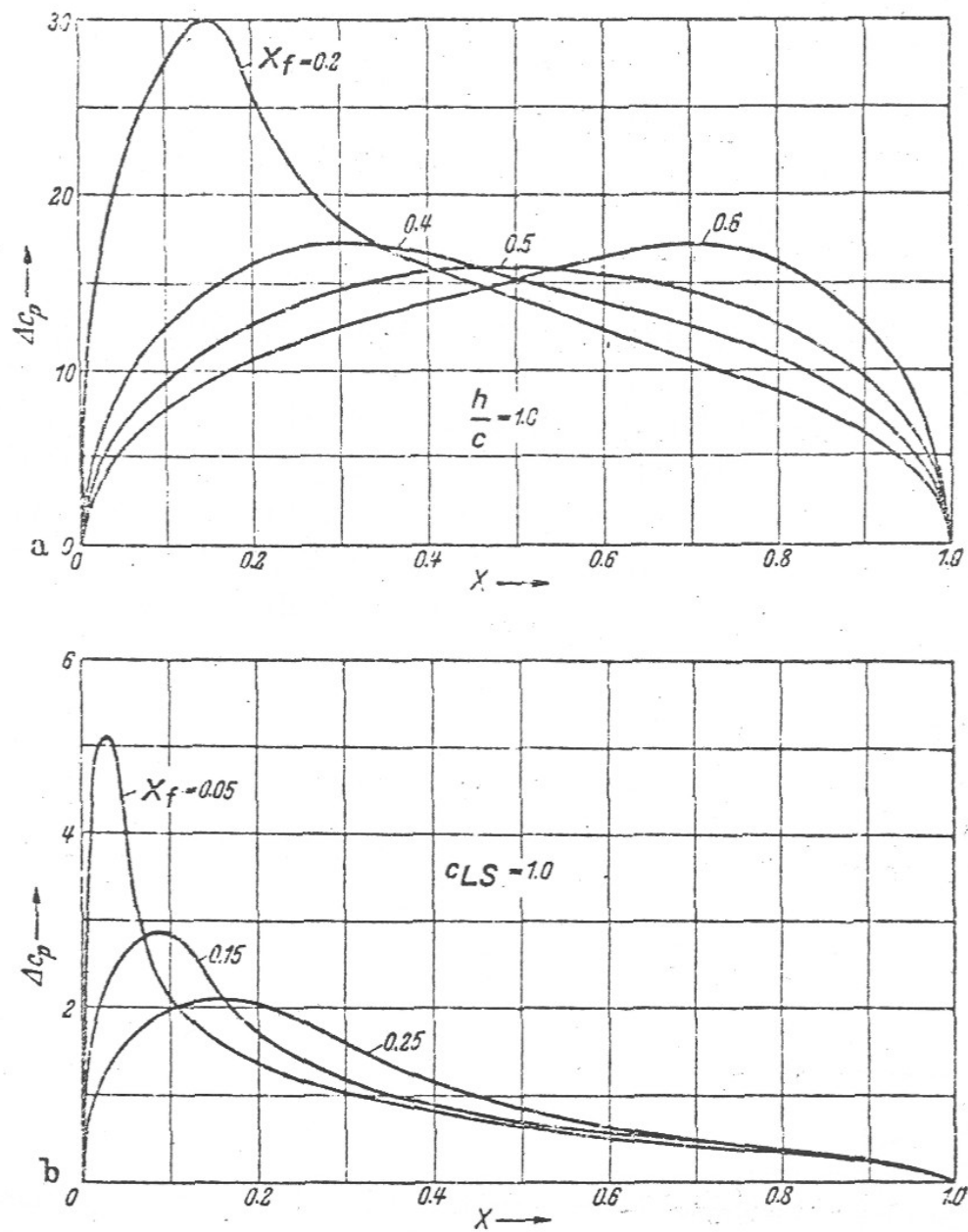


Figura 4.9b Distribuição da pressão teórica de alguns perfis NACA de quatro e cinco dígitos.



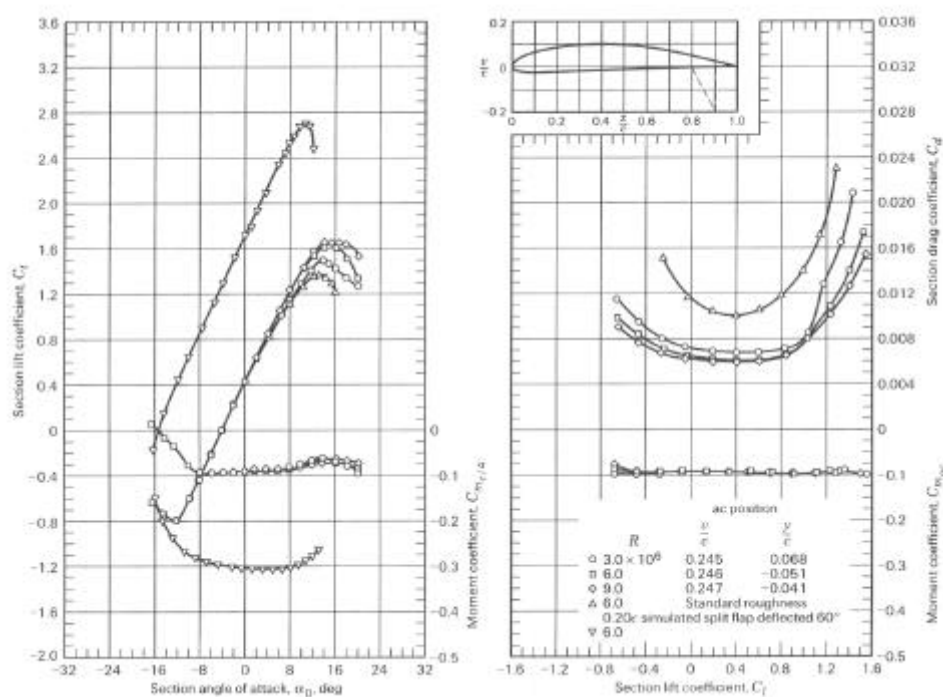


Figura 4.9c As características aerodinâmicas do aerofólio NACA 4412.

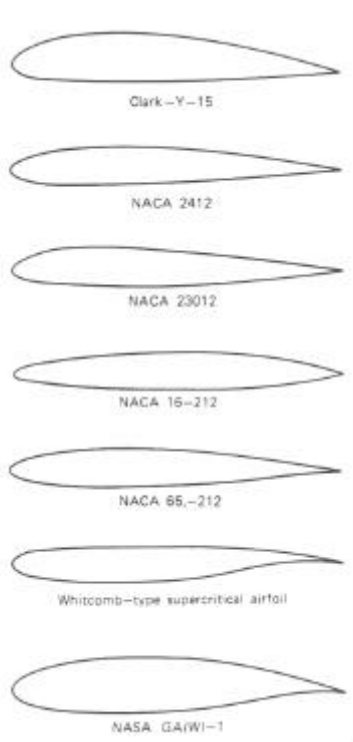


Figura 4.10 Comparação entre vários tipos de aerofólios.

A geometria de aerofólio de quatro dígitos é definida por quatro dígitos, o primeiro representa o arqueamento máximo em porcentagem da corda, o segundo é a localização do arqueamento máximo em décimos de corda; e os últimos dois dígitos representam a espessura máxima em porcentagem da corda. Por exemplo, NACA 4412 é 12% em espessura tendo 4% de arqueamento e localização a 0,4 c de borda de ataque, como está na figura 4.9c.

#### 4.6.2 Série NACA cinco dígitos

Esta série foi desenvolvida em 1935 e usa a mesma distribuição da espessura como a série de quatro dígitos. A linha de arqueamento média é definida diferentemente, para mover a posição de arqueamento máximo para frente e assim de aumentar o  $C_{l_{max}}$ . Como resultado o valor de  $C_{l_{max}}$  para aerofólios de cinco dígitos é 0,1 a 0,2 maior que aqueles de série de quatro dígitos.

A numeração de aerofólios é diferente do caso de quatro dígitos. O primeiro dígito multiplicado por 3/2 oferece o coeficiente de sustentação do projeto em décimos. Os seguintes dois dígitos são o dobro da posição de arqueamento máximo em porcentagem da corda os últimos dois dígitos representam a porcentagem da espessura. Por exemplo, o NACA 23012 é um aerofólio de 12% de espessura tendo um  $C_l$  de projeto 0,3 e arqueamento máximo localizado a 15% da corda a partir da borda de ataque. O aerofólio é mostrado na figura 4.10.

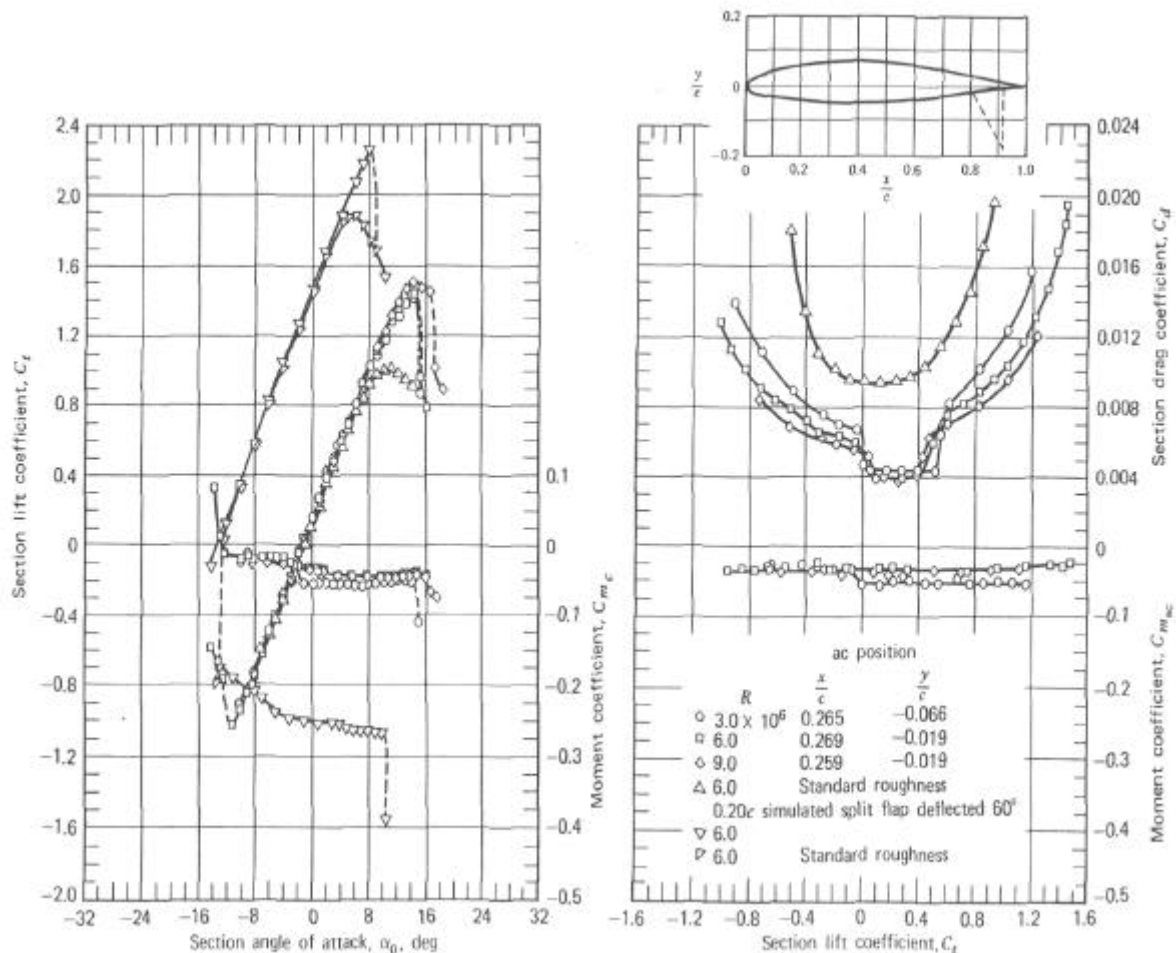


Figura 4.11 As características aerodinâmicas de aerofólio NACA 65-212.

#### 4.6.3 Série NACA 1 (série 16)

A série NACA 1 é a primeira serie desenvolvida à base teórica em torno de 1939. A serie mais usada serie 1 tem a pressão mínima localizada no ponto 0,6c e são chamadas serie 16. A linha de arqueamento para estes aerofólios é projetada para ter uma diferença de pressão uniforme ao longo da corda. Na teoria de aerofólio fino, isto corresponde à distribuição constante de vórtices.

Serie 1 também é identificada por cinco dígitos. Por exemplo, no NACA 16-212, o primeiro dígito é relativo a serie, o segundo dígito se refere à localização de mínima pressão em décimos da corda. Seguindo (-) o primeiro numero se refere ao  $C_d$  do projeto em décimos e os últimos dois dígitos se referem à espessura máxima em porcentagem da corda. Este aerofólio NACA 16-212 é mostrado na figura 4.10.

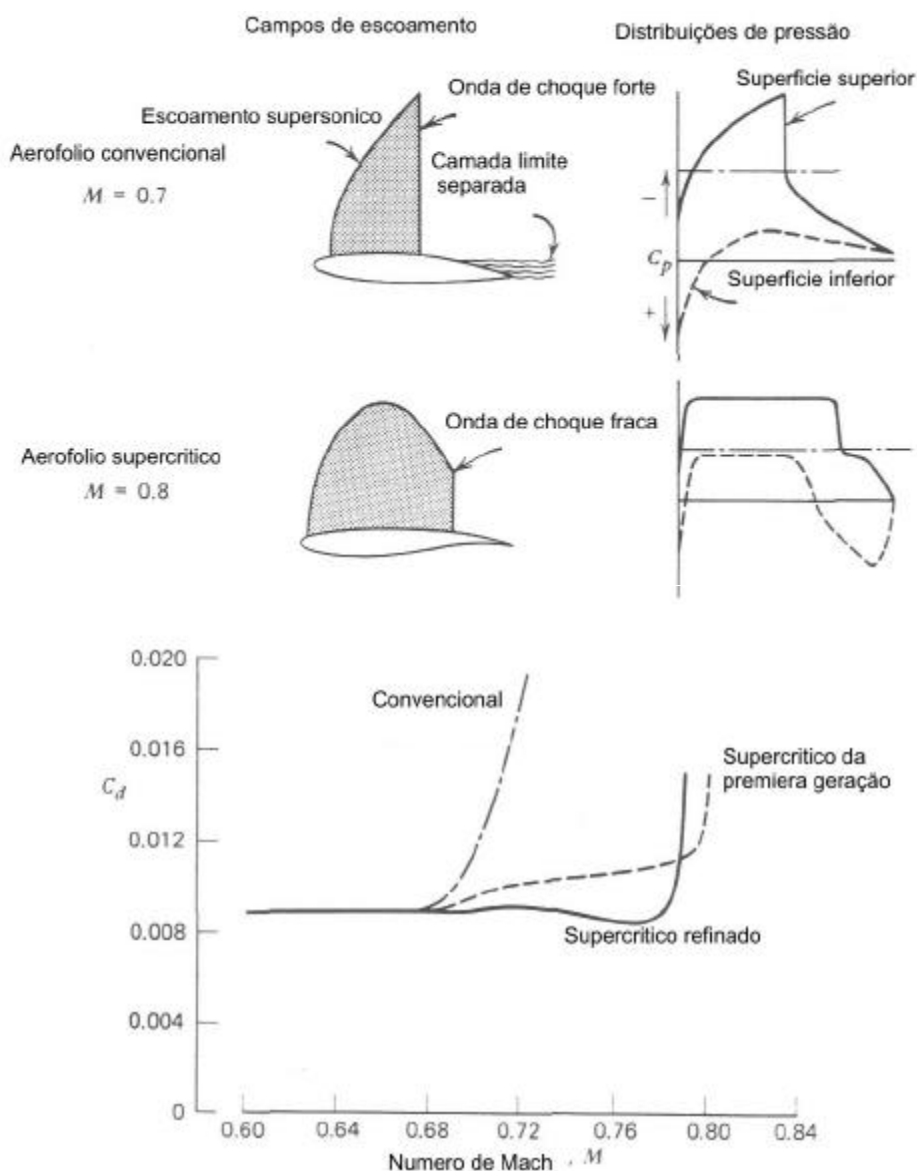


Figura 4.12 O fenômeno de escoamento supercrítico.

#### 4.6.4 Série NACA 6

Aerofólios NACA serie 6 são projetados para obter o arrasto, compressibilidade e  $C_{l_{max}}$  desejados. Estes requisitos são conflitantes, mas o objetivo principal é o baixo arrasto. A distribuição de pressão ao longo da corda resultando da combinação da espessura e o arqueamento conduz a manter um escoamento laminar extensivo sobre a parte inicial do aerofólio. Este aerofólio é mostrado na figura 4.10.

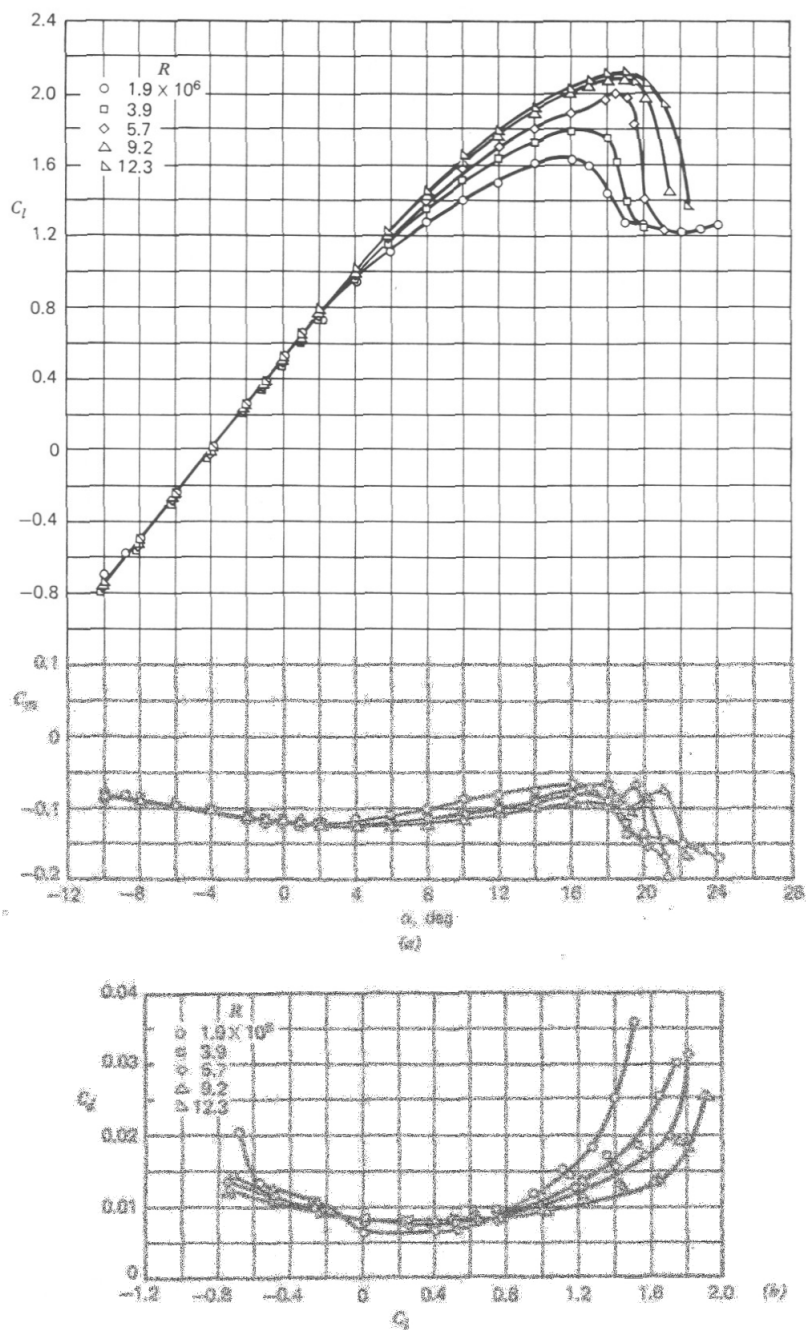


Figura 4.13 a,b Os efeitos do numero de Reynolds sobre as características do aerofólio GA(W)-1.

#### 4.6.5 Os aerofólios modernos

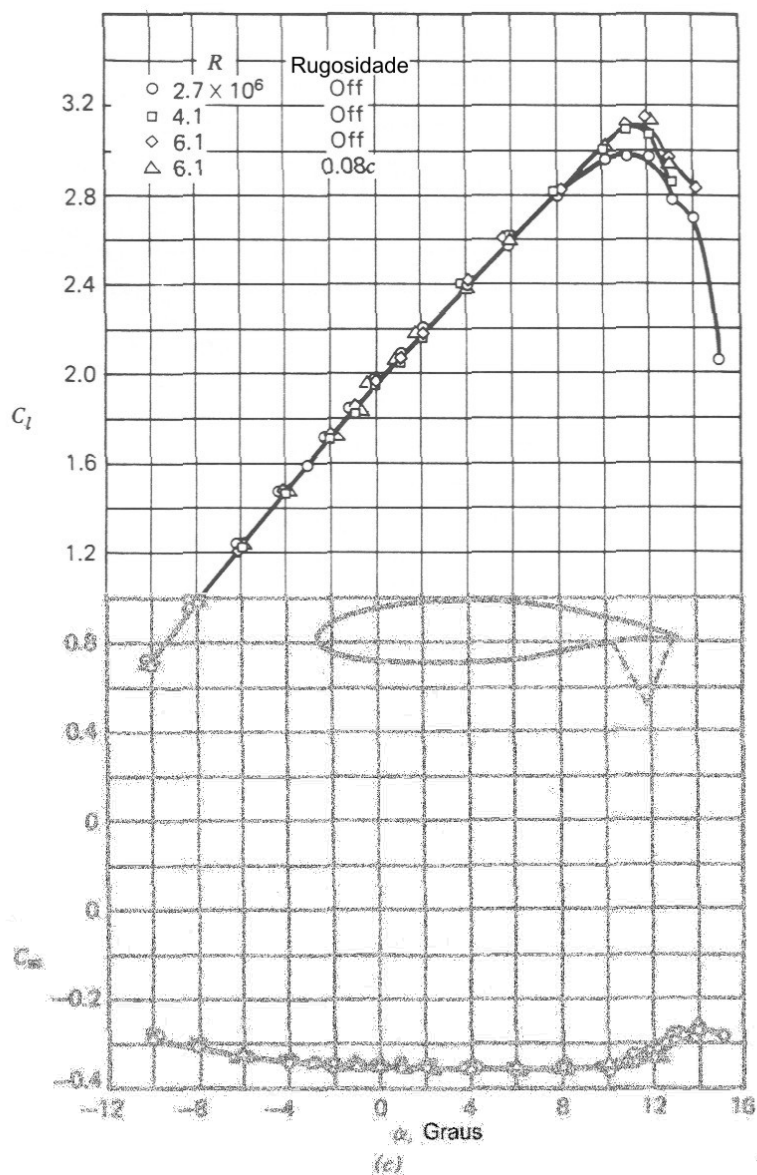


Figura 4.13c Os efeitos do numero de Reynolds sobre as características do aerofólio GA(W)-1, (continuação)

Estes aerofólios são sintetizados por serem projetados para satisfazer requisitos específicos e são desenhados por programas de computação sofisticados. Um dos aerofólios deste tipo é o chamado de aerofólio supercrítico. Este aerofólio tem borda de ataque bem redondo e relativamente plano no topo com borda de fuga caído. Para espessura constante de 12%, os testes de túnel de vento indicam possível aumento de cerca de 15% no numero de Mach. Para um aerofólio supercrítico em comparação com o convencional aerofólio serie 6 dígitos. Adicionalmente, uma borda de ataque redondo melhora o  $C_{lmax}$  a baixa velocidade em relação a serie de 6 dígitos que tem borda de ataque mais agudo. Usando a figura 4.12, para numero de Mach de escoamento livre 0,7 dependendo da forma e  $C_l$ , um aerofólio convencional acelera o escoamento a velocidade localmente supersônica na região frontal.

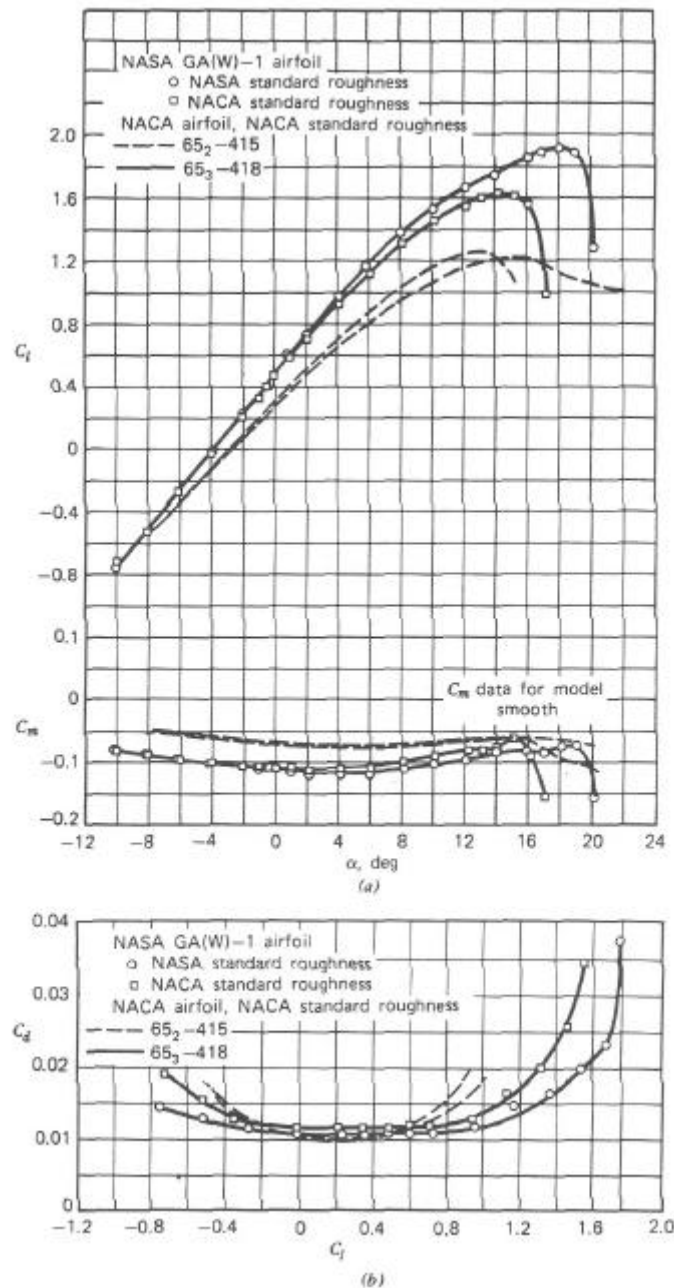


Figura 4.14 a,b Comparação entre os aerofólio GA(W) e os aerofólios NACA.

O escoamento, então, desacelera rapidamente através de uma forte onda de choque para condições subsônicas. Esta onda de compressão com o seu gradiente de pressão positivo causa aumento na espessura da camada limite, e dependendo da intensidade do choque, provoca separação. Isto por sua vez causa um aumento significativo no arrasto. O valor mínimo de número de Mach de escoamento livre para qual o escoamento local torna supersônico é chamado de número de Mach local. À medida que este valor é excedido, a onda de choque torna-se mais forte e o arrasto aumenta bruscamente.

O aerofólio supercrítico também acelera o escoamento para as condições supersônicas locais de escoamento livre em comparação com os aerofólios série 1 ou 6. Entretanto, o aerofólio crítico é desenhado em função de sua sustentação do projeto, de tal forma que o escoamento desacelera para as

condições subsônicas através de uma distribuição de fracas ondas de compressão no lugar de uma única onda forte. Desta maneira, o número de Mach é aumentado substancialmente.

Um aerofólio crítico tipo Whitcomb é mostrado na figura 4.10. Testados a baixas velocidades, os aerofólios críticos apresentam bom  $C_{l_{max}}$  e baixo  $C_d$ . Como resultado deste, outra família de aerofólios evoluiu a partir dos aerofólios críticos, mas para baixa velocidade, são chamados de aerofólios de aviação geral ou GA (W) para General Aviation (Whitcomb). Os aerofólios GA (W) – 1 e o último mostrado na figura 4.10. Os resultados dos testes mostram valores de  $C_{l_{max}}$  de 30% maior que aqueles da antiga NACA 65 – série. Adicionalmente, acima de valores de  $C_l$  de 0,6, seu arrasto é menor que a antiga série de aerofólios de fluxo laminar. Estes dados são mostrados na figura 4.13 para a série GA (W) – 1. Comparação de  $C_{l_{max}}$  e  $C_d$  para este aerofólio são apresentados nas figuras 4.14 e 4.14c. Observe-se que a performance de aerofólios GA (W) – 1 é fortemente dependente do número de Reynolds. Particularmente  $C_{l_{max}}$  que aumenta rapidamente com o número de Reynolds. A NASA adotou notação alternativa para GA (W) na forma de LS (Low Speed) e MS (Medium Speed) seguidos por quatro dígitos para referir à família.

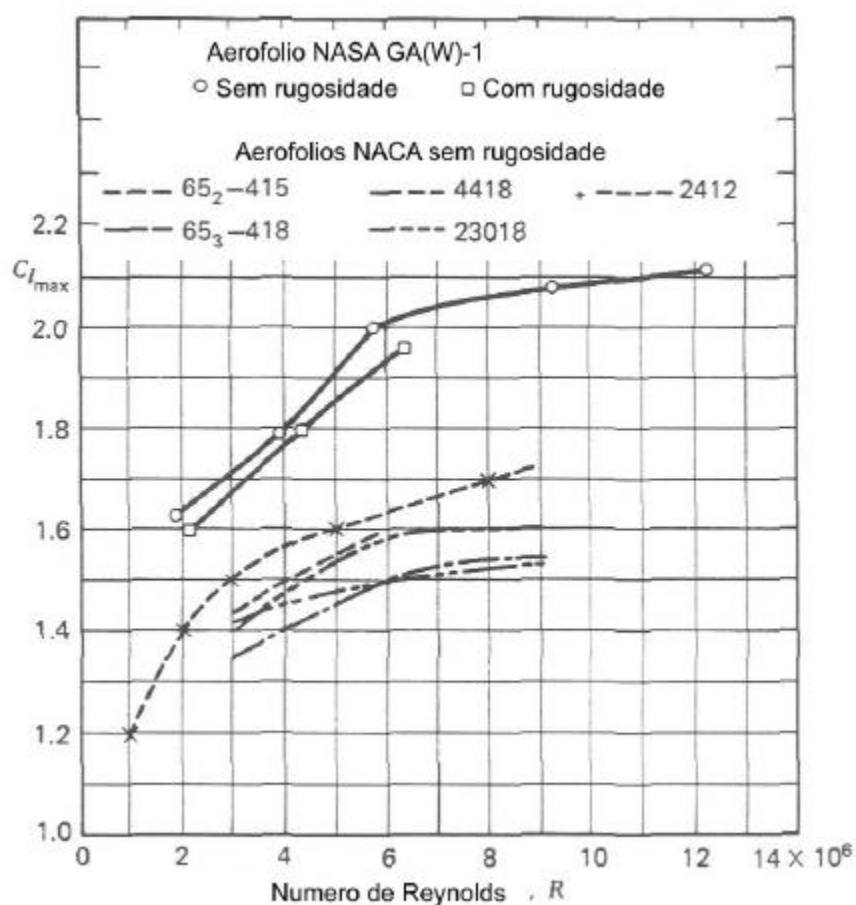


Figura 4.14c Comparação do coeficiente da sustentação do aerofólio GA(W)-1 com outros aerofólios NACA para  $M = 0,15$ .

Por exemplo, o aerofólio GA (W) – 1 é designado como LS (1) – 0417. Nesta nomenclatura, (1) refere-se à família; 04 define o coeficiente de sustentação de projeto de 0,4; e 17 define a espessura máxima em porcentagem da corda.

É importante mencionar que os aerofólios GA (W) tiveram aplicação limitada em aeronaves de aviação geral enquanto os aerofólios supercríticos tiveram campo de aplicação extenso em transporte

subsônico. O código computacional do Eppler foi usado em 1997 para desenhar aerofólio NASA NLF (1) – 0416 para aplicação em aeronave de aplicação geral avançado. O formato final desta aerofólio é mostrado na figura 4.15 com medidas experimentais incluídas.

#### 4.6.6 Fundamentos filosóficos das soluções teóricas para escoamento em torno de aerofólios.

Foi discutido anteriormente o conceito de escoamento de vórtice onde um ponto de vórtice de intensidade  $G$  localizado num ponto  $O$ . Pode-se expandir este conceito de vórtice de ponto, imaginando uma linha reta perpendicular à folha passando pelo ponto  $D$ , e estendido para o infinito em ambos os lados. Esta linha é um filamento de vórtice de intensidade  $G$ . Um filamento reto de vórtice é mostrado na figura 4.16. O escoamento induzido em qualquer plano perpendicular a filamento de vórtice pelo filamento ele mesmo é idêntico àquele induzido pelo ponto vórtice de intensidade  $G$ . Na figura 4.16 os escoamentos não planos perpendiculares ao filamento de vórtice de  $O$  e  $O'$  são idênticos um ao outro e também idêntico àquele induzido pelo ponto de vórtice de intensidade  $G$ .

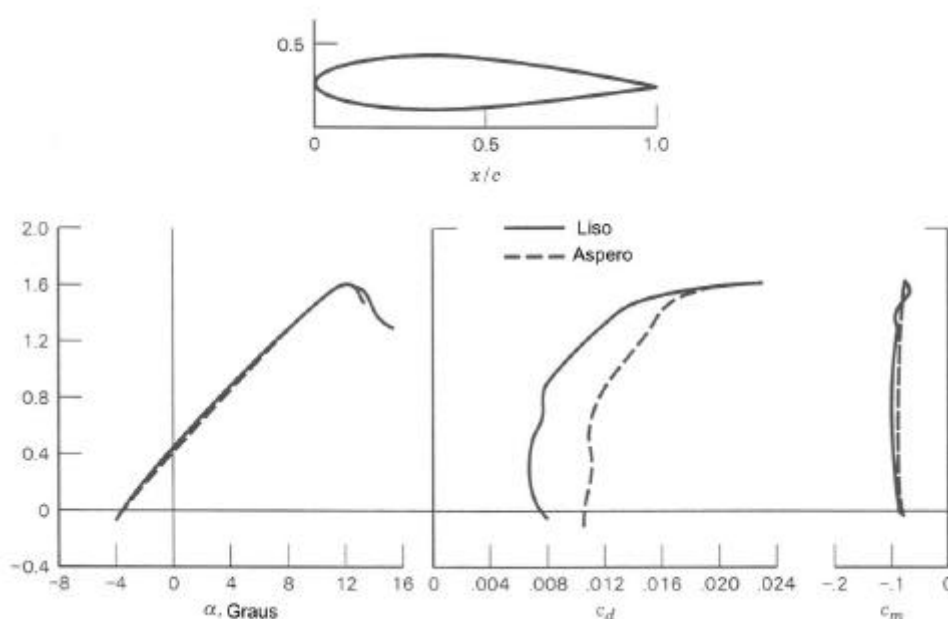


Figura 4.15 O aerofólio NASA NLF(1) 0416 projetado pelo código computacional EPPLER.

Considere um número infinito de filamentos retos de vórtices alinhados um ao lado de outro, onde a intensidade de cada filamento é infinitesimalmente pequena. Os filamentos alinhados um ao lado de outro formam uma superfície (plano) de vórtice ou uma folha de vórtice como está na figura 4.17, onde os filamentos estão normais ao plano horizontal.

Se  $s$  é a distância medida ao longo da superfície de vórtice, como está na figura 4.18. Define  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(s)$  como a intensidade da superfície (plano) de vórtice por unidade de comprimento ao longo de  $s$ . Assim a intensidade de  $ds$  do vórtice é  $\mathbf{g}ds$ . Esta pequena secção de superfície de vórtice pode ser tratada como vórtice distinto de intensidade  $\mathbf{g}ds$ .

Se considere o ponto  $P$ , no escoamento, localizado  $r$  de elemento  $ds$ , a pequena secção de vórtice de intensidade  $\mathbf{g}ds$  induz uma velocidade  $dV$  no ponto  $P$ , dada por:

$$dV = -\frac{\mathbf{g} ds}{2pr} \quad (4.17)$$

e numa direção normal à  $r$  como está na figura 4.18. A velocidade total é a somatória da equação (4.17) de ponto  $a$  para ponto  $b$ . Observa-se que  $dV$ , que é perpendicular à  $r$  muda a direção à medida que soma de  $a$  para  $b$ . Assim, as velocidades induzidas por cada incremento no ponto  $P$  devem ser somadas



vetorialmente. Por este motivo, em algumas situações, é interessante analisar em função de potencial de velocidade. Novamente, da figura 4.18, o incremento de potencial de velocidade  $df$ , induzido no ponto  $P$  pelo elemento de vórtice  $gds$  é

$$df = -\frac{gds}{2p}q \quad (4.18)$$

$$f(x, z) = -\frac{1}{2p} \int_a^b qgds \quad (4.19)$$

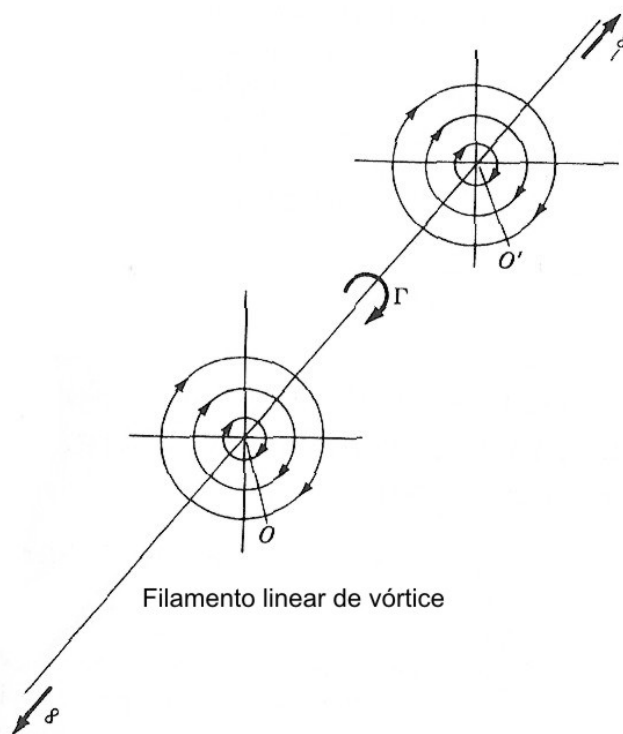


Figura 4.16 Filamento de vórtice.

Observa-se que a equação (4.17) é útil para análise da teoria clássica de aerofólio fino, enquanto a equação (4.19) é importante para o método numérico de painel de vórtice.

Sabemos que a circulação de  $G$  em torno de um ponto de vórtice é igual à intensidade do vórtice. De forma similar, a circulação em torno da superfície de vórtice, figura 4.18 é a somatória das intensidades dos elementos de vórtice, ou seja:

$$G = \int_a^b gds \quad (4.20)$$

Lembrando, no caso de plano de fonte, existe uma descontinuidade na direção da velocidade normal através da superfície (plano) de fontes, enquanto a velocidade tangencial é a mesma imediatamente acima e abaixo da superfície das fontes.

No caso da superfície de vórtice, existe uma mudança descontínua no comportamento tangencial da velocidade através da superfície, enquanto a velocidade normal é preservada através da superfície. Esta mudança na velocidade tangencial através da superfície é relacionada à intensidade da superfície, como segue:

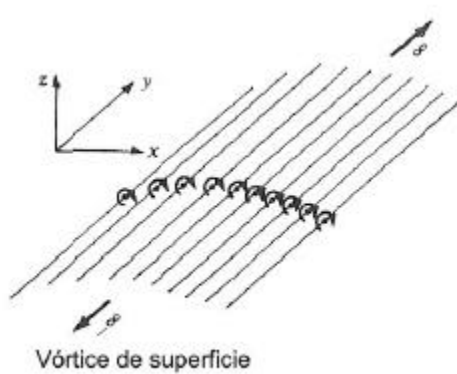


Figura 4.17 Vórtice de superfície.

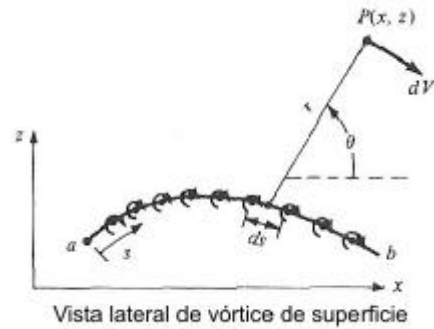


Figura 4.18 Vórtice de superfície.

Considere uma superfície de vórtice como está representado na figura 4.19, como o percurso da linha tracejada incluindo o elemento  $ds$ . A velocidade tangencial na parte superior e inferior são  $u_1$  e  $u_2$  e nos lados são  $v_1$  e  $v_2$ . Da definição da circulação:

$$\Gamma = -(v_2 dn - u_1 ds - v_1 dn + u_2 ds) \quad (4.21)$$

$$\Gamma = (u_1 - u_2)ds + (v_1 - v_2)dn$$

A intensidade da superfície de vórtice contida no retângulo é também

$$G = \int g ds \quad (4.22)$$

e assim das equações (4.21) e (4.22) temos

$$\int g ds = (u_1 - u_2)ds + (v_1 - v_2)dn \quad (4.23)$$

no limite  $u_1$  e  $u_2$  são as velocidades tangenciais s acima e abaixo da superfície do vórtice ou

$$g ds = (u_1 - u_2)ds \quad (4.24)$$

$$g = u_1 - u_2$$

A equação (4.24) mostra que o salto na velocidade tangencial através da superfície vórtice é igual à intensidade local de superfície de vórtice. O conceito de superfície vórtice é importante instrumento na análise das características de aerofólio a baixa velocidade.

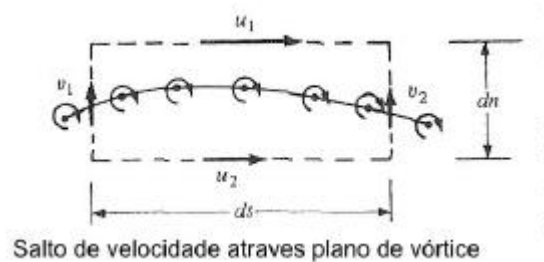


Figura 4.19 A velocidade tangencial através da vórtice de superfície

A filosofia da teoria ideal de aerofólio fino é baseada neste conceito. Considere um aerofólio de geometria e espessura arbitrária num fluxo uniforme  $V_\infty$ , como está representado na figura 4.20. Troca a superfície de aerofólio com superfície de vórtice de intensidade  $g(s)$ . Calcule a variação de  $g(s)$  de modo que o campo da velocidade induzida da superfície de vórtice quando somado à velocidade uniforme  $V_\infty$ , torna a superfície vórtice (conseqüentemente a superfície do aerofólio) uma linha de corrente e a circulação em torno do aerofólio fica

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{g} ds$$

onde o integral é em torno da superfície completa do aerofólio e a sustentação é

$$L' = \rho V_{\infty} \mathbf{G}$$

O conceito de substituir a superfície de aerofólio por superfície vórtice não é somente um artifício matemático mas também tem base física. Na situação real, existe uma camada limite fina na superfície altamente viscosa com grandes gradientes de velocidade produzindo vórtices, isto é,  $\nabla \times \vec{V}$  é finito na camada limite. Assim existe uma distribuição de vórtices ao longo da superfície de aerofólio por causa dos efeitos viscosos e a presente filosofia de trocar a superfície do aerofólio por superfície de vórtice pode ser considerada como meio de modelamento deste efeito num fluido ideal.

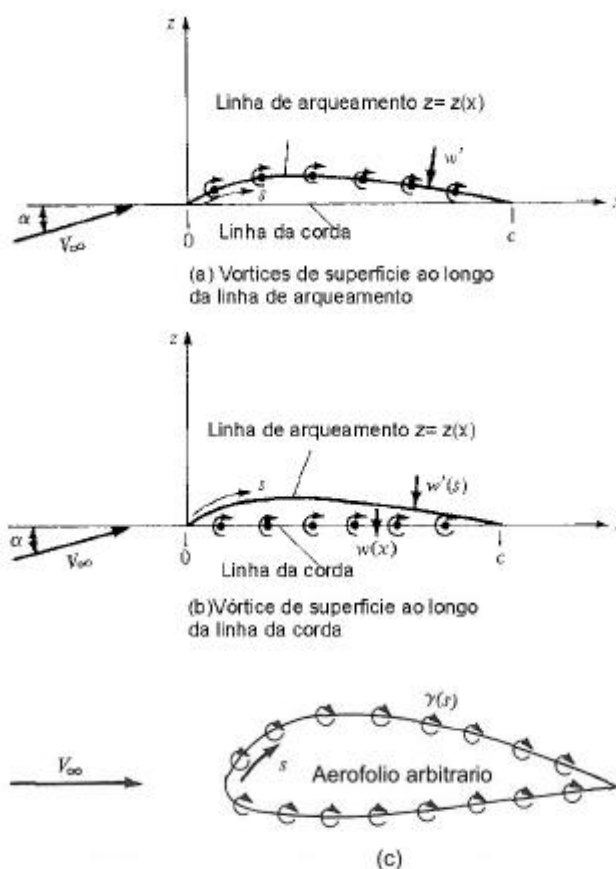


Figura 4.20 Simulação de aerofólio por uma distribuição de vórtice na superfície.

Imagine que o aerofólio da figura 4.20 é muito fino, de modo que as superfícies superior e inferior são muito próximas ou quase coincidentes. Este resultou num método de aproximar o aerofólio fino por uma única superfície de vórtice distribuída sobre a linha de arqueamento do aerofólio ou sobre a linha da corda do aerofólio como esta na figura 4.20 a 4.20b. A distribuição pode ser distribuída deste modo sobre a linha de arqueamento como está na figura 4.21. A intensidade desta superfície de vórtice  $g(s)$  é calculada de modo que, em combinação com o fluxo livre, a linha de arqueamento se torna uma linha corrente. Mesmo que este método mostrado na figura 4.21 seja uma aproximação em comparação como caso da figura 4.20, ele representa uma vantagem de poder obter uma solução analítica fechada para o caso de aerofólio fino.

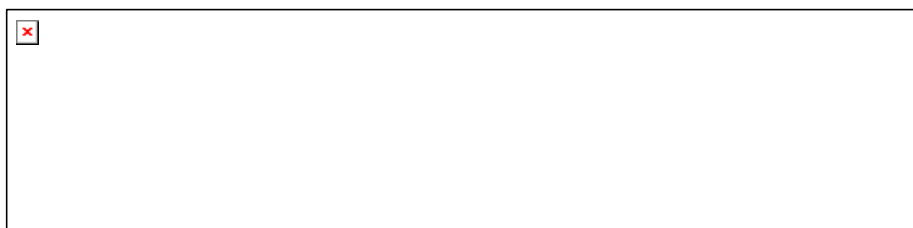


Figura 4.21 Aproximação de aerofólio fino.

No escoamento com sustentação sobre um cilindro circular, foi observado um número infinito de soluções potenciais para valores correspondente de circulação  $\Gamma$ . A mesma situação se aplica para o caso de um aerofólio com certo ângulo de ataque. Isto é, para um dado aerofólio com certo ângulo de ataque existem um número infinito de soluções teóricas válidas correspondente a um número infinito de  $\Gamma$ . Por exemplo, a figura 4.22 mostra dois escoamentos sobre mesmo aerofólio com o mesmo ângulo de ataque mas com diferentes valores de  $\Gamma$ . Sabemos da prática real que um dado aerofólio com dado ângulo de ataque produz um valor único de sustentação. Deste modo, mesmo que exista um número infinito de soluções potenciais possíveis, a natureza escolhe uma solução particular do conjunto. É obvio então que a filosofia apresentada não é completa e necessita de uma condição adicional para fixar  $\Gamma$  para um dado aerofólio com dado ângulo de ataque  $\alpha$ . Nesta condição o escoamento deve deixar a superfície superior e inferior na borda de fuga de forma suave. Esta é a chamada condição de Kutta após Kutta [1902].

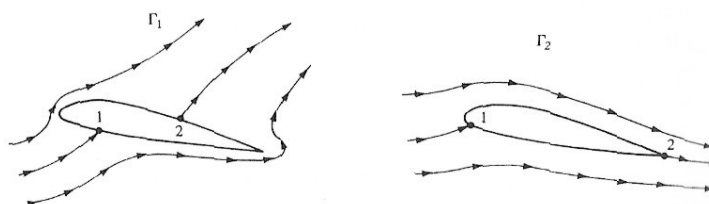


Figura 4.22 Efeito do valor da circulação sobre o escoamento sobre um aerofólio, os pontos 1 e 2 são pontos de estagnação.

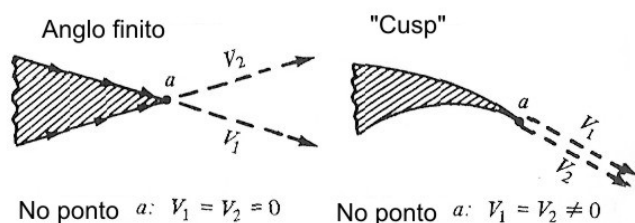


Figura 4.23 Possíveis formas de borda de fuga e sua relação à condição de Kutta.

Para aplicar a condição de Kutta na análise teórica e numérica, é necessário avaliar a natureza de escoamento na borda de fuga. A borda de fuga pode ter um ângulo finito como pode ser cúspide curvo como está na figura 4.23. Considere o caso de borda de fuga com ângulo de ataque finito e chame-se as velocidade no ponto  $a$  ao longo da superfície de  $V_1$  e  $V_2$ . Sendo que estas velocidades são finitas no ponto  $a$ , temos duas velocidade em duas direções diferentes no mesmo ponto, o que não é fisicamente possível. A única solução possível que permite que as velocidades sejam iguais no ponto  $a$  ( $V_1 = V_2$ ) é que estas sejam nulas, ou seja o ponto  $a$  é um ponto de estagnação.

No caso de borda de fuga cúspide  $V_1$  e  $V_2$  são na mesma direção no ponto  $a$ , se a pressão nesse ponto apresenta um valor único, temos pela equação de Bernoulli que

$$p_a + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_a + \frac{1}{2} \rho V_2^2 \quad \text{ou} \quad V_1 = V_2$$

Assim para borda de fuga cúspide, as velocidades que deixam as superfícies inferior e superior na borda de fuga devem ser iguais e na mesma direção. Assim pode ser resumida a condição de Kutta como segue.

- i Para um dado aerofólio com dado ângulo de ataque o valor da circulação  $\Gamma$  em torno do aerofólio é tal que o escoamento que deixa a borda de fuga deve ser suave.
- ii Se ângulo de borda de fuga for finito, então a borda de fuga é um ponto de estagnação.
- iii Se a borda de fuga é cúspide, as velocidades que deixam as superfícies superior e inferior devem ser iguais e na mesma direção.

Considerando novamente a filosofia de simulação de aerofólio por uma superfície de vórtice colocado na superfície de aerofólio ou na linha de corda do aerofólio. A intensidade de tal superfície de vórtice é variável ao longo da superfície  $g(s)$ . A condição de Kutta em termos de superfície de vórtice é que na borda de fuga temos da equação (4.24) que

$$g_{bf} = g(a) = V_1 - V_2 \quad (4.25)$$

mas para aerofólio com borda de fuga de ângulo finito,  $V_1 = V_2 = 0$  e assim  $g_{bf} = 0 = g(a)$ .

No caso de borda de fuga cúspide,  $V_1 = V_2 \neq 0$ , e assim da equação (4.25) temos  $g_{bf} = 0$ .

Assim a condição de Kutta expressa em termos da intensidade da superfície de vórtice é

$$g_{bf} = 0 \quad (4.26)$$

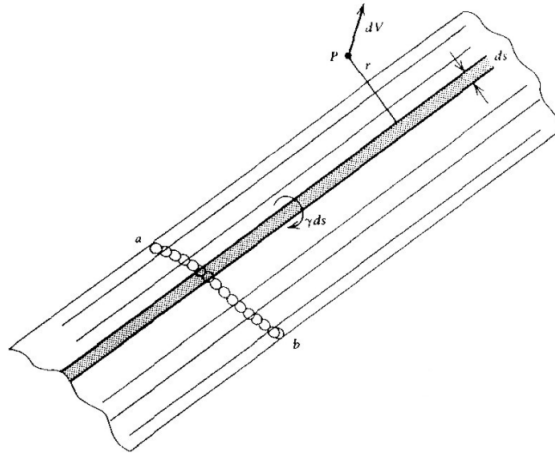


Figura 4.24 Velocidade induzida no ponto P pelo elemento de vórtice de superfície ds.

#### 4.6.7 Vórtice de superfície

A distribuição de vórtice mostrada na figura 4.24, pode ser imaginada como sendo um número infinito de filamentos de vorticidade cada uma de uma intensidade infinitesimal e estendendo para o infinito ou para um contorno de escoamento. A intensidade de lâmina  $\gamma$ , chamada a densidade de circulação é definida como sendo a forma limite do teorema de Stokes

$$g = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta s} \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} \right]$$

onde  $\Delta s$  é a largura da lâmina incluída pelo contorno. Se a circulação é sentido horário e é positiva e tem as unidades de velocidade.  $\delta s$  é a circulação em torno do elemento  $ds$ . Se os elementos da lâmina são

filamentos de vórtice retos e dobramentos infinitos, então a velocidade induzida no campo em qualquer ponto P pelo elemento  $ds$  da lâmina é dada pela lei de Biot-Savart como:

$$dv = \frac{\mathbf{g} ds}{2pr} \quad (4.27)$$

onde  $dv$  é normal ao  $r$ .

É óbvio que o campo de velocidade induzido pelo elemento de vórtice satisfaz a continuidade em todos os pontos no campo pelo fato que cada elemento por si induz um campo que satisfaz a continuidade em todos os pontos. A irracionalidade é também satisfeita em todos os pontos no campo pelo mesmo argumento. O argumento não é válido no plano da vórtice mesmo onde  $\text{Curl } v$  não é zero. Não há descontinuidade na velocidade em qualquer ponto no campo exceto na lâmina ela mesma. Será demonstrado que o componente de velocidade paralela a vórtice de superfície sofre um salto igual a intensidade da lâmina no ponto onde o contorno atravessa o plano da vórtice.

Considere que a secção transversal da lâmina mostrada na figura 4.25 e integra a vorticidade sobre a área  $\Delta s \Delta n$  e deixa estas dimensões aproximar de zero, assim temos

$$\bar{\mathbf{g}} \Delta s = - \int_s^\wedge w d s = u_1 \mathbf{D}s - v_2 \mathbf{D}n - u_2 \mathbf{D}s + v_1 \mathbf{D}n$$

onde  $\bar{\mathbf{g}}$  é a densidade média da circulação sobre  $\Delta s$ .

No limite, quando  $\Delta n$  e  $\Delta s \rightarrow 0$  então  $(v_1 - v_2) \rightarrow 0$  e a expressão é reduzida à  $\gamma ds$  onde  $\gamma$  é a densidade de circulação no ponto  $x$  sobre a lâmina e conseqüentemente temos

$$\mathbf{g}(x) = u_1 - u_2 \quad (4.28)$$

que é o salto na velocidade tangencial através da vórtice de superfície.

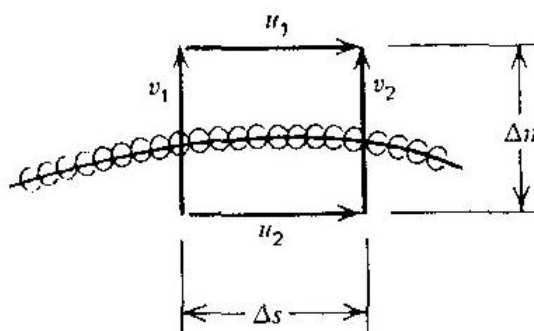


Figura 4.25 Avaliação da densidade de circulação.

### 1. Teoria do aerofólio

O problema na teoria de aerofólio é determinar a circulação  $\Gamma$  em função da forma e do ângulo de ataque  $\alpha$ , mas mesmo que a geometria do aerofólio e o ângulo de ataque sejam especificados, a solução potencial não é única. Uma família infinita de soluções pode ser encontrada correspondente a diferentes valores de circulação  $\Gamma$ . A figura x1 mostra exemplos desta unicidade de escoamento em torno de um cilindro. O mesmo é verdadeiro para o caso de aerofólio da figura x1, mostrando três soluções matemáticas viáveis para diferentes valores de circulação. Pode-se perceber a situação que melhor simula o aerofólio real baseado nas discussões anteriores relativo às etapas transientes no desenvolvimento da sustentação, neste caso a figura x2c é mais próxima da situação real do aerofólio. Se a borda de fuga do aerofólio é pouco redonda, será neste caso, um ponto de estagnação. Se a borda de fuga é aguda, aproximando-se da geometria da maioria dos aerofólios, as velocidades de escoamento nas superfícies superior e inferior serão iguais no ponto final onde deixam o aerofólio. Este é fisicamente

o valor da circulação  $\Gamma$  chamada de condição de Kutta e a circulação é chamada de  $\Gamma_{kutta}$  que depende da velocidade, do ângulo de ataque e da geometria de aerofólio.

## 2. Aerofólio de placa plana

A teoria de vórtice em plano.

O aerofólio de placa plana é o aerofólio mais simples, sem espessura e sem forma e mesmo assim, sua teoria é tão simples. Este problema pode ser resolvido pelo mapeamento de variáveis complexas, entretanto, aqui será tratado usando-se o método de vórtices em plano "vortexsheet".

A figura x2a mostra uma placa plana de comprimento  $C$  simulada por um vórtice em plano de intensidade variável  $(x)$ . A velocidade de escoamento livre  $U_\infty$  num ângulo de ataque  $\alpha$  em relação à corda do aerofólio.

Para ter sustentação positiva para cima, com escoamento vindo da esquerda para a direita, deve-se especificar a circulação positiva na direção horária. Existe um degrau na velocidade tangencial através de um plano igual à intensidade local.

$$u_u - u_l = g(x) \quad (1)$$

Sem o escoamento livre, o vórtice em plano deve causar um escoamento para a esquerda,  $du = +\frac{1}{2}g$  na

superfície superior e um escoamento igual ao oposto no lado inferior do valor  $d = \frac{1}{2}g$ , como está na figura x3a. A condição de Kutta para esta borda de fuga aguda requer que esta diferença de velocidade é nula na borda de fuga para manter o escoamento na saída suave e paralela.

$$g(c) = 0 \quad (2)$$

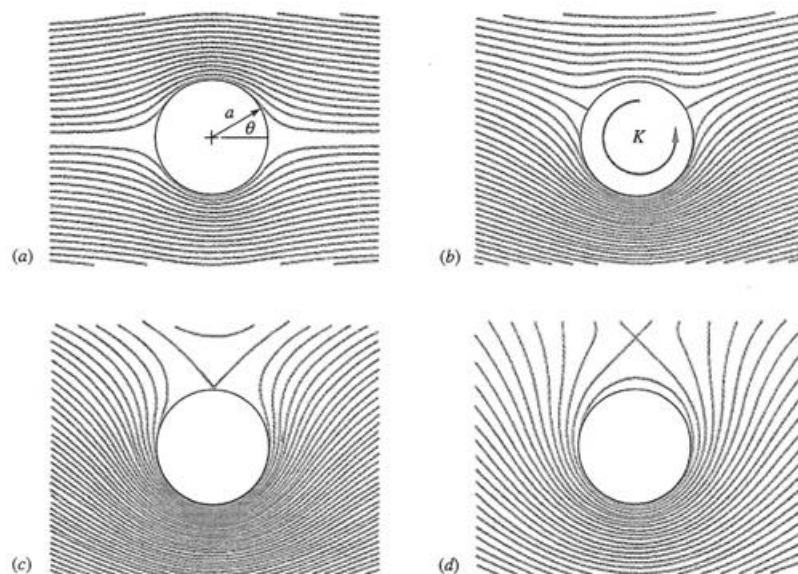


Figura x1

A solução correta deve satisfazer esta condição, após a qual a sustentação total pode ser computada pelo somatório das intensidades de vórtice sobre o aerofólio inteiro. Da equação:

$$\frac{L}{b} = -rU_\infty \Gamma$$

Onde  $b$  é a largura do aerofólio  $b$ . assim,

$$L = \mathbf{r} U_{\infty} b \Gamma \quad \text{onde} \quad \Gamma = \int_0^c \mathbf{g}(x) dx \quad (3)$$

Um método alternativo é avaliar a sustentação usando os coeficientes adimensionais de pressão nas superfícies inferior e superior.

$$C_{p_{u,l}} = \frac{p_{u,l} - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \mathbf{r} U_{\infty}^2} = 1 - \frac{U_{u,l}^2}{U_{\infty}^2} \quad (4)$$

Mas,

$$U_{u,l}^2 = (U_{\infty} \cos \mathbf{a} \pm \mathbf{d}u)^2 + (U_{\infty} \sin \mathbf{a})^2$$

$$U_{u,l}^2 = U_{\infty}^2 \pm 2 \mathbf{d}u \cos \mathbf{a} + \mathbf{d}u^2 = U_{\infty}^2 \left( 1 \pm \frac{\mathbf{d}u}{U_{\infty}} \right) \quad (5)$$

Tendo  $\mathbf{a}$  pequeno,  $\mathbf{d}u \ll U_{\infty}$ ,  $\cos \mathbf{a} = 1$ .

Assim,

$$C_{p_{u,l}} = \pm \frac{\mathbf{d}u}{U_{\infty}} = \pm \frac{\mathbf{g}}{U_{\infty}} \quad (6)$$

E deste modo,

$$L = \int_0^c (p_l - p_u) b dx$$

Ou

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \mathbf{r} U_{\infty}^2 b C} = \int_0^1 (p_l - p_u) \frac{dx}{c} = 2 \int_0^1 \frac{\mathbf{g}}{U_{\infty}} d\left(\frac{x}{c}\right) \quad (7)$$

As equações (3) e (7) são equivalentes. A intensidade de vórtice em plano  $\mathbf{g}(x)$  pode ser computada de requisito que a velocidade total normal  $v(x)$  é zero no plano de vórtice pelo que o plano de vórtice representa uma placa sólida ou superfície de corrente. Considere um pequeno elemento de plano de vórtice  $\mathbf{g}dx$  localizado no ponto  $x_o$ . A velocidade  $v$  induzida no ponto  $x$  sobre o plano de vórtice pelo elemento de vórtice de intensidade  $d\Gamma = -\mathbf{g}dx$ ,

$$dv \Big|_x = \frac{d\Gamma}{2\mathbf{p}r|_{x_o \rightarrow x}} = \frac{-\mathbf{g}dx}{2\mathbf{p}(x_o - x)}$$

A velocidade total normal induzido pelo vórtice em plano no ponto  $x$  é:

$$v_{\text{vórtice em plano}} = - \int_0^c \frac{\mathbf{g}dx}{2\mathbf{p}(x_o - x)} \quad (8)$$

Da figura x3a, o escoamento uniforme induz uma velocidade normal constante em qualquer ponto no plano de vórtice:

$$v_{\text{fluxo paralelo}} = U_{\infty} \sin \mathbf{a}$$

A velocidade normal sobre o plano de vórtice deve ser nula, ou seja,

$$\int_0^c \frac{\mathbf{g}dx}{(x_o - x)} = 2\mathbf{p}U_{\infty} \sin \mathbf{a} \quad (9)$$

Que deve ser resolvida sujeita à condição de Kutta,  $\mathbf{g}(c) = 0$ .



A solução desta equação é dada por:

$$g(x) = 2U_{\infty} \sin a \left( \frac{c}{x} - 1 \right)^{1/2} \quad (10)$$

Da equação (6), o coeficiente de pressão superficial é:

$$C_{p_{u,l}} = \mp 2 \sin a \left( \frac{c}{x} - 1 \right)^{1/2} \quad (11)$$

O coeficiente de sustentação do aerofólio é proporcional à área entre  $C_{p_l}$  e  $C_{p_u}$ , a figura x3b, da equação (7):

$$C_L = 2 \int_0^1 \frac{g}{U} d\left(\frac{x}{c}\right) = 4 \sin a \int_0^1 \left( \frac{c}{x} - 1 \right)^{1/2} d\left(\frac{x}{c}\right) \quad (12)$$

$$C_L = 2p \sin a = 2pa$$

O coeficiente de momento em torno da borda de ataque, positivo na direção anti-horária,

$$C_{M_{LE}} = \frac{M_{LE}}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 b C^2} = \int_0^1 (C_{p_l} - C_{p_u}) \frac{x}{c} d = \frac{p}{2} \sin a = \frac{1}{4} C_L \quad (13)$$

O centro de pressão, ou a posição da força de sustentação resultante está no ponto  $\frac{1}{4}$  corda, ou,

$$\left( \frac{x}{c} \right)_{\text{centro de pressão}} = \frac{1}{4} \quad (14)$$

independente do ângulo de ataque.

### 3. Teoria Potencial para aerofólios espessos e arqueados

A teoria destes aerofólios é baseada no mapeamento por variáveis complexas que transformam o escoamento em torno do cilindro com circulação em escoamento em torno do aerofólio com circulação, e esta circulação é ajustada tal que a condição de Kutta seja satisfeita. Neste caso, a teoria para qualquer aerofólio espesso arqueado é:

$$\Gamma_{Kutta} = pbCU_{\infty} \left( 1 + 0,77 \frac{t}{c} \right) \sin(a + b) \quad (15)$$

Onde,  $b = \tan^{-1}(2h/C)$  e  $h$  é o arqueamento máximo.

O coeficiente de sustentação de aerofólio é:

$$C_L = \frac{\rho U_{\infty} \Gamma}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 b C} = 2p \left( 1 + 0,77 \frac{t}{c} \right) \sin(a + b) \quad (16)$$

O efeito de espessura  $\left( 1 + 0,77 \frac{t}{c} \right)$  não confirmado experimentalmente tendo aerofólios onde a sustentação aumenta e outros onde foi verificada uma redução da sustentação. Consequentemente, este efeito pode ser desprezado resultando em:

$$C_L = 2p(a + b) \quad (17)$$

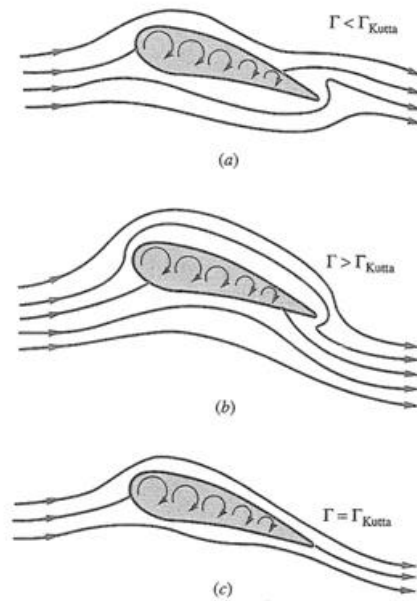


Figura x2 Representação da condição de Kutta para vários valores de circulação.

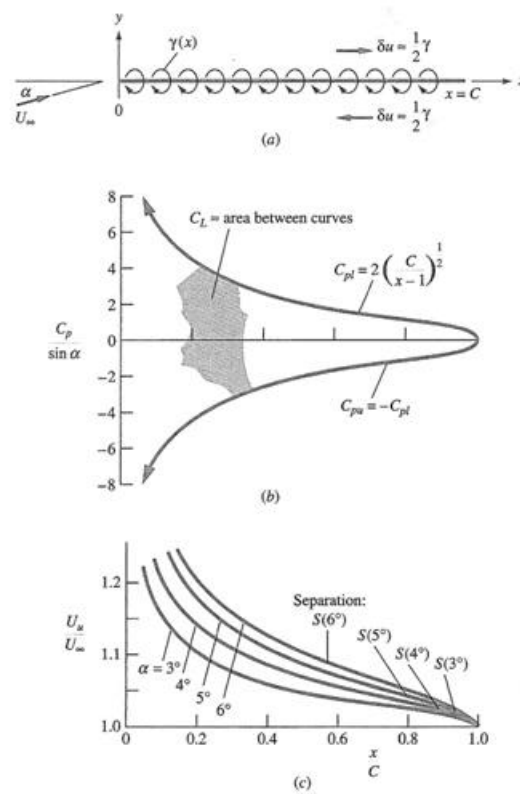


Figura x3 Solução de vórtice em plano (vortex sheet)

## 4.7 Teoria de aerofólio infinito

Na teoria do aerofólio infinito, o aerofólio é substituído pela linha média de arqueamento. O padrão de escoamento é construído colocando uma lâmina de vórtice fixa ao corpo sobre a linha de arqueamento e ajustando sua intensidade de modo que a linha de arqueamento vira uma linha de corrente de escoamento. O padrão de velocidade é então composto de fluxo uniforme mais o campo induzido pela lâmina do vórtice. A continuidade e a irrotacionalidade são satisfeitas em todos os pontos do campo. A velocidade no finito é a velocidade não perturbada pelo fato que a lâmina de vórtice não pode contribuir para o infinito. Na linha de arqueamento a resultante de fluxo uniforme e o campo induzido pela lâmina de vórtice são paralelos à linha de arqueamento.



Figura 4.26 Campo induzido pelo vórtice de superfície.

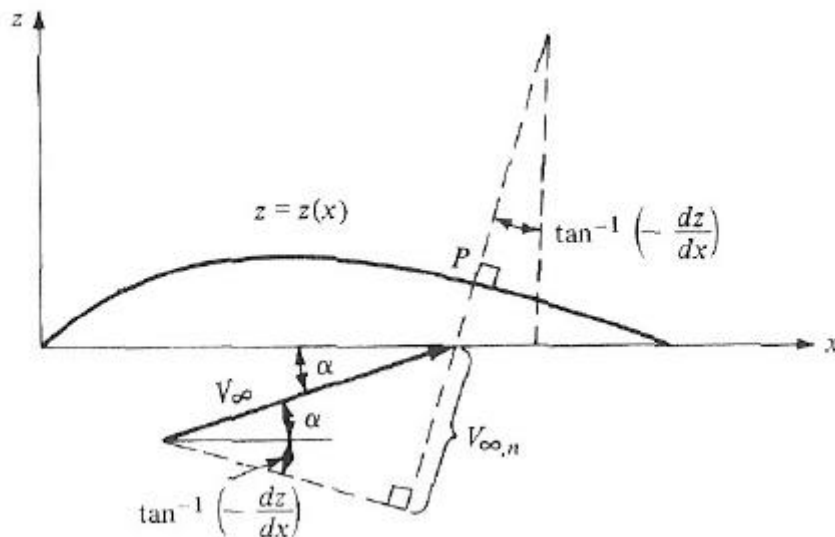


Figura 4.27 Condição de contorno estabelecida pelos componentes de velocidade.

É necessário estabelecer a circulação em torno do aerofólio. É evidente que a circulação em torno da lâmina é simplesmente a intensidade da lâmina inteira. Assim, para uma lâmina de dada intensidade total existe somente uma distribuição de intensidade de vórtice que faz da lâmina uma linha de corrente quando combinar o campo da lâmina com o campo do fluxo paralelo. Exatamente esta distribuição que deve ser determinada.

A circulação em torno do corpo é estabelecida pela condição de Kutta. A condição de Kutta significa que não há descontinuidade da velocidade na borda de fuga. Também pode interpretar a condição de Kutta como de fixar a intensidade da vorticidade a ser nula na borda de fuga. A condição de Kutta portanto, remove a dificuldade de ter velocidade infinita na borda de fuga de lâmina de vórtice mas permanece a velocidade infinita na borda de ataque. Em resumo pode-se dizer que o resultado de fluxo uniforme e o campo induzido pela lâmina de vórtice satisfazem a continuidade e irrotacionalidade e tem um valor no infinito igual a do fluxo uniforme. Assim um e somente uma distribuição de intensidade total, que quando combinado com o fluxo uniforme torna a lâmina de vórtice em linha de corrente. A intensidade total da lâmina é fixada pela condição de Kutta, ou seja

$$g_{TE} = 0 \quad (4.29)$$

Para que a velocidade resultante de fluxo uniforme e a velocidade induzida pela lâmina de vórtice seja paralela à lâmina a soma dos componentes normais do fluxo uniforme e a velocidade induzida deve ser nula, como mostrado na figura 4.26.

O componente normal do incremento de velocidade é

$$dv_{in} = \frac{g \, ds}{2pr} \cos d_3 \quad (4.30)$$

Usando as relações

$$r = \frac{x_0 - x}{\cos d_2}, \quad ds = \frac{dx}{\cos d}$$

e integrando temos:

$$V_{in} = -\frac{1}{2p} \int_{le}^{ie} \frac{g \, dx}{x_0 - x} \frac{\cos d_2 \cos d_3}{\cos d_1} \quad (4.31)$$

O sinal negativo é usado por causa da direção da circulação em sentido horário e  $V_{in}$  para fora do longo do normal a superfície superior são considerados positivos. Os ângulos  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$  são funções de  $x$ .

O componente da velocidade não perturbada normal a linha média de arqueamento no ponto P é

$$V_{\infty n} = V_{\infty} \sin[\alpha - \tan^{-1}(dz/dx)_0] \quad (4.32)$$

o subscrito (0) correspondente a  $x_0$  na figura 4.26. O ângulo de ataque mostrado na figura 4.27 é positivo.  $(dz/dx)_0$  é a gradiente de linha média de arqueamento relativo a posição  $x_0$ . A soma das equações (4.31) e (4.32) deve ser zero, nula, se requer que a linha média de arqueamento deve ser uma linha de corrente no escoamento ou seja

$$V_{in} + V_{\infty n} = 0 \quad (4.33)$$

ou

$$V_{\infty} \sin[\alpha - \tan^{-1}(dz/dx)_0] = \frac{1}{2p} \int_{le}^{ie} \frac{g \, dx}{x_0 - x} \frac{\cos d_2 \cos d_3}{\cos d_1}$$

O problema central da teoria de aerofólio fino é de determinar a distribuição  $\gamma$  que satisfaz as equações (4.29) e (4.33). A seguir ser introduzida uma simplificação que leva ao conceito de asa plana. Os três ângulos  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$  são geralmente pequenos se o arqueamento máximo é pequeno como é usualmente o caso na prática e assim a equação (4.31) fica

$$V_{in} = -\frac{1}{2p} \int_{le}^{ie} \frac{g \, dx}{x_0 - x} \quad (4.34)$$

A equação (4.34) representa a velocidade induzida sobre o eixo  $x$  por uma vórtice de superfície ao longo do eixo  $x$ . Assim, a simplificação introduzida é equivalente a satisfazer as condições de contorno sobre o eixo  $x$  invés da linha média de arqueamento. A mesma ordem de aproximação é feita na equação (4.32), assumindo adicionalmente um pequeno ângulo de ataque. Deste modo a equação (4.32) fica

$$V_{\infty n} = V_{\infty} [\alpha - (\frac{dz}{dx})_0]$$

A condição de contorno sobre o aerofólio correspondente a equação (4.33) fica

$$\frac{1}{2p} \int_0^c \frac{g \, dx}{x_0 - x} = V_\infty \left[ a - \left( \frac{dz}{dx} \right)_0 \right] \quad (4.35)$$

A equação (4.35) representa a condição de escoamento nulo normal a linha média de arqueamento. A condição é aplicada no eixo  $x$  invés da linha média de arqueamento. Esta técnica é chamada de aproximação de asa plana e usada na teoria de asa fina.

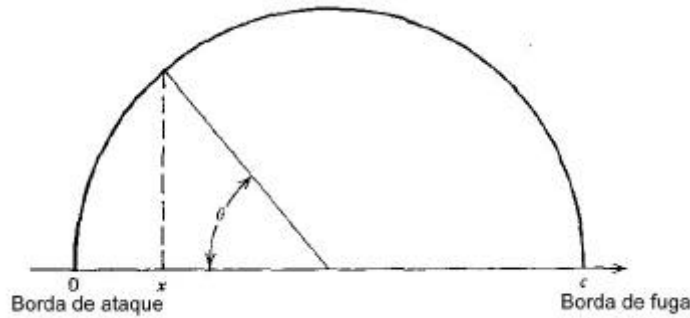


Figura 4.28 Gráfico de  $x = \frac{1}{2}c(1 - \cos q)$ .

#### 4.8 Aerofólio de placa plana (ou aerofólio simétrico)

A distribuição que deve satisfazer as equações (4.29) e (4.35) será encontrada para o caso  $dz/dx = 0$ . Isto corresponde ao caso de aerofólio simétrico ou um no qual a linha de corda e a linha de arqueamento médio são coincidentes. É conveniente mudar as coordenadas como está na figura 4.28 ou seja

$$x = \frac{1}{2}c(1 - \cos q)$$

onde  $c$  é a corda do aerofólio,  $\theta$  é a variável independente e  $\theta_0$  correspondente à  $x_0$ . Assim as condições a serem satisfeitas, das equações (4.29) e (4.35)

$$\left. \begin{aligned} g(p) &= 0 \\ \frac{1}{2p} \int_0^c \frac{\sin q \, dq}{\cos q - \cos q_0} &= V_\infty a \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Pode ser verificado que a distribuição  $\gamma$  que vai satisfazer a equação (4.36) é

$$g = 2aV_\infty \frac{1 + \cos q}{\sin q} \quad (4.37)$$

Para verificar que a equação (4.37) satisfaz a segunda condição da equação (4.36), é necessário mostrar que

$$\int_0^p \frac{1 + \cos q}{\sin q - \cos q_0} dq = p$$

Isto pode ser realizado usando a integral definida

$$\int_0^p \frac{\cos nq}{\sin q - \cos q_0} dq = p \frac{\sin nq_0}{\sin q_0} \quad (4.38)$$

Quando  $n = 1$ , a equação (4.37) satisfaz a segunda parte da equação (4.36).

Em termos de  $x$ , a equação (4.37) fica:

$$g = 2aV_\infty \sqrt{\frac{c-x}{x}} \quad (4.37-a)$$

A sustentação por unidade de área numa dada locação é dada por

$$Dp = rV_{\infty}g \quad (4.39)$$

e é numericamente igual a diferença de pressão entre as superfícies superior e inferior no ponto, usando

a equação  $C_p = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} r V_{\infty}^2} = 1 - \left( \frac{V}{V_{\infty}} \right)^2$ . mostra  $C_{pL}$  e  $C_{pU}$  para aerofólio NACA 0012.

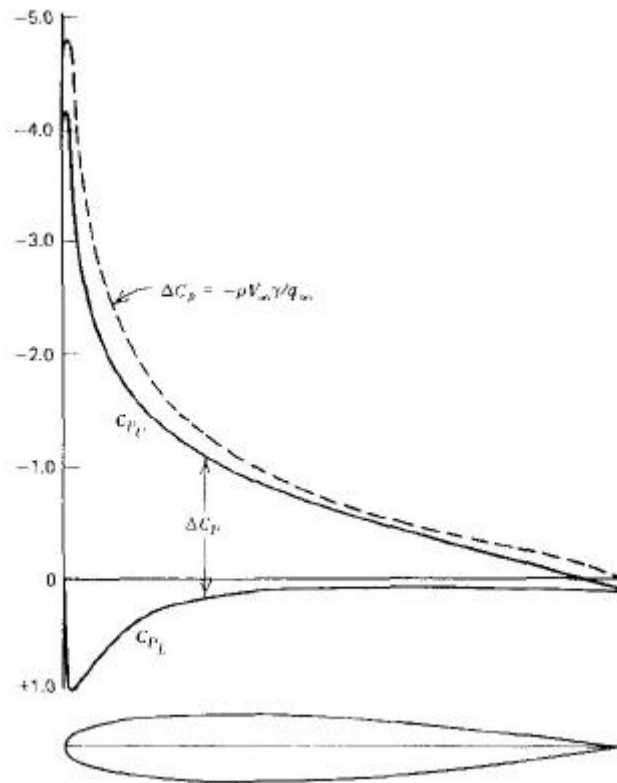


Figura 4.29 Distribuição de coeficiente de pressão e  $\Delta C_p$  sobre o NACA 0012 com  $\alpha = 9^\circ$ ..

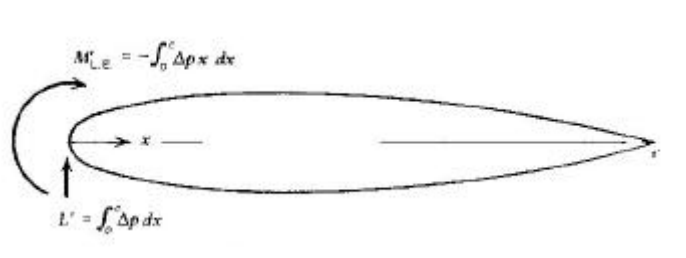


Figura 4.30 Sistema de carga sobre um aerofólio.

A figura 4.29 mostra a distribuição de pressão ao longo da corda.

$$DC_p = \frac{P_u - P_L}{\frac{1}{2} r V_{\infty}^2} = -\frac{Dp}{\frac{1}{2} r V_{\infty}^2} = -\frac{Dp}{q_{\infty}}$$

A sustentação por unidade de envergadura  $L'$  é:

$$L' = \int_0^c Dp dx = rV_\infty \int_0^c g dx \quad (4.40)$$

e para a distribuição da equação (4.37),

$$L' = rV_\infty \int_0^p 2aV_\infty \frac{1 + \cos q}{\sin q} \frac{c}{2} \sin q dq \quad (4.41)$$

O coeficiente de sustentação seccional é

$$c_l = L' / q_\infty c \quad (4.42)$$

ou

$$c_l = 2pa = m_0 a \quad (4.43)$$

tomado positivo como está representado na figura 4.30, onde  $m_0$  é a inclinação da curva entre  $c_l$  e  $\alpha$

O momento da sustentação em torno do ponto de ataque do aerofólio

$$M'_{LE} = - \int_0^c Dp x dx$$

O coeficiente de momento da secção

$$c_{m_{LE}} = M'_{LE} / q_\infty c^2$$

$$= - \frac{pa}{2}$$

ou em termo de coeficiente de sustentação

$$c_{m_{LE}} = - \frac{c_l}{4} \quad (4.44)$$

centro de pressão da força é definido como sendo o ponto em torno do qual o momento é nulo. Se considerar a sustentação considerada na ponte, seu momento balanceia  $M'_{LE}$ , assim

$$M'_{LE} + L' x_{cp} = 0$$

e pelo uso das equações (4.43) e (4.44)

$$x_{cp} = c / 4 \quad (4.45)$$

para todos os ângulos de ataque.

#### 4.9 A distribuição de vorticidade e as forças sobre um aerofólio com arqueamento

O método de determinar as propriedades de aerofólio com arqueamento é essencialmente o mesmo usado para aerofólio simétrico da linha de arqueamento médio, os cálculos são mais complicados. Novamente o ponto central do problema é de encontrar a distribuição de vorticidade  $\gamma$  que satisfaz as equações (4.29) e (4.35).

Usando a transformação entre  $x$  e  $\theta$ ,

$$x = \frac{1}{2} c (1 - \cos q)$$

as equações (4.24) e (4.35) ficam

$$g(p) = 0 \quad (4.46)$$

$$\frac{1}{2p} \int_0^p \frac{g \sin q dq}{\cos q - \cos q_0} = V_\infty \left[ a - \left( \frac{dz}{dx} \right)_0 \right] \quad (4.47)$$

A distribuição de  $\gamma$  que satisfaz a equação (4.47) pode ser representada pela soma de duas partes; uma parte envolve a forma da linha de arqueamento médio e o ângulo de ataque e tem a forma de  $\gamma$  para aerofólio simétrico como está na equação (4.37).

A segunda parte pode ser escrita como:

$$2V_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nq$$

A distribuição total de  $\gamma$  é a soma das duas partes

$$\mathbf{g} = 2V_{\infty} \left[ A_0 \frac{1 + \cos q}{\sin q} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nq \right] \quad (4.48)$$

Quando  $\theta = \pi$ ,  $\gamma = 0$  para todos os coeficientes, a equação (4.46) é satisfeita. Resta apenas achar os valores de  $A_0$  e  $A_n$  que faz com que a equação (4.48) satisfaça a equação (4.47). Substituindo a equação (4.48) na equação (4.47) temos

$$\frac{1}{p} \int_0^p \frac{A_0(1 + \cos q)}{\cos q - \cos q_0} dq + \frac{1}{p} \int_0^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sin nq \sin q}{\cos q - \cos q_0} dq = \mathbf{a} - \left( \frac{dz}{dx} \right)_0 \quad (4.49)$$

Resolvendo a integração temos:

$$\frac{dz}{dx} = (\mathbf{a} - A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nq \quad (4.50)$$

Para uma dada linha de arqueamento médio,  $dz/dx$  é uma função de  $\theta$  e os valores de  $A_0$  e  $A_n$  podem ser escritos como:

$$A_0 = \mathbf{a} - \frac{1}{p} \int_0^p \frac{dz}{dx} dq \quad (4.51)$$

$$A_n = \frac{2}{p} \int_0^p \frac{dz}{dx} \cos nq dq \quad (4.52)$$

As equações (4.48), (4.51) e (4.52) determinam a distribuição  $\gamma$  para aerofólio com arqueamento em termos de ângulo  $\gamma$  e a forma de linha de arqueamento médio. Para arqueamento = 0,  $A_0 = \alpha$  e  $A_n = 0$  e a equação (4.48) fica

$$\mathbf{g} = 2V_{\infty} \mathbf{a} \frac{1 + \cos q}{\sin q}$$

#### 4.9.1 Propriedades de aerofólio com arqueamento

Os coeficientes de sustentação e momento são obtidos do mesmo modo como no caso de aerofólio simétrico.

$$c_l = \frac{1}{q_{\infty} c} \int_0^c Dp dx = 2pA_0 + pA_1 \quad (4.53)$$

$$c_{m_{LE}} = -\frac{1}{q_{\infty} c^2} \int_0^c \Delta p x dx = -\frac{p}{2} (A_0 + A_1 - \frac{1}{2} A_2) \quad (4.54)$$

ou

$$c_{m_{LE}} = -\frac{1}{4} c_l + \frac{p}{4} (A_2 - A_1) \quad (4.55)$$

A posição do centro de pressão é obtida pela divisão do momento em torno de borda de ataque pela sustentação

$$x_{cp} = \frac{c}{4} - \frac{pc}{4} \left( \frac{A_2 - A_1}{c_l} \right) \quad (4.56)$$

Da equação (4.52) os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  são independentes de ângulo de ataque e dependem somente da forma da linha de arqueamento médio. A equação (4.56) mostra que a posição do centro da pressão varia conforme a variação de coeficiente de sustentação. A linha de ação de sustentação e seu valor devem ser especificados para cada ângulo de ataque.

Pode-se observar na equação (4.55) que, se a carga é transferida a um ponto após a borda de ataque por uma distância igual à 25% da corda, o coeficiente de momento em torno deste ponto será independente de ângulo de ataque



$$c_{m_{c/4}} = \frac{p}{4} (A_2 - A_1) \quad (4.57)$$

O sistema de cargas equivalentes para as três posições da borda de ataque, ponto de  $1/4$  corda e o centro de pressão são mostrados na figura 4.31. Observe que  $M'_{c/4}$  é dependente somente da geometria da secção e que  $M'_{cp} = 0$  mas a localização do  $cp = M'_{LE} / L'$  pode variar entre  $\pm\infty$  a medida que a sustentação varia.

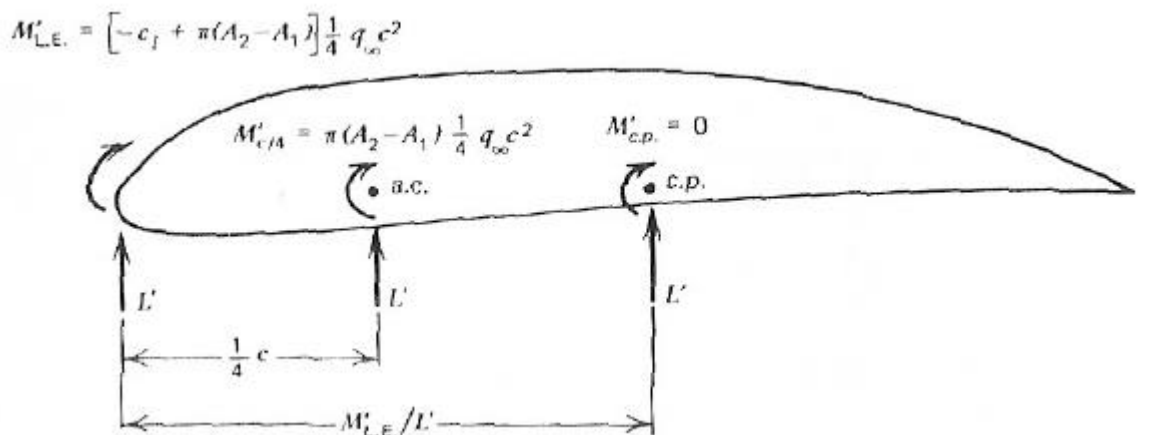


Figura 4.31 Sistemas de cargas equivalentes relativas a borda de ataque, centro aerodinâmico e centro de pressão.

O sistema de carga é usualmente especificado como sustentação e um momento constante atuando no ponto de  $c/4$ . O ponto em torno do qual o coeficiente de momento é independente do ângulo de ataque é chamado de centro aerodinâmico da secção e o coeficiente de momento em torno do centro aerodinâmico é  $c_{mac}$ .

Sendo que este momento é constante para todos os ângulos de ataque incluindo o ângulo de zero sustentação, é freqüentemente chamado de momento de zero sustentação. Um momento na ausência da força resultante é chamado torque e assim o momento de sustentação nula pode ser chamado de torque. Conforme a teoria de aerofólio fino, o centro aerodinâmico é no ponto de  $c/4$  e o coeficiente de momento em torno do centro aerodinâmico é dado pela equação (4.57), assim:

$$c_{mac} = \frac{1}{2} \int_0^p \frac{dz}{dx} (\cos 2q - \cos q) dq \quad (4.58)$$

Para aerofólios simétricos  $c_{mac} = 0$

O coeficiente de sustentação  $c_l$

$$c_l = 2p \left[ a + \frac{1}{p} \int_0^p \frac{dz}{dx} (\cos q - 1) dq \right] \quad (4.59)$$

O coeficiente de sustentação varia linearmente com o ângulo de ataque geométrico e a inclinação de sustentação  $m_0$  é  $2p$ , conforme a figura 4.32. O coeficiente de sustentação, entretanto não é zero quando o ângulo de ataque geométrico é zero, como no caso de aerofólio simétrico. O valor de ângulo de ataque que torna a sustentação nula é chamado de ângulo de sustentação zero,  $a_{Lo}$ . Da equação (4.59):

$$a_{Lo} = -\frac{1}{p} \int_0^p \frac{dz}{dx} (\cos q - 1) dq \quad (4.60)$$

Os resultados experimentais da figura 4.32 mostram uma boa concordância com estas equações baseadas na teoria de aerofólio fino. Os experimentos foram realizados sobre um aerofólio simétrico

NACA 0009 de 9% de espessura máxima e com aerofólio assimétrico NACA 2408 com arqueamento máximo de 2% localizado a  $x = 0,4$  c e uma espessura máxima de 8%. Desta comparação podem-se salientar os seguintes pontos é:

- i – A curva de  $C_\ell$  em função de  $\alpha$  mostra que  $dC_\ell/d\alpha = 2\pi$  concordando com as equações teóricas apresentadas na faixa de  $-10 < \alpha < 10^\circ$ ;
- ii – Quando a curva  $C_\ell$  diverge da variação linear, o aerofólio estola e a teoria torna-se inválida;
- iii – O centro aerodinâmico e o centro de pressão coincidem na seção simétrica (não faixa sem estol), como pode ser observado da equação  $c_{m_{c/4}} = 0$ ;
- iv – Para arqueamento positivo  $c_{m_{c/4}} = \text{constante}$  é negativo, conforme a equação (4.57);
- v – O ângulo de sustentação zero  $\alpha_{L0}$  é zero para a seção simétrica e é negativo para o arqueamento positivo, como indicado pela equação (4.60).

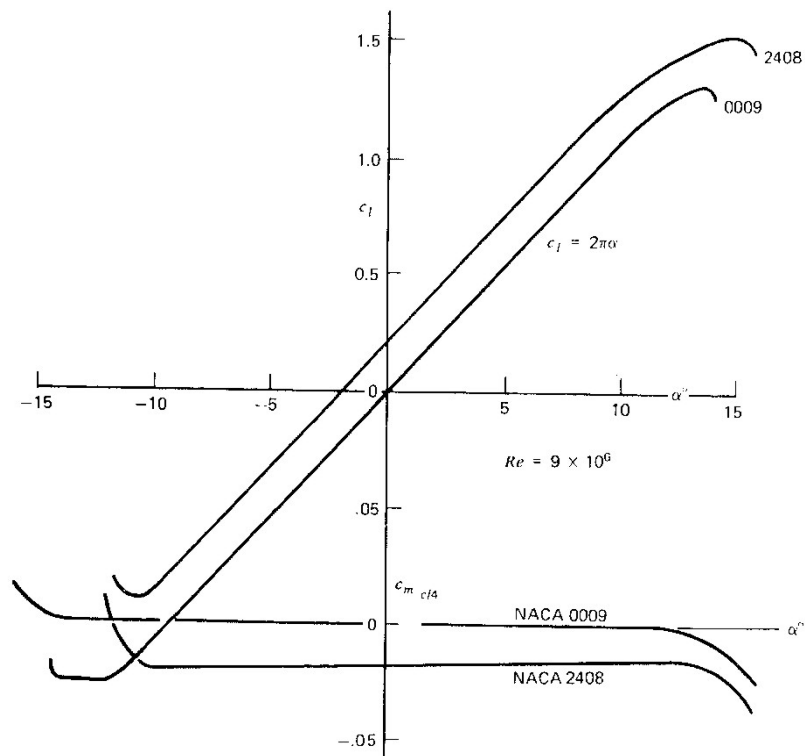


Figura 4.32 Características dos aerofólios NACA 0009 e 2408.

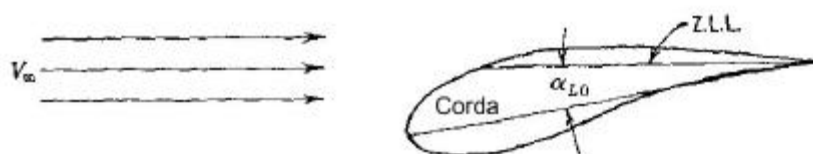


Figura 4.33 Orientação de sustentação zero.



Figura 4.34 Ângulo de ataque absoluto.

Na figura 4.33 é mostrado um aerofólio colocado a um ângulo de ataque igual ao ângulo de sustentação nula. Uma linha sobre o aerofólio paralelo à linha de vôo  $V_\infty$  e passando pela borda de fuga quando o aerofólio na orientação de sustentação zero é chamado de linha de sustentação zero do aerofólio. Para aerofólios simétricos a linha de sustentação zero coincide com a linha de corda. O ângulo de ataque absoluto é definido com o ângulo de ataque incluído entre a direção de vôo e a linha de sustentação nula e é representado pelo símbolo  $\alpha_a$ . Da figura 4.34.

$$\alpha_a = \alpha - \alpha_{L0} \quad (4.61)$$

O sinal negativo ocorre pelo fato que  $\alpha_{L0}$  é número negativo nos aerofólios comuns. Das equações (4.60) e (4.61), o ângulo de ataque absoluto é:

$$\alpha_a = \alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^p \frac{dz}{dx} (\cos q - 1) dq \quad (4.62)$$

Assim, da equação (4.59):

$$C_\ell = 2\pi \alpha_a \quad (4.63)$$

A última equação mostra que o centro de pressão está na meio corda quando o ângulo de ataque é zero, e desloca na direção do centro aerodinâmico à medida que  $\alpha$  ou  $C_\ell$  aumenta.

Uma comparação quantitativa entre os testes experimentais e a dependência teórica do coeficiente de momento em torno do centro aerodinâmico ( $c_{mac}$ ) sobre o valor máximo do arqueamento médio e a sua posição para os aerofólios NACA de cinco dígitos é mostrado na figura 4.35. Os perfis com linhas médias “reflexed” foram calculados para valores zero de  $c_{mac}$  a comparação mostra uma boa concordância. Valores experimentais representativos daqueles perfis que são dependentes do escoamento potencial estão tabulados na tabela 4.1. Pode-se observar que a inclinação da curva de sustentação e a posição do centro aerodinâmico podem ser previstos pela teoria de aerofólio fino, a variação do ângulo de sustentação nula e o coeficiente de momento em torno do centro aerodinâmico com a forma do perfil também segue a previsão da teoria de aerofólio fino.

As características dos aerofólios simétricos ( $dz/dx = 0$ ) e com arqueamento podem ser resumidos:

a)  $m_o = 2\pi$

b)  $\alpha_{L0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^p (dz/dx)(\cos 2q - \cos q) dq$

centro aerodinâmico é  $c/4$  após a borda de ataque

c)  $c_{mac} = c_{m_{c/4}} = \frac{1}{2} \int_0^p (dz/dx)(\cos 2q - \cos q) dq$

centro de pressão, equação (4.56) é no  $x = c/4$  para aerofólio simétrico ( $A_2 = A_1 = 0$ ) e varia com  $cl$  para aerofólio com arqueamento.

Tabela 4.1 Valores experimentais representativos das características de aerofólios NACA.

Perfil do aerofólio	$\frac{m_g}{2\pi}$	$\alpha_{Lo}$ Graus	Posição do ac após borda de ataque	$c_{mac}$
0009	0.995	0	0.25	0
2412	0.985	-1.9	0.243	-0.05
2415	0.97	-1.9	0.246	-0.05
2418	0.935	-1.85	0.242	-0.05
2421	0.925	-1.85	0.239	-0.045
2424	0.895	-1.8	0.228	-0.04
4412	0.985	-3.9	0.246	-0.095
23012	0.985	-1.2	0.241	-0.015
64 <sub>s</sub> - 418	1.06	-2.9	0.271	-0.07
65 <sub>s</sub> - 418	1.03	-2.5	0.266	-0.06
66 <sub>s</sub> - 418	1.00	-2.5	0.264	-0.065

**Exemplo 4.1:**

Determine a linha de arqueamento cúbico que resulta num momento de guinada em torno do ponto de  $1/4$  corda de valor nulo.

**Solução:**

A equação genérica cúbica pode ser escrita como

$$y = a'x(x+b')(x+d')$$

com a origem na borda de ataque.

Por conveniência adota-se as novas variáveis

$$x_1 = x/c \text{ e } y_1 = y/d, \text{ onde } d \text{ é o arqueamento.}$$

As condições que devem ser satisfeitas são

- (i)  $y=0$  quando  $x=0$ ,  $y_1 = x_1 = 0$ ;
- (ii)  $y=0$  quando  $x=c$ ,  $y_1=0$ ,  $x_1=1$ ;
- (iii)  $dy/dx=0$  quando  $y=d$ ,  $dy_1/dx_1=0$  quando  $y_1=1$ ;

$$C_{M_{1/4}} = 0, \text{ isto é, } A_1 - A_2 = 0.$$

Em termos das novas variáveis a equação de arqueamento torna se

$$y_1 = ax_1(x_1+b)(x_1+d) \quad (1)$$

Para satisfazer a condição (ii)

$$(x_1+d)=0 \text{ quando } x_1=1, \text{ assim } d=-1. \text{ Assim}$$

$$y_1 = a x_1(x_1+b)(x_1-1) \quad (2)$$

$$\text{ou } y_1 = a x_1^3 + a(b-1)x_1^2 - a b x_1 \quad (3)$$

Diferenciando (2.93) para satisfazer (iii)

$$\frac{dy_1}{dx_1} = 3a x_1^2 + 2a(b-1)x_1 - ab = 0 \text{ quando } y_1 = 1 \quad (4)$$

Se  $x_0$  corresponde ao valor de  $x_1$  quando  $y_1=1$ , isto é, no ponto de deslocamento máximo da corda as duas equações simultâneas são:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= a x_0^3 + a(b-1)x_0^2 - ab x_0 \\ 0 &= 3a x_0^2 + 2a(b-1)x_0 - ab \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Para satisfazer a condição 0  $A_1$  e  $A_2$  devem ser determinados, assim  $dy_1/dx_1$  pode ser convertida para expressões adequadas para substituir nas equações

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{c}{2}(1 - \cos \mathbf{q}) \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{c}{2}(1 - \cos \mathbf{q}) \\
 \frac{dy_1}{dx_1} &= \frac{3}{4}a(1 - 2\cos \mathbf{q} + \cos^2 \mathbf{q}) + a(b-1) - a(b-1)\cos \mathbf{q} - ab \\
 &= \frac{3}{4}a\cos^2 \mathbf{q} - \left(\frac{a}{2} + ab\right)\cos \mathbf{q} - \frac{a}{4}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Da equação (2.73)

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{2}{\mathbf{p}} \int_0^{\mathbf{p}} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cos \mathbf{q} \, d\mathbf{q} = \frac{2}{\mathbf{p}} \int_0^{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{d}}{c} \frac{dy_1}{dx_1} \cos \mathbf{q} \, d\mathbf{q} \\
 &= \frac{2}{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{d}}{c} \int_0^{\mathbf{p}} \left[ \frac{3}{4}a\cos^3 \mathbf{q} - \left(\frac{a}{2} + ab\right)\cos^2 \mathbf{q} - \frac{a}{4}\cos \mathbf{q} \right] d\mathbf{q} \\
 \text{ou} \quad A_1 &= -\left(\frac{a}{2} + ab\right) \frac{\mathbf{d}}{c}.
 \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{2}{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{d}}{c} \int_0^{\mathbf{p}} \frac{dy_1}{dx_1} \cos 2\mathbf{q} \, d\mathbf{q} \\
 &= \frac{2}{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{d}}{c} \int_0^{\mathbf{p}} \frac{dy_1}{dx_1} (2\cos^2 \mathbf{q} - 1) \, d\mathbf{q} \\
 &= \frac{3}{8} \frac{\mathbf{d}}{c} a
 \end{aligned}$$

Para satisfazer 0,  $A_1 = A_2$  ou

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{a}{2} + ab\right) \frac{\mathbf{d}}{c} &= a \frac{3}{8} \frac{\mathbf{d}}{c} \\
 \text{ou} \quad b &= -\frac{7}{8}
 \end{aligned} \tag{7}$$

e

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{-2(b-1) \pm \sqrt{2^2(b-1)^2 + 4 \times 3b}}{6} \\
 &= \frac{1-b \pm \sqrt{b^2 + b + 1}}{3}
 \end{aligned}$$

Mas  $b = -7/8$ . Assim

$$x_0 = \frac{22,55}{24} \quad \text{ou} \quad \frac{7,45}{24}.$$

Considerando o ponto  $(7,45/24)$  pelo fato de que o outro ponto é um ponto de inflexão perto do borda de fuga,  $y = \mathbf{d}$ , quando  $x = 0,31 \times \text{corda}$ . Substituindo  $x = 0,31$  temos  $a = 1/0,121 = 8,28$ .

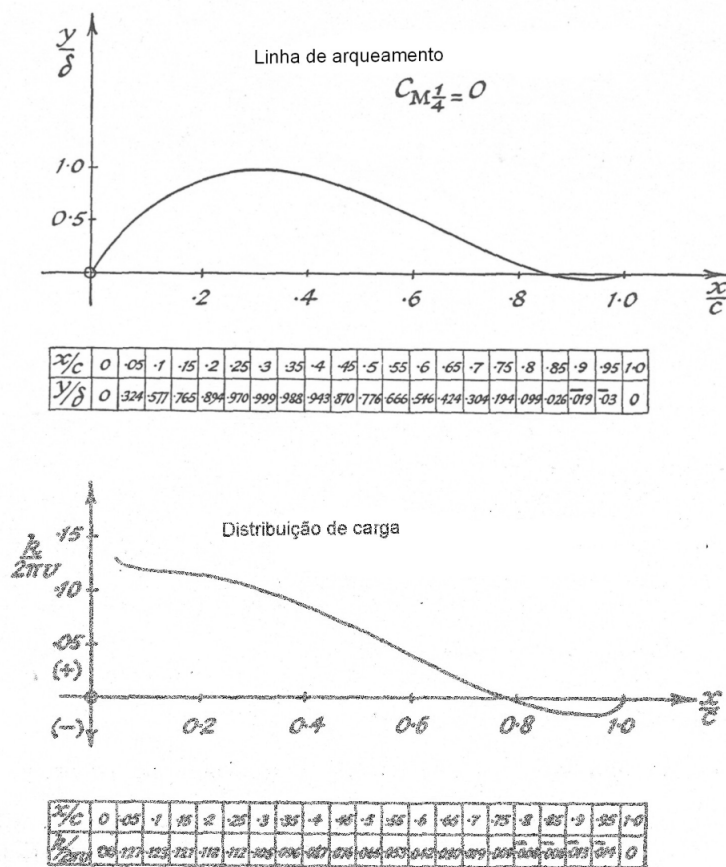


Figura (a) do exemplo 4.1 mostrando a distribuição de carga e perfil da linha de arqueamento.

A equação da linha de arqueamento é

$$y = 8,28 d x(x - 7/8)(x - 1) \text{ ou}$$

$$y = 8,28 d \left( x^3 - \frac{15}{8} x^2 + \frac{7}{8} x \right) \quad (8)$$

Esta equação é graficada na figura 4a que apresenta também as tabelas com as ordenadas.

Da equação do coeficiente  $A_0$  temos

$$\begin{aligned} A_0 &= a - \frac{1}{p} \int_0^p \frac{dy}{dx} dq = a - \frac{1}{p} \frac{d}{c} \int_0^p \frac{dy_1}{dx_1} dq \\ &= a - \frac{1}{p} \frac{d}{c} \int_0^p \left[ \frac{3}{4} a \cos^2 q - \left( \frac{a}{2} + ab \right) \cos q - \frac{a}{4} \right] dq \\ A_0 &= a - \frac{d}{c} \frac{a}{8} \end{aligned} \quad (9)$$

$$C_\ell = 2p \left[ a - \frac{a}{8} \frac{d}{c} - \left( \frac{a}{2} + ab \right) \frac{d}{c} \right]$$

$$\text{ou } C_\ell = 2p(a + 2,07 d/c)$$

onde o ângulo de zero sustentação é  $a_0$

$$a_0 = -(2,07d/c) \text{ radianos}$$

ou com  $b = 100d/c$

$$a_0 = -1,2b \text{ graus.}$$

A distribuição de carga é

$$k = 2U \left[ \left( a - \frac{1,04d}{c} \right) \frac{1 + \cos q}{\sin q} + \frac{3,12d}{c} \sin q + \frac{3,12d}{c} \sin 2q \right]$$

Foi calculada esta distribuição para  $a = 29,6d/c$  e o resultado é mostrado na figura 4a.

O valor na borda de ataque foi omitido por ser infinito por causa do termo  $\left[ A_0 \frac{1 + \cos q}{\sin q} \right]$  sendo infinito quando  $q = 0$ . Quando  $a = \frac{a}{8} \frac{d}{c} = 1,04 \frac{d}{c}$ ,  $A_0$  é zero e o termo  $\left[ A_0 \frac{1 + \cos q}{\sin q} \right]$  é zero. Assim a intensidade da circulação na borda de ataque é zero, e o escoamento escoava suavemente sobre a linha de arqueamento na borda de ataque, sendo a borda de ataque um ponto de estagnação. Esta é a condição de Theodorsen e o valor de  $C_\ell$  correspondente é o valor ótimo ou valor de projeto,  $C_{\ell \text{ ótimo}}$ .

#### Exemplo 4.2:

Um aerofólio tem sua linha de arqueamento definida pela equação  $y = kx(x-1)(x-2)$  onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas expressas em unidades de corda e a origem é na borda de ataque. Se o arqueamento máximo é 2% da corda, determine o coeficiente de momento de guinada para uma incidência de  $3^\circ$ .

#### Solução:

Se  $(x_0, d)$  é o ponto de arqueamento máximo temos duas equações

$$d = kx_0(x_0 - 1)(x_0 - 2) = 0,02 \quad (a)$$

$$\frac{dy}{dx} = k[3x_0^2 - 6x_0 + 2] = 0 \quad (b)$$

Da equação (b)

$$x_0 = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = 1 \pm 0,578 = 0,4225$$

Substituindo na equação (a)

$$\frac{0,02}{k} = 0,4225x - 0,578x - 1,578 = 0,385$$

ou  $k = 0,0520$ . Substituindo  $x = \frac{1}{2}(1 - \cos q)$ , assim

$$\frac{dy}{dx} = k \left[ \frac{3}{4}(1 - \cos q)^2 - \frac{6}{2}(1 - \cos q) + 2 \right]$$

$$= \frac{k}{4} [3\cos^2 q + 6\cos q - 1]$$

$$A_0 = a - \frac{1}{p} \int_0^p \frac{dy}{dx} dq = a - \frac{1}{p} \int_0^p \frac{k}{4} (3\cos^2 q + 6\cos q - 1) dq$$

$$A_0 = a - \frac{k}{8}$$

$$A_1 = \frac{2}{p} \int_0^p \frac{dy}{dx} \cos q \, dq = \frac{2}{p} \int_0^p \frac{k}{4} (3 \cos^3 q + 6 \cos^2 q - \cos q) \, dq$$

$$A_1 = \frac{3}{2} k$$

$$A_2 = \frac{2}{p} \int_0^p \frac{dy}{dx} \cos 2q \, dq = \frac{2}{p} \int_0^p \frac{k}{4} (3 \cos^2 q \cos 2q + 6 \cos q \cos 2q - \cos 2q) \, dq$$

$$A_2 = \frac{3}{8} k$$

$$C_\ell = 2p \left[ A_0 + \frac{A_1}{2} \right] = 2p \left[ a - \frac{k}{8} + \frac{3}{4} k \right]$$

com  $a = \frac{3}{51,3} \text{ rad}$  e  $k = 0,052$ . Assim

$$C_\ell = 0,535$$

$$C_{M \gamma_4} = -\frac{p}{4} (A_1 - A_2) = -\frac{p}{4} \left( \frac{9}{8} \times 0,052 \right)$$

$$C_{M \gamma_4} = -0,046$$

#### Exemplo 4.3:

Considere o aerofólio NACA 2412 com corda de 0,64m num escoamento de ar ao nível do mar. A velocidade de escoamento é 70 m/s. A sustentação por unidade de envergadura é 1254 N/m. Calcule o ângulo de ataque e o arrasto por unidade de envergadura.

#### Solução:

Ao nível do mar,  $\rho = 1,23 \text{ Kg} / \text{m}^3$

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = \frac{1}{2} (1,23) (70)^2 = 3013,5 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$C_l = \frac{L'}{q_\infty S} = \frac{1254}{(3013,5)(0,64)} = 0,65$$

Da figura (a), para  $C_l = 0,65$ ,  $\alpha = 4^\circ$ .

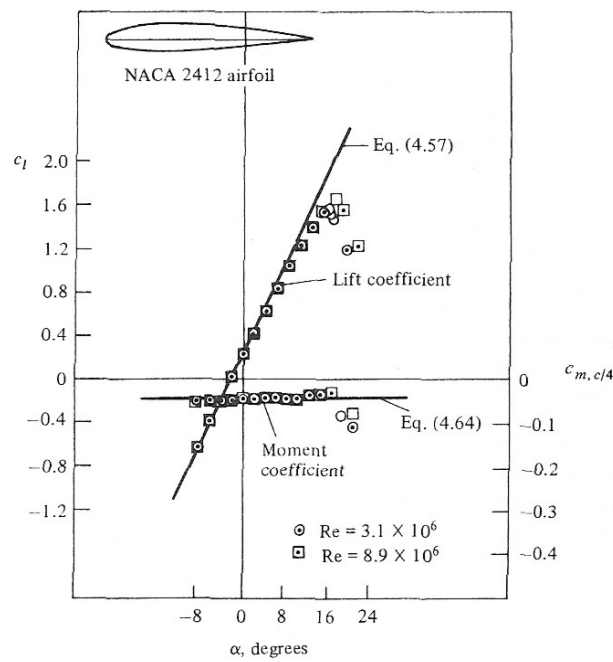
Para determinar o arrasto por unidade de envergadura, use os dados da figura (b) Entretanto, sendo que  $c_d = f(\text{Re})$ , calcule Re,  $\mu = 1,789 \times 10^{-5} \text{ Kg} / (\text{m.s})$ . Assim,

$$\text{Re} = \frac{\rho V_\infty \cdot c}{\mu} = \frac{1,23(70)(0,64)}{1,789 \times 10^{-5}} = 3,08 \times 10^5$$

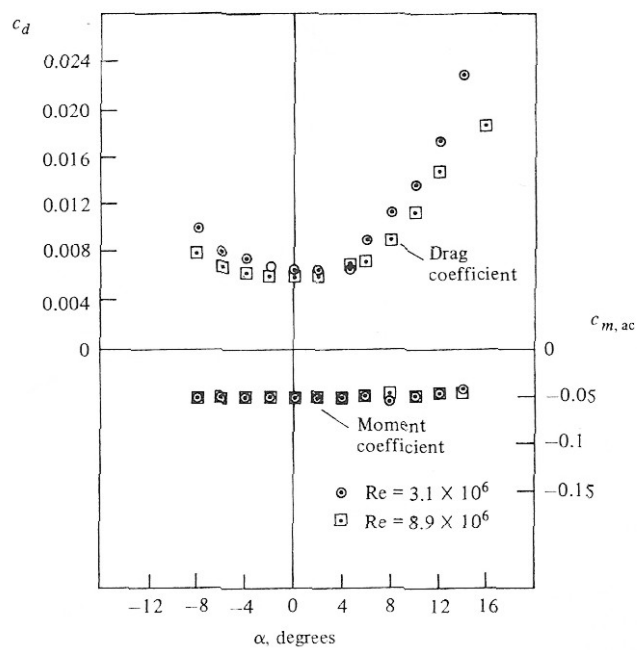
Então, da figura 4.6 para  $\text{Re} = 3,08 \times 10^5$ , obtém-se  $c_d = 0,0068$ . Assim,

$$D' = q_\infty S c_d = 3013,5(0,64)(0,0068) = 13,1 \text{ N} / \text{m}$$





Dados experimentais dos coeficientes de sustentação e momento do aerofólio NACA 2412. Figura (a) para exemplo 4.3.



Dados dos coeficientes de arrasto de perfil momento em torno do centro aerodinâmico do aerofólio NACA 2412. Figura (b) para exemplo 4.3.

**Exemplo 4.4:**

Considere o aerofólio NACA 23012. A linha média de arqueamento é dada por:

$$z/c = 2,6595 \left[ (x/c)^3 - 0,6075(x/c)^2 + 0,1147(x/c) \right] \quad \text{para } 0 \leq x/c \leq 0,2025$$

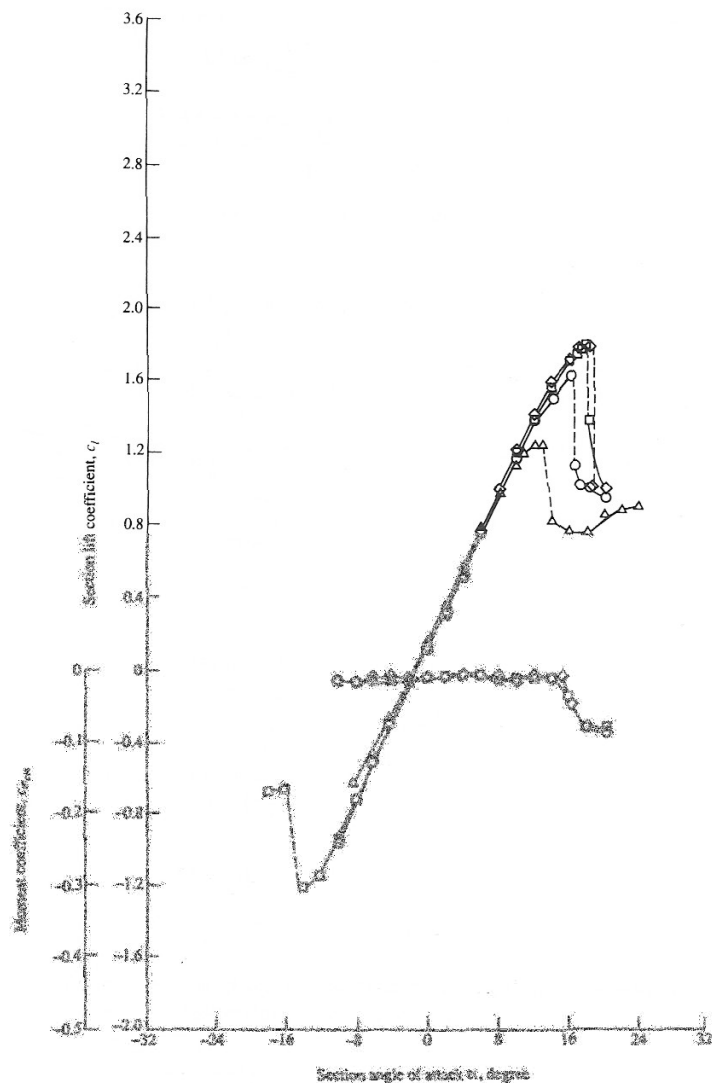
e

$$z/c = 0,02208(1 - (x/c)) \quad \text{para } 0,2025 \leq (x/c) \leq 1,0$$

Calcule:

- O ângulo de ataque para sustentação zero;
- O coeficiente de sustentação quando  $\alpha = 4^\circ$ ;
- O coeficiente do momento em torno do ponto de  $c/4$ ;
- A localização do centro de pressão em termos de  $x_{cp}/c$  quando  $\alpha = 4^\circ$ .

Compare os resultados com os dados experimentais.



Dados experimentais dos coeficientes de sustentação e momento para comparação com os cálculos do exemplo 4.4. Figura (a) para exemplo 4.4.

**Solução:**

Da equação da linha de arqueamento pode se obter  $(dz/dx)$ ,

$$z/c = 2,6595 \left[ (x/c)^3 - 0,6075(x/c)^2 + 0,1147(x/c) \right] \quad \text{para} \quad 0 \leq x/c \leq 0,2025$$

e

$$\frac{dz}{dx} = -0,02208 \quad \text{para} \quad 0,2025 \leq x/c \leq 1,0$$

Transformando x para  $q$ ,

$$x = (c/2)(1 - \cos q), \text{ assim,}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= 2,6595 \left[ \frac{3}{4}(1 - 2\cos q + \cos^2 q) - 0,6075(1 - \cos q) + 0,1147 \right] \\ &= 0,6840 - 2,3736 \cos q + 1,995 \cos^2 q \quad \text{para} \quad 0 \leq q \leq 0,9335 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dx} = -0,02208 \quad \text{para} \quad 0,933 \leq q \leq p$$

a) Da equação:

$$a_{L=0} = -\frac{1}{p} \int_0^p \frac{dz}{dx} (\cos q - 1) dq$$

Substituindo a equação de  $dz/dx$  na equação  $a_{L=0}$ , temos:

$$\begin{aligned} a_{L=0} &= -\frac{1}{p} \int_0^{0,9335} (-0,6840 + 3,05676 \cos q - 4,3686 \cos^2 q + 1,995 \cos^3 q) dq \\ &\quad - \frac{1}{p} \int_{0,9335}^p (0,02208 - 0,02208 \cos q) dq \\ a_{L=0} &= -\frac{1}{p} \int_0^{0,9335} [-2,8683 q + 3,05676 \sin q - 2,1843 \sin q \cos q + 0,665 \sin q (\cos^2 q + 2)] dq \\ &\quad - \frac{1}{p} [0,02208 q - 0,02208 \sin q]_{0,9335}^p \end{aligned}$$

Assim,

$$a_{L=0} = -0,0191 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad a_{L=0} = -1,09^\circ$$

$$a = 4^\circ = 0,0698 \text{ rad}.$$

Da equação:

$$C_l = 2p(a - a_{L=0}) = 2p(0,0698 + 0,0191) = 0,559$$

b) O valor de  $C_{m/4}$  é obtido após determinar os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$ . assim,

$$A_1 = \frac{2}{p} \int_0^p \frac{dz}{dx} \cos q dq$$

$$A_1 = \frac{2}{p} \int_0^{0,9335} (0,6840 \cos q - 2,3736 \cos^2 q + 1,995 \cos^3 q) dq$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{P} \int_{0,9335}^P (-0,02208 \cos q) dq \\
& = \frac{2}{P} [0,1322 + 0,0177] = 0,0954 \\
A_2 & = \frac{2}{P} \int_o^P \frac{dz}{dx} \cos 2q dq = \frac{2}{P} \int_o^P \frac{dz}{dx} (2 \cos^2 q - 1) dq \\
A_2 & = \frac{2}{P} (0,11384 + 0,01056) = 0,0792. \text{ Assim,} \\
C_{m^c/4} & = \frac{P}{2} (A_2 - A_1) = \frac{P}{4} (0,0792 - 0,0954) \\
C_{m^c/4} & = -0,0127
\end{aligned}$$

c) A localização do centro de pressão:

$$\begin{aligned}
x_{cp} & = \frac{c}{4} \left[ 1 + \frac{P}{C_l} (A_2 - A_1) \right] \\
& = \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{P}{0,559} (0,0954 - 0,0792) \right] = 0,273
\end{aligned}$$

Comparação com os experimentos. Neste caso, os valores calculados são comparados com os dados medidos apresentados na figura (a).

Parâmetro	Valor calculado	Valor experimental
$\alpha_{L=0}$	-1,09°	-1,1°
$C_l$ (em $\alpha = 4^\circ$ )	0,559	0,55
$C_{m^c/4}$	-0,0127	-0,01

d) Cálculo da posição do centro aerodinâmico, temos os seguintes dados:

$$C_l = 0,55 \quad \text{para} \quad \alpha = 4^\circ$$

$$C_l = 0 \quad \text{para} \quad \alpha = -1,1, \text{ assim a inclinação da curva de sustentação é:}$$

$$\alpha_o = \frac{0,55 - 0}{4 - (-1,1)} = 0,1078 / \text{grau}$$

A inclinação da curva de momento,

$$m_o = \frac{0,005 - (-0,0125)}{4 - (-4)} = 9,375 \times 10^{-4} / \text{grau}$$

O centro aerodinâmico, sua posição é dada por:

$$\bar{x}_{ac} = \frac{m_o}{\alpha_o} + 0,25 = \frac{9,375 \times 10^{-4}}{0,1078} + 0,25 = 0,241$$

Concorda com os valores experimentais de Abbott e Von Doenhoff.

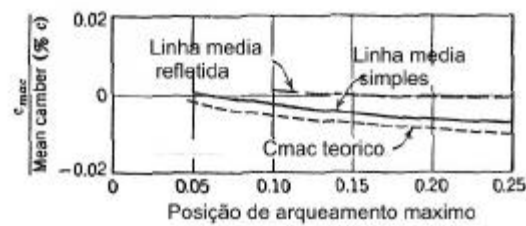


Figura 4.35 Efeito do arqueamento sobre  $C_{m\acute{a}x}$ ; Comparação teórica e experimental.

**Exemplo 4.5:**

Considere um aerofólio cuja linha média de arqueamento é dada pela parábola:

$$z = 4z_m \left( \frac{x}{c} - \left( \frac{x}{c} \right)^2 \right)$$

onde  $z_m$  é a altura máxima do arqueamento na meio-corda. Para este caso determine os coeficientes aerodinâmicos relevantes.

**Solução:**

A inclinação da linha de arqueamento é:

$$\frac{dz}{dx} = 4 \frac{z_m}{c} \left( 1 - 2 \frac{x}{c} \right) = 4 \frac{z_m}{c} \cos q$$

Assim, das equações,

$$A_o = a - \frac{1}{p_o} \int \frac{dz}{dx} dq$$

e

$$A_n = \frac{2}{p_o} \int \frac{dz}{dx} \cos nq dq$$

Temos:

$$A_o = a$$

$$A_1 = 4 \frac{z_m}{c}$$

$$A_n = 0 \quad \text{para } n \gg 0$$

Deste modo,

$$a_{Lo} = -2 \frac{z_m}{c}$$

$$C_\ell = 2p \left( a_{Lo} + \frac{2z_m}{c} \right)$$

$$C_{m\ell e} = -\frac{1}{2} p \left( a_{Lo} + \frac{4z_m}{c} \right)$$

$$C_{mac} = -p \frac{4z_m}{c} \quad \text{e} \quad x_{cp} = \frac{\frac{c}{4} + z_m}{\left( 2a + \frac{4z_m}{c} \right)}$$

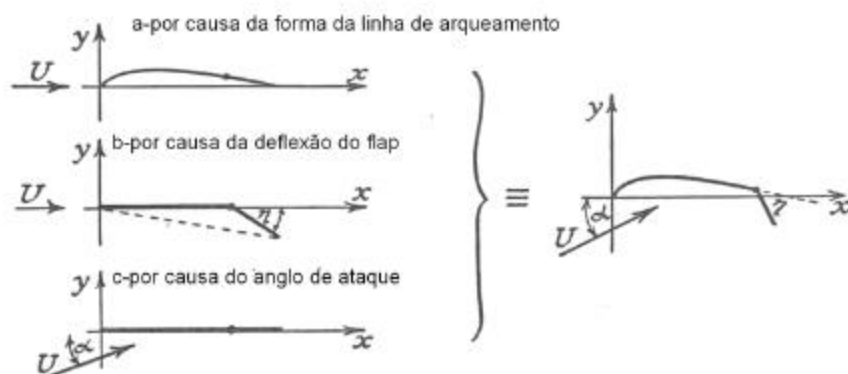


Figura 4.36 Decomposição da sustentação total de um aerofólio com flap.

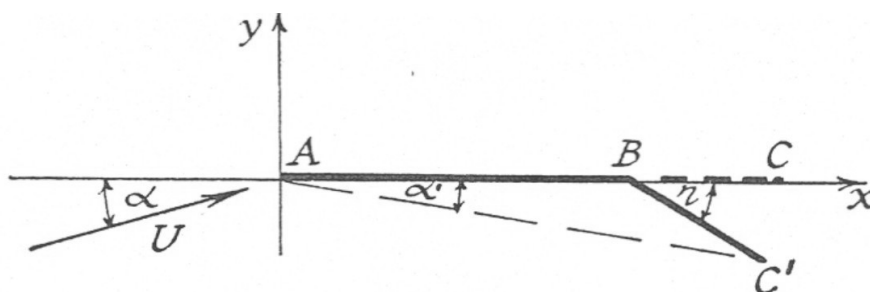


Figura 4.37 Aerofólio tipo placa plana com flap.

#### 4.10 O aerofólio com flap

A teoria do aerofólio fino pode ser facilmente estendida para aerofólios com arqueamento variável como no caso de aerofólio com flap.

A distribuição da circulação ao longo da linha de arqueamento para o caso do aerofólio geral é composta da soma de uma componente representando uma placa plana com incidência e uma componente representando a influência da forma da linha de arqueamento. Conforme a teoria, é possível considerar a influência da deflexão do flap como uma contribuição adicional às duas componentes. A figura 4.36 mostra como as três contribuições podem ser combinadas. O problema é reduzido ao caso geral de determinar a distribuição adequada para representar a linha de arqueamento composta da corda do aerofólio e da corda do flap defletido através de um ângulo  $h$  como está na figura 4.37.

Se a linha de arqueamento é  $ABC'$ , o eixo  $x$  deve ser tomado ao longo da nova corda  $AC'$  que é inclinada à incidência efetiva  $(\alpha + \alpha')$  à direção do vento, como está na figura 4.38.

Com o arqueamento definido como  $hc$  a inclinação da parte  $AB$  do aerofólio é  $h/(1-F)$  e aquele do flap é  $-h/F$ . Para determinar os coeficientes de  $k$  para o arqueamento do flap, substituir estes valores da inclinação nas equações (4.51) e (4.52) mas com os limites de integração confinados às partes do aerofólio sobre as quais estas inclinações se aplicam. Assim

$$A_0 = \alpha + \alpha' - \left\{ \frac{1}{p} \int_0^f \frac{h}{(1-F)} dq + \frac{1}{p} \int_f^p \frac{-h}{F} dq \right\} \quad (4.64)$$

onde  $f$  é o valor de  $q$  no ponto de pivot, isto é,

$$(1-F)c = \frac{c}{2}(1 - \cos f)$$

ou  $\cos f = 2F - 1$ .

Avaliando a integral

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathbf{a} + \mathbf{a}' - \frac{1}{\mathbf{p}} \left[ \frac{h}{1-F} \mathbf{f} - \frac{h}{F} (\mathbf{p} - \mathbf{f}) \right] \\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{a}') + \frac{h}{F} - \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{p}} \left( \frac{h}{1-F} + \frac{h}{F} \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

para valores de  $\mathbf{a}'$  e  $\mathbf{h}$  pequenos para satisfazer a teoria, a figura 4.38 mostra que

$$\mathbf{h} = \mathbf{a}' + \mathbf{g} = \frac{h}{1-F} + \frac{h}{F} \quad (4.66)$$

$$\text{e } \mathbf{a}' + \frac{h}{F} = \mathbf{h} \quad (4.67)$$

que quando substituídos na equação (4.65) temos

$$A_0 = \mathbf{a} + \mathbf{h} - \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{p}} \mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{h} \left( 1 - \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{p}} \right) \quad (4.68)$$

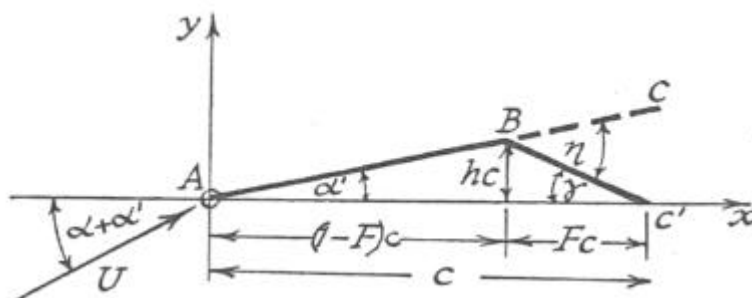


Figura 4.38 Aerofólio de placa plana defletido com o ângulo efetivo considerando o flap.

De forma similar, da equação (4.51)

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\mathbf{p}} \left\{ \int_0^f \frac{h}{1-F} \cos n\mathbf{q} d\mathbf{q} + \int_f^p -\frac{h}{F} \cos n\mathbf{q} d\mathbf{q} \right\} \\ &= \frac{2}{n\mathbf{p}} \left\{ \frac{h}{1-F} \sin n\mathbf{f} - \frac{h}{F} (\sin n\mathbf{p} - \sin n\mathbf{f}) \right\} \\ &= \frac{2}{n\mathbf{p}} \sin n\mathbf{f} \left[ \frac{h}{1-F} - \frac{h}{F} \right] \end{aligned}$$

Assim

$$A_n = \frac{2 \sin n\mathbf{f}}{n\mathbf{p}} \cdot \mathbf{h} \quad (4.69)$$

e

$$A_1 = \frac{2 \sin \mathbf{f}}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{h} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{\sin 2\mathbf{f}}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{h}$$

A distribuição da circulação ao longo da corda por causa da deflexão de flap é

$$k = 2U\mathbf{a} \frac{(1 + \cos \mathbf{q})}{\sin \mathbf{q}} + 2U \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{p}} \right) \frac{(1 + \cos \mathbf{q})}{\sin \mathbf{q}} + \sum_1^{\infty} \frac{2 \sin n\mathbf{f}}{n\mathbf{p}} \sin n\mathbf{q} \right] \cdot \mathbf{h} \quad (4.70)$$

A equação (4.70) mostra que para uma incidência constante a expressão de  $k$  é uma função linear de  $h$ , assim como o coeficiente de sustentação da seção também é, pois da equação (4.53)

$$\begin{aligned} C_\ell &= 2pA_0 + pA_1 \\ C_\ell &= 2pa + 2ph\left(1 - \frac{f}{p}\right) + 2h \operatorname{sen} f \quad \text{ou} \\ C_\ell &= 2pa + 2(p - f + \operatorname{sen} f)h \end{aligned} \quad (4.71)$$

Da mesma forma, o coeficiente  $C_{M\ell e}$  da equação (4.54)

$$\begin{aligned} -C_{M\ell e} &= \frac{p}{2}a + \frac{p}{2}\left[h\left(1 - \frac{f}{p}\right) + \frac{2 \operatorname{sen} f}{p}h - \frac{\operatorname{sen} 2f}{2p}h\right] \quad \text{ou} \\ C_{M\ell e} &= -\frac{p}{2}a - \frac{1}{2}[p - f + \operatorname{sen} f(2 - \cos f)]h \end{aligned} \quad (4.72)$$

Nas equações (4.71) e (4.72)  $f$  é dado por  $c(1-F) = \frac{c}{2}(1 - \cos f)$ . Observa-se que uma deflexão positiva do flap, isto é, deflexão para baixo, reduz o coeficiente de guinada tendendo a baixar o nariz do aerofólio e vice-versa.

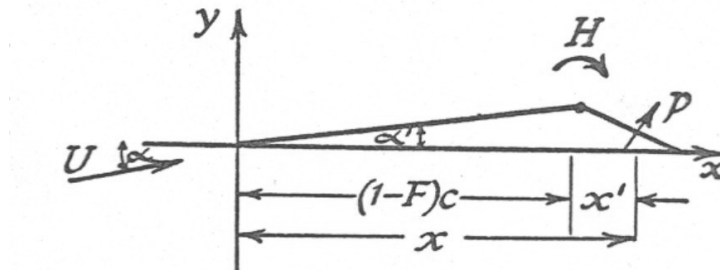


Figura 4.39 Momento H em torno do ponto de articulação do flap.

#### Coeficiente de momento do pivot:

Uma característica importante do aerofólio com flap que é da maior importância nos cálculos de estabilidade e controle é o momento aerodinâmico ( $H$ ) em torno da linha de pivot, como está na figura 4.36

Tomando o momento dos elementos de pressão  $p$  atuando sobre o flap em torno do pivot

$$H = - \int_{\text{pivot}}^{\text{bordode fuga}} p x' dx$$

onde  $p = rUk$ ,  $x' = x - (1-F)c$ . Colocando

$$x' = \frac{c}{2}(1 - \cos q) - \frac{c}{2}(1 - \cos f) = \frac{c}{2}(\cos f - \cos q)$$

e  $k$  da equação (4.70)

$$H = - \int_f^p 2rU^2 \left\{ \left[ a + h\left(1 - \frac{f}{p}\right) \right] \frac{(1 + \cos q)}{\operatorname{sen} q} + h \sum_1^\infty \frac{2 \operatorname{sen} nf}{np} \operatorname{sen} nq \right\} \frac{c}{2} (\cos f - \cos q) \frac{c}{2} \operatorname{sen} q dq$$

Mas  $H = C_H \cdot \frac{1}{2} rU^2 (Fc)^2$ . Assim



$$\begin{aligned}
-C_H \cdot F^2 &= \mathbf{a} \int_f^p (1 + \cos q)(\cos f - \cos q) dq \\
&+ \mathbf{h} \left[ \left(1 - \frac{f}{p}\right) \cos f I_1 - \left(1 - \frac{f}{p}\right) I_2 \right] \\
&+ \mathbf{h} \left[ \sum_1^\infty \frac{2 \sin n f}{n p} \cos f I_3 + \sum_1^\infty \frac{2 \sin n f}{n p} I_4 \right]
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\text{onde } I_1 = \int_f^p (1 + \cos q) dq = p - f - \sin f$$

$$I_2 = \int_f^p (1 + \cos q) \cos q dq = \left[ \frac{p-f}{2} \sin f - \frac{\sin 2f}{4} \right]$$

$$I_3 = \int_f^p \sin n q \sin q dq = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(n+1)f}{n+1} - \frac{\sin(n-1)f}{n-1} \right]$$

$$I_4 = \int_f^p \sin n q \sin q \cos q dq = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(n+2)f}{n+2} - \frac{\sin(n-2)f}{n-2} \right]$$

Na nomenclatura atual

$$C_H = b_1 \mathbf{a} + b_2 \mathbf{h}$$

onde

$$b_1 = \frac{\partial C_H}{\partial \mathbf{a}} \quad \text{e} \quad b_2 = \frac{\partial C_H}{\partial \mathbf{h}}. \quad \text{Da equação (4.73)}$$

$$b_1 = -\frac{1}{F^2} \int_f^p (1 + \cos q)(\cos f - \cos q) dq \quad \text{ou}$$

$$b_1 = -\frac{1}{4F^2} [2(p-f)(2\cos f - 1) + 4\sin f - \sin 2f] \tag{4.74}$$

Similarmente da equação (4.74)

$$b_2 = \frac{\partial C_H}{\partial \mathbf{h}} = \frac{1}{F^2} \cdot \text{coeficiente de } \mathbf{h} \text{ na equação (4.73) que pode ser arranjado na forma}$$

$$b_2 = -\frac{1}{4pF^2} [(1 - \cos 2f) - 2(p-f)^2 (1 - 2\cos f) + 4(p-f)\sin f] \tag{4.75}$$

$$\text{O parâmetro } a_1 = \frac{\partial C_\ell}{\partial \mathbf{a}} = 2p.$$

$$a_2 = \frac{\partial C_\ell}{\partial \mathbf{h}}, \text{ da equação (4.74),}$$

$$a_2 = 2(p-f + \sin f) \tag{4.76}$$

Estes valores de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  podem ser corrigidos pela razão de aspecto. É possível usar o conceito de jato de ar de alta velocidade como flap para aerofólios. Neste caso o flap com jato de ar contribui para a sustentação em duas maneiras. A primeira parte por causa da deflexão do jato que produz a componente de reação que produz sustentação. Em segundo lugar o jato afeta a distribuição de pressão sobre o aerofólio provocando uma circulação adicional em torno do aerofólio, como está na figura 4.40.

Como foi visto é possível usar perfis de arqueamento e calcular os coeficientes aerodinâmicos correspondentes.

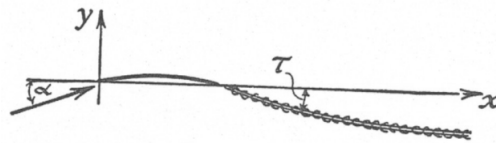


Figura 4.40 Flap de jato de ar.

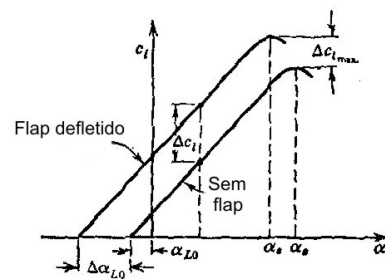


Figura 4.41 Efeito de flap sobre a curva de sustentação.

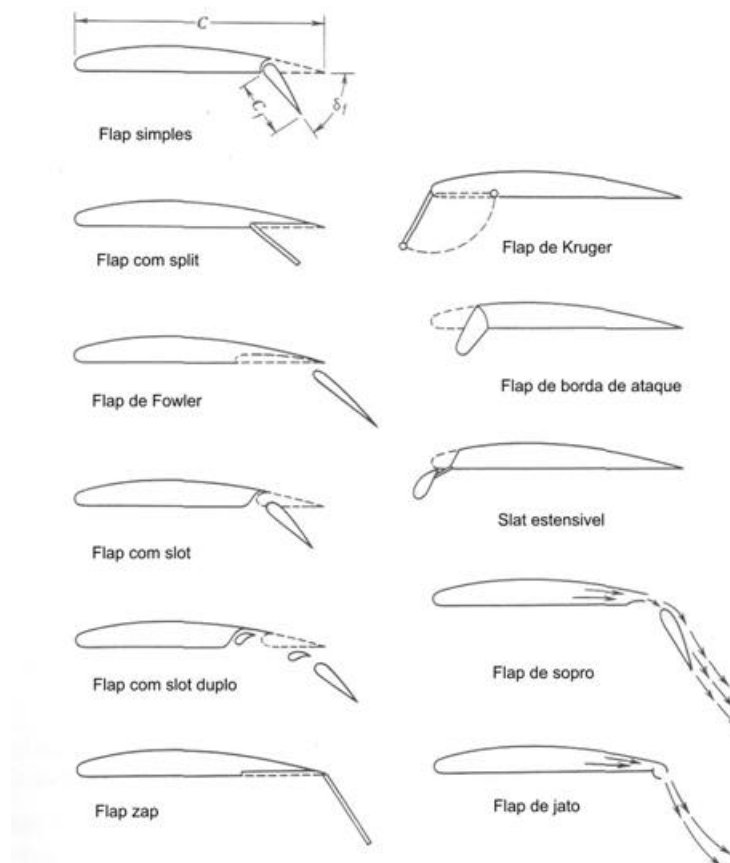


Figura 4.42a Configurações de flaps.

A parte da linha de arqueamento médio na vizinhança da borda de fuga influencia fortemente o valor de  $\alpha_{L0}$ . É baseado neste que o “aileron” como dispositivo de controle lateral e o flap com dispositivo de alta sustentação funcionam. A deflexão para baixo de uma parte da corda na borda de fuga efetivamente faz que a coordenada da linha de arqueamento médio mais positivo nesta região. Como consequência,  $\alpha_{L0}$  fica mais negativo e a sustentação para um dado ângulo de ataque é aumentado. Estes resultados são mostrados na figura 4.41. A curva de sustentação é deslocada para esquerda como resultado de aumento da  $\alpha_{L0}$ . O ganho na sustentação num dado ângulo de ataque é  $\Delta c_l$ . Se a parte extrema de borda de fuga é defletida para cima, um deslocamento oposto na curva de sustentação é obtido e a sustentação num dado ângulo de ataque é diminuída.

O efeito de pequenas deflexões de flap sobre as propriedades de secção do aerofólio como foi visto podem ser previstos pela teoria de aerofólio fino. Sendo que todos os ângulos são pequenos, é suficiente determinar as propriedades de aerofólio simétrico com zero ângulo de ataque com flap defletido. Estes podem ser somados as propriedades de aerofólio com arqueamento em qualquer ângulo de ataque

#### 4.10.1 Flaps de Borda de Ataque e de Borda de Fuga

A verificação dos dados de aerofólios mostra que o maior valor de  $C_{L,max}$  de um aerofólio comum é cerca de 1,8. Este valor máximo é alcançado pelo NACA 23012. Um outro segundo NACA 21412 fornece 1,7. Para alcançar maiores valores de  $C_{L,max}$ , para decolagem e aterrissagem, sem penalizar o desempenho de cruzeiro da aeronave, o projetista apela para os dispositivos mecânicos que mudam temporariamente a geometria do aerofólio e, assim obtém maiores valores de  $C_{L,max}$ . Estes dispositivos são chamados de flaps; os dispositivos mais comuns são apresentados na figura 4.42a. Além dos flaps mecânicos, a figura 4.42a mostra flaps formados por jatos na forma de folha de ar plana na borda de fuga. Estes flaps de jato podem produzir  $C_{L,max}$  maiores que os flaps mecânicos, tendo no jato energia e momentum suficientes. O efeito do flap mecânico é de deslocar a curva de sustentação para cima sem variar sua inclinação.

Figura 4.42b mostra alguns destes dispositivos passivos e os aumentos correspondentes no  $C_{L,max}$ .

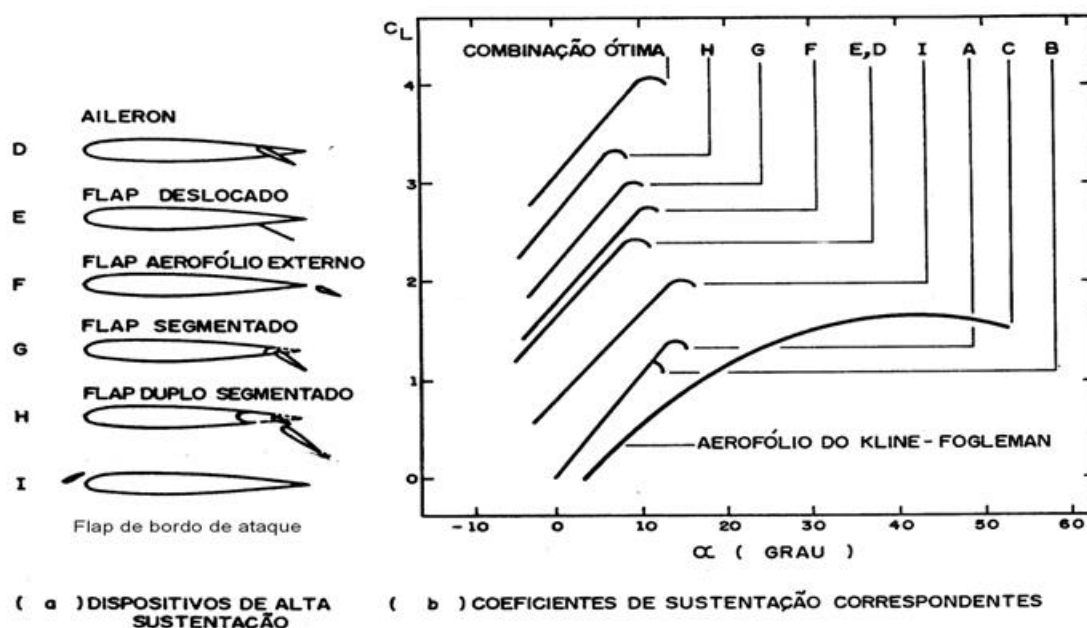


Figura 4.42b  $C_{L,max}$  para vários dispositivos de alta sustentação.

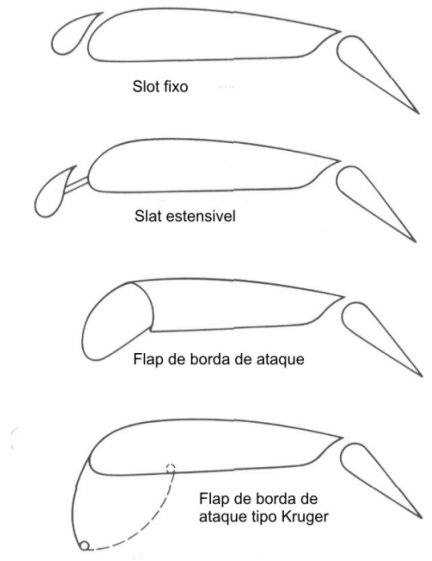


Figura 4.43 Dispositivos para retardara separação na borda de ataque.

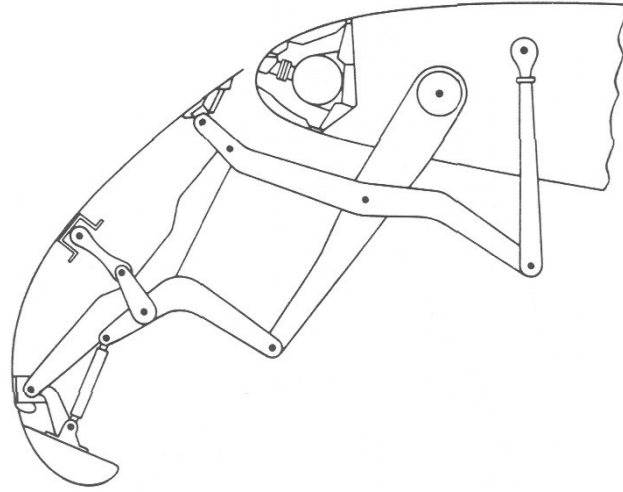


Figura 4.44 Flap da borda de ataque flexível construído de fibra de vidro e usado no Boeing 747.

Para evitar separação na borda de ataque, especialmente para baixo número de Reynolds, ou no caso de aerofólio com borda de ataque relativamente aguda, dispositivos de alta sustentação podem ser incorporados na borda de ataque para suplementar os benefícios dos dispositivos de borda de fuga. Estes dispositivos são mostrados na figura 4.43. O “slot” fixo e o “slot” extensível foram usados e estão ainda em uso enquanto o flap de Kruger foi utilizado em turbojato de transporte civil.

A figura 4.44 mostra uma seção de flaps de Kruger. À medida que este flap oscila para baixo e para frente, ele assume o formato curvo mostrado na figura. Com esta forma ótima, seu desempenho excede os dados apresentados nas figuras 4.45a e 4.45b.

Dois números de méritos são usados para julgar a qualidade de um dado aerofólio, são a razão de sustentação /arrasto,  $L/D$ , e o coeficiente de sustentação máxima  $C_{lmax}$ . Para uma aeronave, o coeficiente de sustentação máxima  $C_{lmax}$  determine a velocidade de estol de aeronave. Isto pode ser visto em caso de vôo em regime onde  $L$  é a sustentação e  $W$  é o peso do aeronave.

$$L = W = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S C_L \quad \text{ou} \quad V_{\infty} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} \quad (4.77)$$

Também a velocidade mais baixa possível de um aeronave é a velocidade de estol que acontece quando  $C_{lmax}$  é atingido.

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{Lmax}}} \quad (4.78)$$

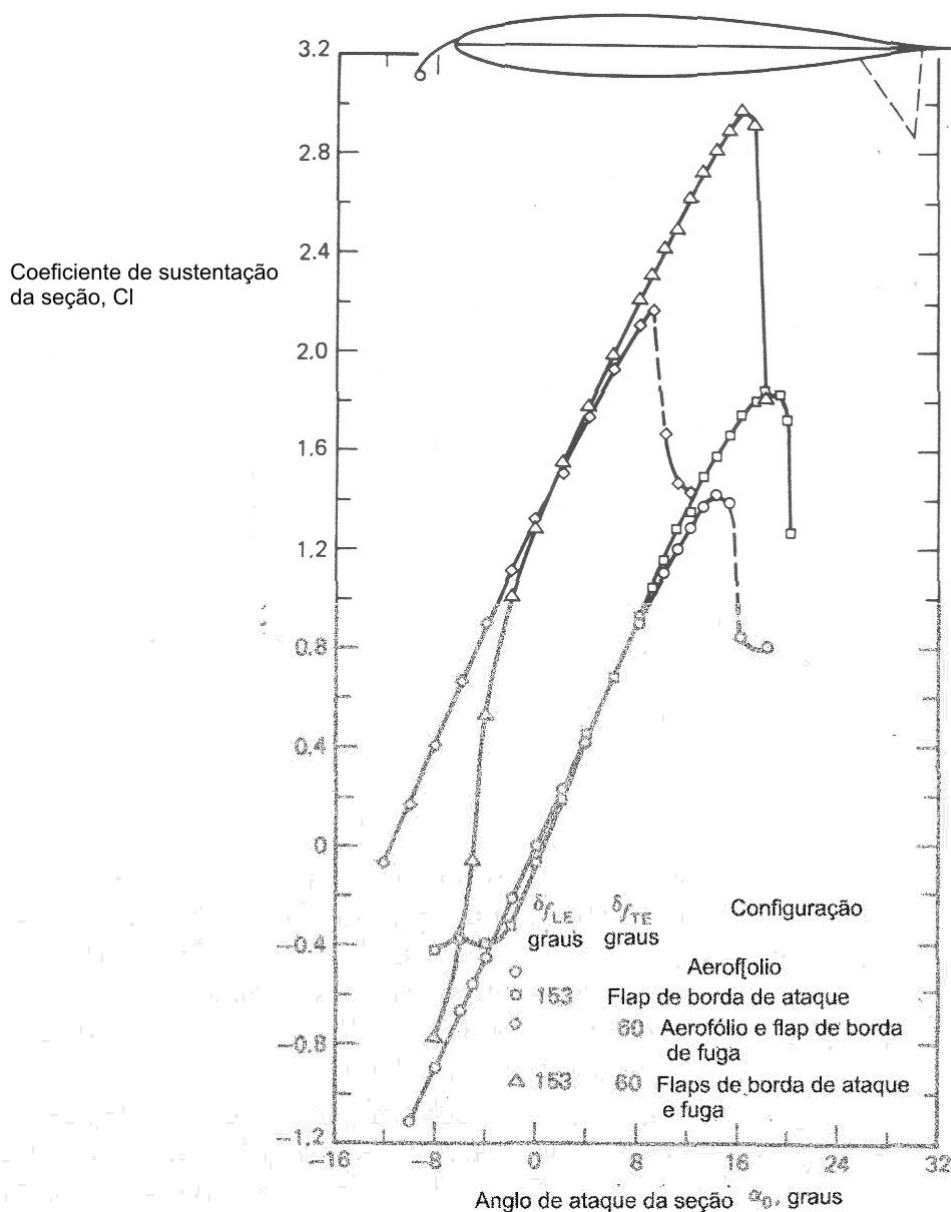


Figura 4.45a Características aerodinâmicas do perfil NACA 64-012 com e sem flap.

Assim, existe um tremendo incentivo para aumentar o coeficiente de sustentação máxima de um aerofólio, para reduzir a velocidade de estol ou aumentar o peso sustentável na mesma velocidade. Ainda a agilidade de um aeronave, isto é, o raio mínimo para virar e a taxa máxima de virar dependem de  $C_{lmax}$ .

Para um dado aerofólio num dado número de Reynolds, o valor de  $C_{lmax}$  é especificado. Para aumentar este valor de  $C_{lmax}$  é necessário usar flap na borda de fuga e outros elementos chamados de dispositivos de alta sustentação.

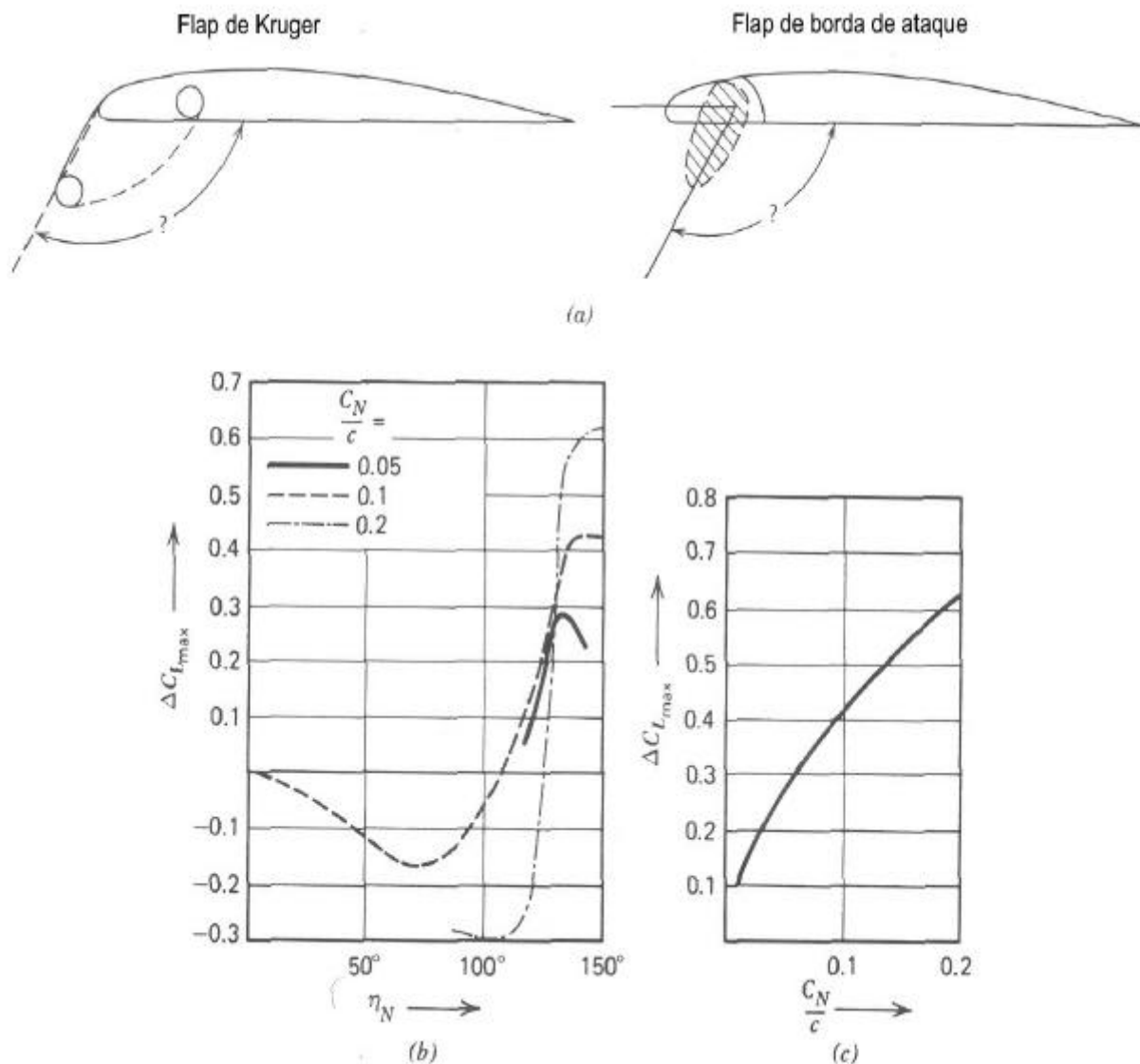


Figura 4.45b As características aerodinâmicas do flap de Kruger.

A tira na borda de ataque é uma superfície curva fina que é estendida na frente da borda de ataque. Somando com o fluxo primário sobre o aerofólio, um fluxo secundário escoar no espaçamento entre a tira e a borda de ataque do aerofólio de baixo para cima, modificando a distribuição de pressão e ativando o escoamento e assim retardando a separação de escoamento na parte superior do aerofólio. Isto resulta em aumento de ângulo de ataque de estol e conseqüentemente  $C_{l_{max}}$ .

Os dispositivos de alta sustentação em uso nos aviões de alto desempenho são geralmente combinações de slats de borda de fuga e flaps de borda de fuga de multi elementos como está na figura 4.46. Três configurações importantes são mostradas:

- i – configuração de cruzeiro sem qualquer elemento estendido.
- ii – configuração de decolagem ambos o flap na borda de ataque e na borda de fuga são parcialmente estendidas.
- iii – configuração de aterrassagem todos os elementos são totalmente estendidos

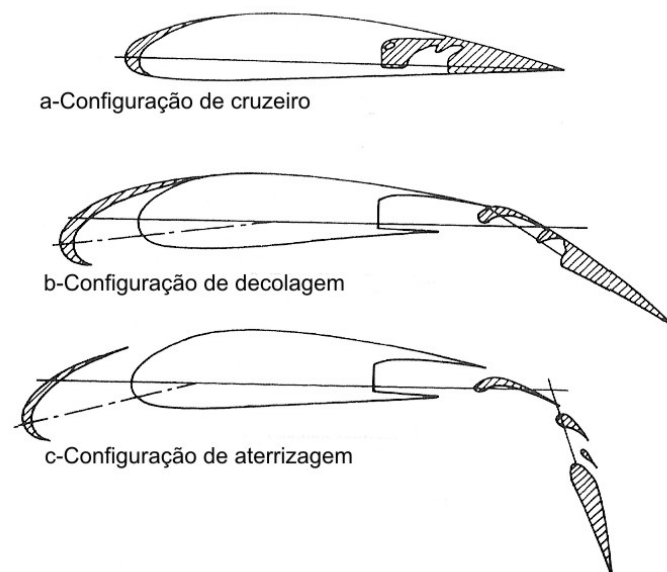


Figura 4.46a Aerofólio com flaps na borda de ataque e de fuga.

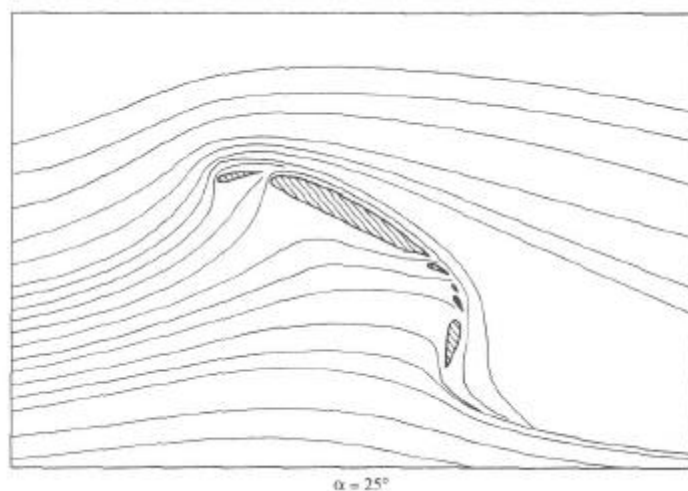


Figura 4.46b Efeito do flap de borda de ataque e flap de borda de fuga de multielementos sobre as linhas de correntes para ângulo de ataque de  $25^\circ$ .

#### 4.11 A solução numérica do problema do aerofólio fino

O método analítico apresentado requer o uso da equação:

$$g = 2aV_\infty \frac{1 + \cos q}{\sin q} \quad (4.79)$$

Como ponto de partida para determinação da densidade da circulação de um aerofólio fino. Adicionalmente a este método analítico, o método numérico aproximado que não necessita do uso da equação analítica acima para representar a densidade de circulação.

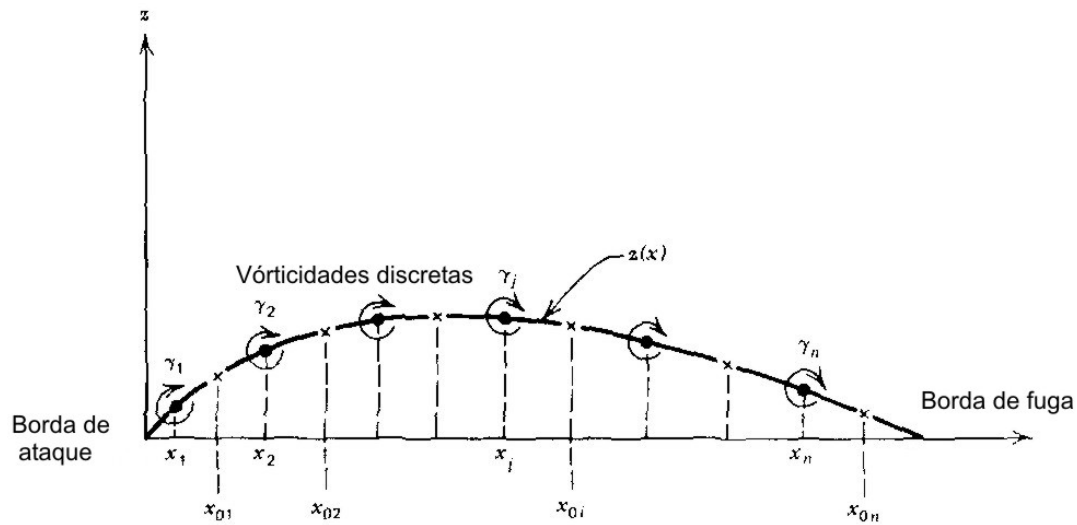


Figura 4.47 Configuração de vórtice para solução numérica da asa plana.

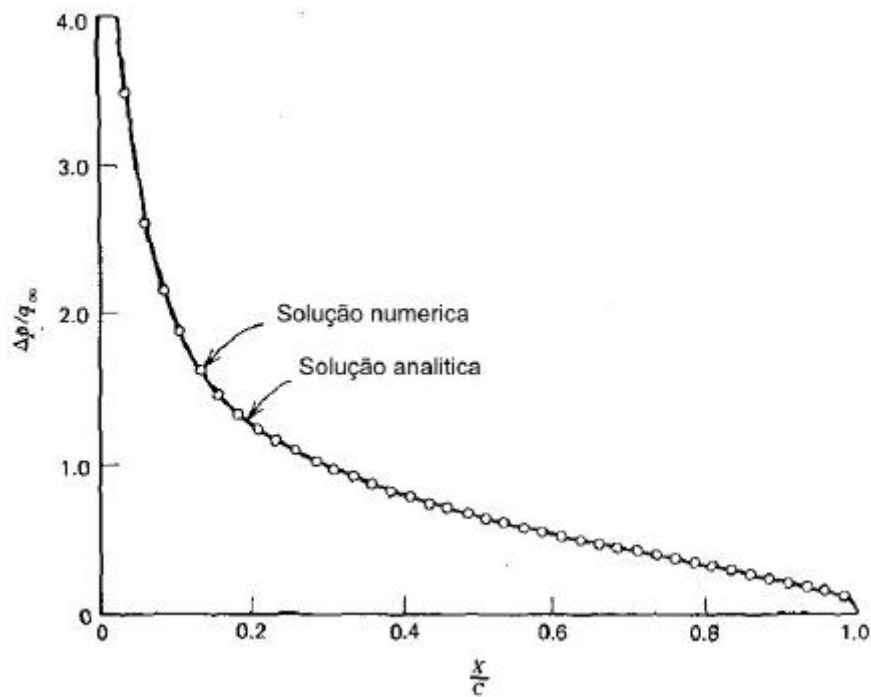


Figura 4.48 Distribuição de  $\Delta\phi_i = \Delta\phi/q_\infty$ .

Como etapa inicial neste procedimento, o vórtice de superfície situado sobre a linha de arqueamento médio  $z(x)$  é trocado por  $n$  vórtices discretos de intensidade  $g_j$  localizado em  $x_j$  onde  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , como indicado na figura 4.47. Nos pontos sobre a linha média, mas no meio espaço entre os vórtices de linha,  $n$  pontos de controle são escolhidos nos pontos,  $x_{0i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Após avaliação da equação:

$$\frac{1}{2p} \int_0^c \frac{g dx}{x_{0i} - x} = V_\infty \left[ a - \left( \frac{dz}{dx} \right)_o \right] \quad (4.80)$$



Nestes pontos de controle e trocando a integral pela somatória pode-se obter um conjunto de  $n$  equações algébricas simultâneas.

Se os intervalos entre os vórtices próximo da borda de fuga são suficientemente pequenos a aplicação da equação acima no último ponto de controle deve satisfazer aproximadamente a condição de Kutta. A figura 4.48 mostra uma comparação do incremento do coeficiente de sustentação  $\Delta C_l = \Delta p / q_\infty$  para um aerofólio aproximado por 40 cm vórtices igualmente espaçados ao longo da linha de corda.

#### 4.12 A solução numérica do problema de corpo simétrico

Foi demonstrado que a superposição de escoamento uniforme a uma linha de fonte e uma linha de sorvedouro da mesma intensidade resulta num corpo oval de Rankine bi-dimensional. Se a distribuição é de doublets, o corpo formado é de um cilindro de raio constante.

Considere um escoamento uniforme de velocidade  $V_\infty$  e uma distribuição contínua de doublets de intensidade  $2pk$  por unidade ao longo do eixo  $x$ , na faixa de  $x = a$  a  $x = b$ . a distribuição  $k(x)$  determina a forma do corpo simétrico, similar ao da figura 4.49a. O termo  $2pk$  é chamado de densidade de doublet

de modo que a intensidade total do doublet  $K$ , dentro do corpo é  $\int_a^b 2pk dx$ ...num dado ponto  $P(x, y)$  a

intensidade de doublet contida num intervalo  $dx$  localizado a uma distância  $x$  da origem, contribui  $dy$  a função para um doublet é dada por:

$$y = -\frac{k}{2p} \frac{\sin \theta}{r} = -\frac{k}{2p} \cdot \frac{y}{r^2}$$

$$f = \frac{k}{2p} \frac{\cos \theta}{r} = -\frac{k}{2p} \cdot \frac{x}{r^2}$$

Assim, a contribuição do elemento  $dx$  a função corrente é:

$$dy = -\frac{k(x)y dx}{(x-x)^2 + y^2}$$

A função corrente em  $P$  é uma função corrente de conjunto escoamento paralelo à distribuição de doublet, assim,

$$y = V_\infty y - \int_a^b \frac{k(x)y}{(x-x)^2 + y^2} dx \quad (4.81)$$

A forma do corpo descrita por  $y = 0$  é controlada pela variação da distribuição  $k(x)$ . A distância entre a borda de ataque do corpo e a borda de fuga deve ser um valor não zero se os raios de curvatura nestes pontos são finitos. Para um corpo prescrito, a determinação da função  $k(x)$  requer a solução da equação integral, equação (a) que é geralmente difícil. Entretanto, o problema pode ser resolvido numericamente. Um método numérico aproximado para resolver o problema de escoamento em torno de um corpo simétrico, figura 4.49b de comprimento  $L$ , é obtido pela representação da distribuição exata de doublet  $k(x)$  ao longo da linha de centro por uma distribuição "degrau" composta de  $n$  segmentos de doublet cada um de comprimento  $\Delta x$ , onde  $(\Delta x / L) \ll 1$ . Para efeito de cálculo, o segmento de intensidade  $k_j \Delta x$  é assumido concentrado em  $x_j$ , contribui:

$$\Delta y_j = -\frac{k_j \Delta x y_p}{(x_p - x_j)^2 + y_p^2}$$

Para a função corrente no ponto  $P$ , após a superposição de escoamento uniforme  $V_\infty$ , a fórmula aproximada correspondente a solução exata, equação (4.81) é:

$$y_p = V_\infty y_p - \sum_{j=1}^n \frac{k_j \Delta x y_p}{(x_p - x_j)^2 + y_p^2} \quad (4.82)$$

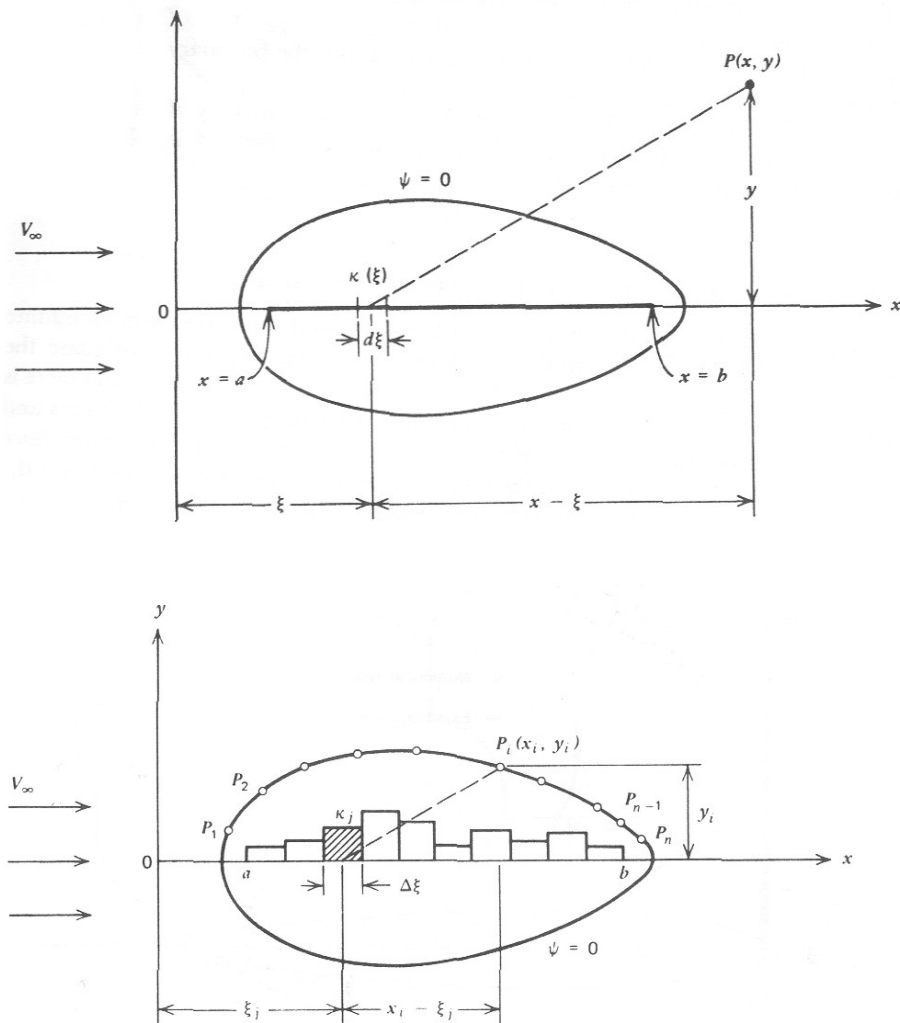


Figura 4.49 a) Distribuição contínua de doublet num escoamento uniforme  
b) Representação numérica por distribuição discreta de doublet.

A equação (4.82) é aplicada aos  $n$  pontos sobre o corpo de geometria prescrita, onde  $\psi = 0$  em todos os pontos do corpo. Deste modo obtém-se um conjunto de equações algébricas lineares e simultâneas, cuja solução fornece as densidades  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ ; conhecendo a distribuição de doublet, as velocidades e a pressão sobre o corpo podem ser determinadas. Um exemplo deste cálculo é mostrado na figura 4.50. Para escoamento uniforme sobre um corpo assimétrico, um procedimento numérico similar pode ser realizado distribuindo os doublets ao longo da linha curva. Entretanto, por causa da assimetria, os pontos  $P_i(x_i, y_i)$  levando à equação (b) devem ser distribuídos sobre os dois lados do corpo.

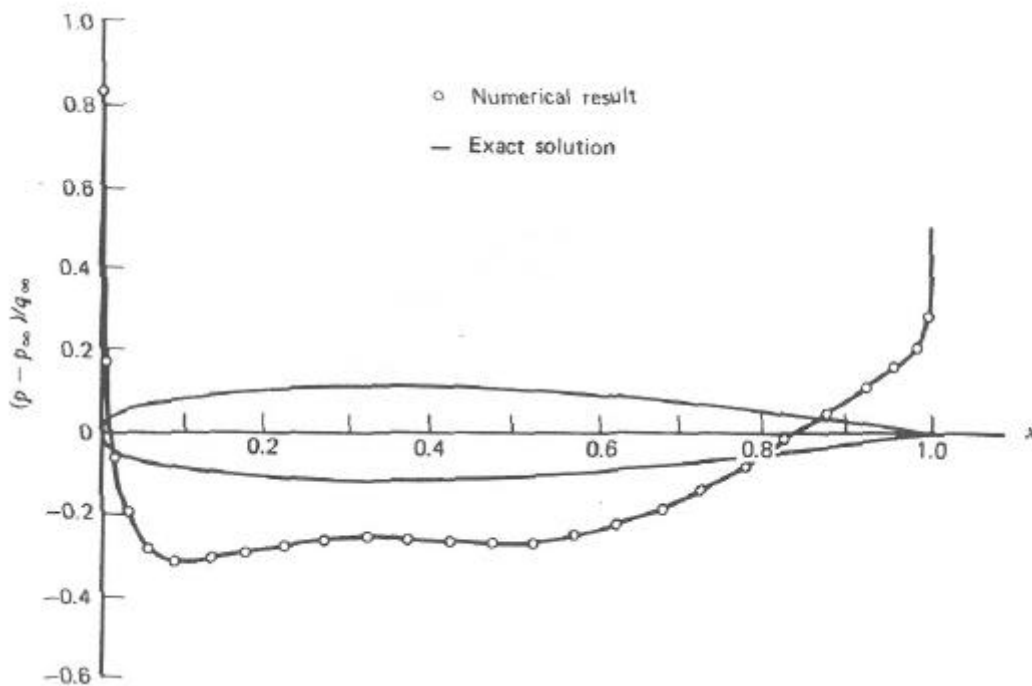


Figura 4.50 Distribuição do pressão sobre um aerofólio simétrico com ângulo de ataque zero.

#### 4.13 Aerofólio fino com distribuição de espessura e arqueamento

Considere o fluxo uniforme ao longo do aerofólio com as superfícies superior e inferior localizadas em  $y=Y_u(x)$ ,  $y=Y_l(x)$  respectivamente como é mostrado na figura 4.51

Considere  $T(x)$  e  $\bar{Y}(x)$  são as funções de espessura e arqueamento

$$\left. \begin{aligned} T(x) &= Y_u(x) - Y_l(x) \\ \bar{Y}(x) &= \frac{1}{2} [Y_u(x) + Y_l(x)] \end{aligned} \right\} \quad (4.83)$$

onde  $\bar{Y}(x)$  localiza a linha média do aerofólio e

$$\left. \begin{aligned} Y_u(x) &= \bar{Y} + \frac{1}{2}T \\ Y_l(x) &= \bar{Y} - \frac{1}{2}T \end{aligned} \right\} \quad (4.84)$$

Na superfície do aerofólio deve satisfazer a condição de tangência ou seja,

$$\left. \begin{aligned} v &= u \frac{dY_u}{dx} \quad \text{no } y = Y_u(x) \\ &= u \frac{dY_l}{dx} \quad \text{no } y = Y_l(x) \end{aligned} \right\} \text{ para } 0 < x < c \quad (4.85)$$

Como resultado da teoria do aerofólio fino pode considerar que  $u = V_\infty$  e que pode também satisfazer as condições de contorno sobre o eixo  $x$  ou seja, aproximar os valores de  $v$  sobre as superfícies superior e inferior por seus valores nos lados superior e inferior do eixo  $x$ .

$$\left. \begin{aligned} v[x, Y_u(x)] &\cong v(x, 0_+) \\ v[x, Y_l(x)] &\cong v(x, 0_-) \end{aligned} \right\} \quad (4.86)$$

onde  $0_+ \equiv \lim_{z \downarrow 0} z$ ,  $0_- \equiv \lim_{z \uparrow 0} z$

Assim, a aproximação do aerofólio fino, permite que a condição da tangência de escoamento (4.85) seja escrita na forma:

$$\left. \begin{aligned} v(x, 0_+) &\cong V_\infty \left( \frac{d\bar{Y}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dT}{dx} \right) \\ v(x, 0_-) &\cong V_\infty \left( \frac{d\bar{Y}}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dT}{dx} \right) \end{aligned} \right\} \text{para } 0 < x < c \quad (4.87)$$

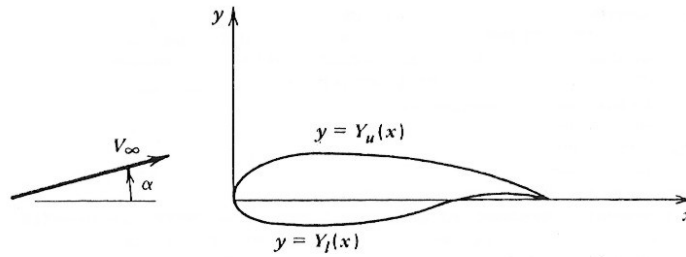


Figura 4.51 Nomenclatura de aerofólio de sustentação.

Os valores de  $u$  e  $C_p$  sobre a superfície do corpo serão aproximados pelos valores no  $y = 0_{\pm}$ . Mantendo a distinção entre as superfícies superior e inferior de eixo  $x$ , permite que  $u$ ,  $v$  e  $C_p$  sejam descontínuos através do eixo  $x$  como acontece através do aerofólio.

É conveniente escrever o potencial de velocidade e a função corrente como sendo compostos de três partes:

1.  $\phi_\infty$  para representar o termo de espessura na condição de contorno no infinito
2.  $\phi_T$  para representar o termo de espessura na condição de contorno sobre o corpo
3.  $\phi_c$  associado com o arqueamento ou o ângulo de ataque.

Assim, pode-se escrever que:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_\infty + \mathbf{f}_T + \mathbf{f}_c \quad (4.88)$$

Cada termo da equação (4.88) deve satisfazer a equação de Laplace.

Especificamente, pode-se definir  $\phi_\infty$  como sendo o potencial de fluxo uniforme cuja velocidade é  $V_\infty$ ,

$$\mathbf{f}_\infty = V_\infty x \cos \mathbf{a} + V_\infty y \sin \mathbf{a} \quad (4.89)$$

Também os gradientes do termo de espessura  $\phi_T$  e arqueamento  $\phi_c$  devem ser nulos longe do corpo, temos

$$\nabla \mathbf{f} \rightarrow V_\infty$$

Assim a condição de contorno no infinito é satisfeita. Também conforme a aproximação da teoria de aerofólio fino, pode-se supor que o ângulo de ataque  $\alpha$  seja pequeno de modo que a equação (4.89) pode ser aproximada por

$$\mathbf{f}_\infty \cong V_\infty (x + \mathbf{a}y) \quad (4.90)$$

Os componentes de velocidade associados são  $V_\infty$  e  $V_\infty \cdot \alpha$ . O termo da espessura é definido de modo que a parte assimétrica da condição de tangência, equação (4.87), é satisfeita

$$v_T = \frac{\partial \mathbf{f}_T}{\partial y} = \pm \frac{1}{2} V_\infty \frac{dT}{dx} \text{ no } y = 0_{\pm} \text{ para } 0 < x < c \quad (4.91)$$

O termo de arqueamento deve ser definido de modo que o componente  $y$  da velocidade total satisfaça a condição de contorno (4.87).

$$V_\infty \mathbf{a} + v_T + v_c = V_\infty \left( \frac{d\bar{Y}}{dx} \pm \frac{1}{2} \frac{dT}{dx} \right) \text{ no } y = 0_{\pm} \text{ para } 0 < x < c$$

Desta equação e da equação (4.91), temos:

$$v_c = \frac{\partial f_c}{\partial y} = V_\infty \left( \frac{d\bar{Y}}{dx} - a \right) \text{ no } y = 0 \pm \text{ para } 0 < x < c \quad (4.92)$$

Pode-se demonstrar que o problema de espessura é resolvido pela distribuição da fonte ao longo do eixo x, enquanto o problema de arqueamento necessita de distribuição de vórtices. Tais distribuições devem satisfazer as equações de continuidade e irrotacionalidade e deve ser nulas longe do corpo. Assim, deve demonstrar que a distribuição de fonte e vórtice podem ser usados para satisfazer as respectivas condições de contorno sobre o corpo (ao invés de sobre o eixo x) para os problemas de espessura e arqueamento.

Para fazer isto considere o campo de velocidade por causa da distribuição da fonte de intensidade  $q(t)$  por unidade de comprimento ou seja,

$$v_s = \int_0^c \frac{q(t)}{2p} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (4.93)$$

$$u_s = \int_0^c \frac{q(t)}{2p} \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (4.94)$$

Mas,

$$\lim_{y \rightarrow 0} v_s(x, y) = \frac{q(x)}{2p} \begin{cases} \frac{p}{2} - (-\frac{p}{2}) & \text{se } y > 0 \\ -\frac{p}{2} - (+\frac{p}{2}) & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

e assim,

$$v_s(x, 0 \pm) = \pm \frac{1}{2} q(x) \quad (4.95)$$

Comparando este com a condição de contorno do problema de espessura, equação (4.83) pode se verificar que a distribuição de fonte ao longo da linha de corda do aerofólio atende a contribuição da espessura se a intensidade é

$$q(x) = V_\infty T'(x) \quad (4.96)$$

Assim, a aproximação para  $u_T$  sobre a superfície do corpo é:

$$u_T(x, 0 \pm) = \frac{V_\infty}{2p} \int_0^c T'(t) \frac{dt}{x-t} \text{ para } 0 < x < c \quad (4.97)$$

. Pode-se observar que  $u_T$  é contínuo através do eixo x, enquanto que  $v_T$  é descontínuo.

$$\left. \begin{aligned} u_T(x, 0_+) &= u_T(x, 0_-) \\ v_T(x, 0_+) &= -v_T(x, 0_-) \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

A condição de contorno sobre a parte de arqueamento da solução, equação (4.92) mostra  $v_c$  a ser contínuo através do eixo x, entretanto  $v_c$  deve ser descontínuo.

$$u_c(x, 0_+) \neq u_c(x, 0_-) \text{ de modo que}$$

$u = V_\infty + u_c + u_T$  não pode ser contínuo através do eixo x. Isto implica que u sera a mesma nas superfícies superior e inferior do aerofólio.

Considerando que o potencial por causa de um vórtice de ponto é a mesma forma funcional, a função corrente de uma fonte, de modo que o componente x de campo de velocidade de uma singularidade tem o mesmo formato do componente y da outra singularidade. Tendo o comportamento perto do eixo x de  $u_c$  e  $v_c$  junto com as informações de  $u_T$  e  $v_T$  e o fato de que o problema de espessura é resolvido por distribuição de fontes ao longo do eixo x, pode representar  $\phi_c$  por distribuição de vórtice ao longo do eixo x por unidade de comprimento  $\gamma$ , ou seja

$$f_c = - \int_0^c \frac{g(t)}{2p} \tan^{-1} \left( \frac{y}{x-t} \right) dt \quad (4.99)$$

e

$$u_c(x, \pm 0) = \lim_{y \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\partial f_c}{\partial x} = + \lim_{y \rightarrow 0^{\pm}} \int_0^c \frac{g(t)}{2p} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt \left. \vphantom{\lim_{y \rightarrow 0^{\pm}}} \right\} \quad (4.100)$$

$$= \pm \frac{1}{2} g(x) \text{ para } 0 < x < c$$

$$v_c(x, 0^{\pm}) = - \lim_{y \rightarrow 0^{\pm}} \int_0^c \frac{g(t)}{2p} \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} dt \left. \vphantom{\lim_{y \rightarrow 0^{\pm}}} \right\} \quad (4.101)$$

$$= - \int_0^c \frac{g(t)}{2p} \frac{dt}{(x-t)} \text{ para } 0 < x < c$$

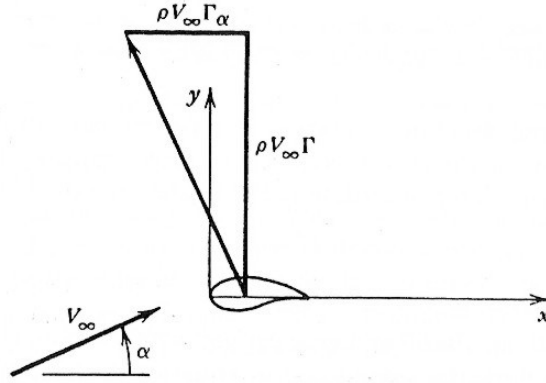


Figura 4.52 Forças sobre aerofólio com circulação.

Deste modo  $u_c$  é descontínuo através do eixo  $x$ , enquanto  $v_c$  é contínuo. Substituindo  $v_c$  da equação (4.87), na condição de contorno (4.78), temos

$$+ \frac{1}{2p} \int_0^c g(t) \frac{dt}{(x-t)} = V_\infty \left( \mathbf{a} - \frac{d\bar{Y}}{dx} \right) \text{ para } 0 < x < c \quad (4.102)$$

Assim, para determinar a intensidade de vórtice, deve-se resolver a equação integral (4.102). Ao obter  $\gamma$ , a contribuição de arqueamento ao componente  $x$  de velocidade sobre o aerofólio pode ser determinado da equação (4.97). Resumindo, os componentes de velocidade podem ser escritos como

$$\left. \begin{aligned} u &= V_\infty + u_T + u_c \\ v &= V_\infty \mathbf{a} + v_T + v_c \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

onde a primeira parte é o gradiente de  $\phi_\infty$ . Na superfície do corpo  $u_T$ ,  $u_c$ ,  $v_T$  e  $v_c$  são dados pelas equações (4.97), (4.100), (4.91) e (4.92), com  $\gamma$  necessário na equação (4.90). Após determinar a velocidade sobre a superfície de corpo, a distribuição de pressão pode ser calculada pela equação de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \quad (4.104)$$

Notando que  $u_T + u_c \ll V_\infty$ , pode-se escrever que

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 - \frac{1}{2} \rho (V_{\infty} + u_T + u_c)^2 - \frac{1}{2} \rho (V_{\infty} a + v_T + v_c)^2 \left. \vphantom{p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} \right\} \quad (4.105)$$

$$\cong p_{\infty} - \rho V_{\infty} (u_T + u_c)$$

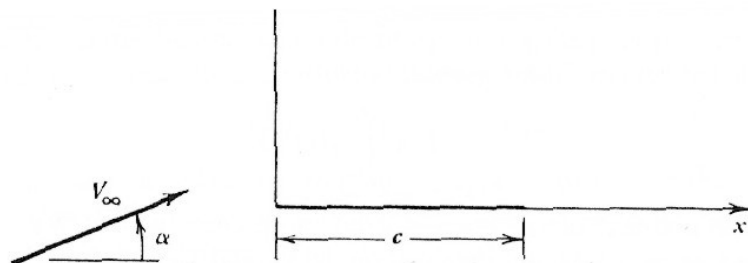


Figura 4.53 Aerofólio de placa plana com ângulo de ataque.

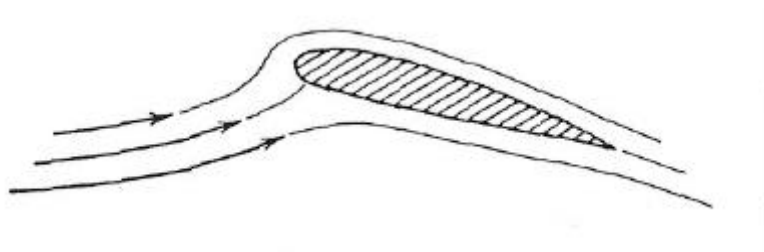


Figura 4.54 Formação de sucção de borda de ataque.

#### Forças e momentos sobre o aerofólio fino

Nesta parte as forças líquidas e os momentos sobre o aerofólio fino por causa da distribuição de pressão e portanto as intensidades de fontes e vórtices associados.

Os componentes x e y da força por unidade de largura são

$$F'_x = \int_0^c (p_u \frac{dY_u}{dx} - p_l \frac{dY_l}{dx}) dx \quad (4.106)$$

$$F'_y = \int_0^c (p_l - p_u) dx \quad (4.107)$$

Usando a aproximação do aerofólio fino, temos:

$$\left. \begin{aligned} p_u &\cong p_{\infty} - \rho V_{\infty} [u_T(x, 0+) + u_c(x, 0+)] \\ p_l &\cong p_{\infty} - \rho V_{\infty} [u_T(x, 0-) + u_c(x, 0-)] \end{aligned} \right\} \quad (4.108)$$

Substituindo para  $u_T$  e  $u_c$  das equações (4.107) e (4.100) temos:

$$p_u - p_l \cong -\rho V_{\infty} g$$

e assim da equação (4.107)

$$F'_y \cong \rho V_{\infty} \int_0^c g(x) dx = \rho V_{\infty} G \quad (4.109)$$

onde  $\Gamma$  é a circulação líquida em torno do aerofólio.

$$G \equiv \int_0^c g(x) dx \quad (4.110)$$

O componente x da força é obtido substituindo as equações (4.98) na equação (4.96) e (4.87) e (4.90) para obter

$$F'_x \equiv p_\infty \int_0^c \left( \frac{dY_u}{dx} - \frac{dY_l}{dx} \right) dx - rV_\infty \int_0^c u_T(x,0) \left( \frac{dY_u}{dx} - \frac{dY_l}{dx} \right) dx \\ - rV_\infty \int_0^c u_c(x,0+) \left( \frac{dY_u}{dx} + \frac{dY_l}{dx} \right) dx \quad (4.111a)$$

$$\equiv p_\infty (Y_u - Y_l) \int_0^c - rV_\infty \int_0^c \left[ \frac{V_\infty}{2p} \int_0^c \frac{T'(t)dt}{x-t} \right] T'(x) dx \\ - rV_\infty \int_0^c \frac{g(x)}{2} \cdot 2 \frac{d\bar{Y}}{dx}(x) dx \\ F'_x \equiv -rV_\infty a \int_0^c g(x) dx = -rV_\infty a \Gamma \quad (4.111b)$$

O momento das forças por unidade de largura sobre o aerofólio fino c, positivo no sentido horário

$$M'_{Le} \equiv - \int_0^c x(p_l - p_u) dx \quad (4.112)$$

Substituindo da diferença de pressão da equação (4.109)

$$M'_{le} \equiv -rV_\infty \int_0^c xg(x) dx$$

A razão de  $M'_{le}$  á força localiza o centro da pressão sobre o aerofólio

$$x_{cp} \equiv - \frac{M'_{le}}{L'} \equiv \frac{\int_0^c xg(x) dx}{\int_0^c g(x) dx} \quad (4.113)$$

como está na figura 4.55.

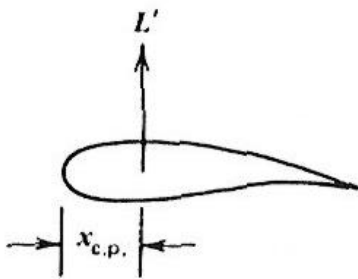


Figura 4.55 Definição do centro de pressão.

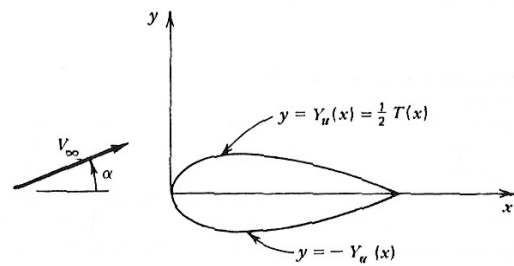


Figura 4.56 O aerofólio simétrico com ângulo de ataque.

#### Exemplo 4.4: Aerofólio simétrico com ângulo de ataque

Supondo-se que  $Y_u(x) = -Y_l(x)$ , de modo que a equação (4.83)  $\bar{Y}(x) = 0$ , como esta na figura 4.56. Considere o aerofólio com ângulo de ataque  $\alpha$ . Determine a sustentação e o momento sobre o aerofólio que depende da intensidade da vorticidade. Para este deve-se resolver a equação integral (4.102) para este caso.



$$\oint \frac{g(t) dt}{x-t} = 2pV_{\infty} a \quad \text{para } 0 < x < c \quad (4.114)$$

Introduza as variáveis

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}c(1 - \cos q_0) \\ t &= \frac{1}{2}c(1 - \cos q) \end{aligned} \right\} \quad (4.115)$$

Também considere que

$$\gamma(t) = g(\theta) \quad (4.116)$$

A equação integral (4.100) fica

$$\int_0^p \frac{g(q) \operatorname{sen} q dq}{\cos q - \cos q_0} = 2pV_{\infty} a \quad (4.117)$$

Mas

$$\int_0^p \frac{\cos nq}{\cos q} - \cos q_0 dq = p \frac{\operatorname{sen} nq_0}{\operatorname{sen} q_0} \quad (4.118)$$

Sendo que para  $n = 1$ , a equação (4.107) fica

$$\operatorname{sen} q g(q) = 2V_{\infty} a \cos q$$

Mas a equação (4.118) mostra que quando  $n = 0$ , a integral é nula. Assim, pode-se adicionar à  $\operatorname{sen} \theta$  qualquer

e múltiplo de  $\cos \theta = 1$ , isto é, constante sem mudar o resultado do integral da equação (4.117)

$$\operatorname{sen} q g(q) = 2V_{\infty} a \cos q + k$$

Em termos da constante  $k$ , a solução é:

$$g(q) = \frac{k}{\operatorname{sen} q} + 2V_{\infty} a \frac{\cos q}{\operatorname{sen} q} \quad (4.119)$$

Substituindo as equações (4.115) e (4.116) na equação (4.110)

$$G = \int_0^p g(q_0) \frac{c}{2} \operatorname{sen} q_0 dq_0 \quad (4.120)$$

com  $g(\theta_0)$  dado pela equação (4.119), o resultado é

$$G = \frac{kcp}{2} \quad (4.121)$$

isto  $\Gamma$  depende da constante  $k$ .

Da equação (4.115) temos:

$$\operatorname{sen} q_0 = (1 - \cos^2 q_0)^{1/2} = 2 \left[ \frac{x}{c} \left( 1 - \frac{x}{c} \right) \right]^{1/2}$$

Das equações (4.116) e (4.119) temos

$$g(x) = g(q_0) = \frac{k + 2V_{\infty} a \left( 1 - 2 \frac{x}{c} \right)}{\sqrt{\frac{x}{c} \left( 1 - \frac{x}{c} \right)}}$$

Para satisfazer a condição de kutta, escolha  $k$  de modo que  $\gamma(x)$  seja nulo quando  $x = c$ , ou seja

$$k = 2V_{\infty} a$$

assim

$$g(x) = 2V_{\infty} a \frac{\sqrt{1-(x/c)}}{\sqrt{x/c}} \quad (4.122a)$$

e

$$g(q) = 2V_{\infty} a \frac{1 + \cos q}{\sin q} \quad (4.122b)$$

Por maior análise, pode-se determinar que

$$L' = \rho r V_{\infty}^2 a c$$

$$M'_{Le} = -\frac{\rho}{4} r V_{\infty}^2 a c^2 \quad (4.123)$$

e

$$x_{cp} = -\frac{M'_{Le}}{L'} = \frac{c}{4} \quad (4.124)$$

#### 4.14 O aerofólio fino com arqueamento

Considere o caso de arqueamento  $\bar{Y}(x)$  não zero. É preciso determinar  $\gamma(x)$  de modo que satisfaça a equação integral (4.88) e a condição de Kutta.

$$g(c) = 0 \quad (4.125)$$

Em termos de (4.115) e (4.116), a equação (4.102) fica

$$\frac{1}{2\rho V_{\infty}} \int_0^p \frac{g(q) \sin q dq}{\cos q - \cos q_0} = a - s(q_0) \quad \text{para } 0 < q_0 < p \quad (4.126)$$

onde

$$\bar{Y}'(x) = s(q_0) \quad (4.127)$$

onde a condição de Kutta (4.125) é

$$g(p) = 0 \quad (4.128)$$

Substituir  $g(\theta)$  sen  $\theta$  por séries de Fourier

$$g(q) \sin q = \sum_{n=0} b_n \cos nq$$

Adota-se  $g(\theta)$  da forma

$$g(q) = 2V_{\infty} \left( A_0 \frac{1 + \cos q}{\sin q} + \sum_{n=1} A_n \sin nq \right) \quad (4.129)$$

e assim

$$g(q) \sin q = 2V_{\infty} \left[ A_0 (1 + \cos q) + \sum_{n=1} A_n \sin nq \sin q \right]$$

Assim da equação (4.126) temos:

$$\begin{aligned} a - s(q_0) &= \frac{1}{p} \int_0^p \frac{dq}{\cos q - \cos q_0} \cdot \left\{ A_0 (1 + \cos q) + \sum_{n=1} \frac{1}{2} A_n [\cos(n-1)q - \cos(n+1)q] \right\} \\ &= \frac{1}{\sin q_0} \left\{ A_0 \sin q_0 + \sum_{n=1} \frac{1}{2} A_n [\sin(n-1)q_0 - \sin(n+1)q_0] \right\} \\ &= A_0 - \sum_{n=1} A_n \cos nq_0 \end{aligned} \quad (4.130)$$

Para determinar os coeficientes  $A_0, A_1$ , etc... multiplicar a equação (4.130) por  $\cos m\theta_0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  e integrar de 0 à  $\pi$ .

$$\int_0^p [\mathbf{a} - s(\mathbf{q}_0)] \cos m \mathbf{q}_0 d\mathbf{q}_0 = A_0 \int_0^p \cos m \mathbf{q}_0 d\mathbf{q}_0 - \sum_{n=1} A_n \int_0^p \cos m \mathbf{q}_0 \cos n \mathbf{q}_0 d\mathbf{q}_0$$

ou

$$\int_0^p [\mathbf{a} - s(\mathbf{q}_0)] \cos 0 \mathbf{q}_0 d\mathbf{q}_0 = p\mathbf{a} - \int_0^p s(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 = pA_0$$

de modo que  $A_0$

$$A_0 = \mathbf{a} - \frac{1}{p} \int_0^p s(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \quad (4.131)$$

para  $m > 0$

$$\int_0^p [\mathbf{a} - s(\mathbf{q}_0)] \cos m \mathbf{q}_0 d\mathbf{q}_0 = - \int_0^p s(\mathbf{q}_0) \cos m \mathbf{q}_0 d\mathbf{q}_0 = -\frac{p}{2} A_m$$

ou

$$A_m = \frac{p}{2} \int_0^p s(\mathbf{q}_0) \cos m \mathbf{q}_0 d\mathbf{q}_0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.132)$$

e

$$L' = prV_\infty^2 c (A_0 + \frac{1}{2} A_1) \quad (4.133)$$

$$M'_{le} = -\frac{p}{4} rV_\infty^2 c^2 (A_0 + A_1 - \frac{1}{2} A_2) \quad (4.134)$$

$$x_{ep} = \frac{c}{4} \cdot \frac{A_0 + A_1 - \frac{1}{2} A_2}{A_0 + \frac{1}{2} A_1} \quad (4.135)$$

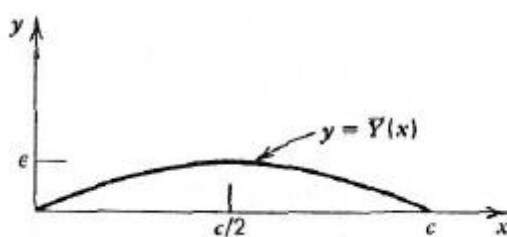


Figura 4.57 O aerofólio de arco parabólico.

#### Exemplo 4.5 : Aerofólio com arqueamento parabólico

Considere o arqueamento parabólico da figura 4.57

$$\bar{Y}(x) = 4E \frac{x}{c} (c - x) \quad (4.136)$$

então

$$\bar{Y}'(x) = 4E (1 - 2 \frac{x}{c})$$

Das equações (4.105) e (4.117)

$$S(\mathbf{q}_0) = 4E [1 - (1 - \cos \mathbf{q}_0)] = 4E \cos \mathbf{q}_0 \quad (4.137)$$

Das equações (4.137) e (4.130) temos:

$$A_0 = a$$

$$A_1 = 4E \quad (4.138)$$

$$A_n = 0 \text{ para } n \geq 2$$

e assim as forças e momentos neste caso são

$$L' = \rho r V_\infty^2 c (a + 2E)$$

$$M' = -\frac{\rho}{4} r V_\infty^2 c^2 (a + 4E) \quad (4.139)$$

$$x_{cp} = \frac{c}{4} \cdot \frac{a + 4E}{a + 2E}$$

Como pode ser visto nas equações (4.139), o centro de pressão num aerofólio com inclinação varia com o ângulo de ataque. Da figura 4.58, o momento em torno de qualquer outro ponto  $x_0$ , é

$$+ M'_{x_0} = L'(x_0 - x_{cp}) \text{ positivo no sentido horário.}$$

$$\begin{aligned} &= \rho r V_\infty^2 c \left( A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) \left( x_0 - \frac{c}{4} \frac{A_0 + A_1 - \frac{1}{2} A_2}{A_0 + \frac{1}{2} A_1} \right) \\ &= \rho r V_\infty^2 c \left[ A_0 \left( x_0 - \frac{c}{4} \right) + A_1 \left( \frac{x_0}{2} - \frac{c}{4} \right) + A_2 \frac{c}{8} \right] \end{aligned} \quad (4.140)$$

$$M'_{ac} = -\frac{\rho}{8} r V_\infty^2 c^2 (A_1 - A_2)$$

$$c_l \equiv \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho r V_\infty^2 c} \quad (4.141)$$

$$c_m \equiv \frac{M'}{\frac{1}{2} \rho r V_\infty^2 c^2} \quad (4.142)$$

Assim

$$c_l = 2\rho \left( A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) = 2\rho \left[ a - \frac{1}{\rho} \int_0^p s(q_0) (1 - \cos q_0) dq_0 \right] \quad (4.143)$$

$$c_{mac} = -\frac{\rho}{4} (A_1 - A_2) = -\frac{1}{2} \int_0^p s(q_0) (\cos q_0 - \cos 2q_0) dq_0 \quad (4.144)$$

mas

$$c_l = m_0 (a - a_{L0}) \quad (4.145)$$

onde

$$m_0 = 2\rho \quad (4.146)$$

e

$$a_{L0} = \frac{1}{\rho} \int_0^p s(q_0) (1 - \cos q_0) dq_0 \quad (4.147)$$

$$a_a = a - a_{L0}$$

é o ângulo de ataque absoluto.

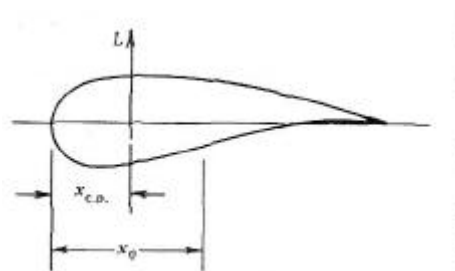


Figura 4.58 Forças e momento sobre o aerofólio

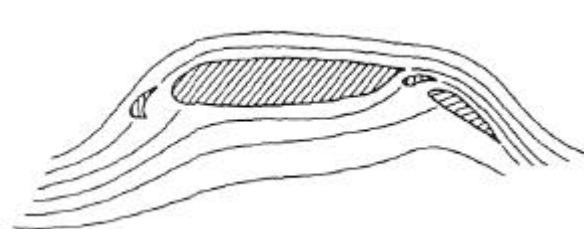


Figura 4.59 As linhas de corrente sobre aerofólio com slat e flap.

#### Exemplo 4.6 :Aerofólio simétrico com slat e flap

A faixa de ângulo de ataque para qual uma asa de geometria fixa é limitada pelo “estol” e fora desta faixa a asa perde efetivamente sua sustentação. Sendo que a força de sustentação é aproximadamente independente da velocidade, e sabendo que um aeronave necessita maior sustentação para levantar vôo do que na descida em comparação ao cruzeiro. A solução tradicional é de variar o arqueamento durante o vôo e assim mudar o ângulo de ataque para a sustentação nula. A figura 4.59 as bordas de fuga e ataque são gerados com ângulos de ataque diferentes dos ângulos originais da asa. Como está na figura 4.60.o comprimento de slat é  $E_s$  e da flap é  $E_f$  em termos de comprimento de corda e  $\delta_s$  e  $\delta_f$  são os ângulos de deflexão respectivos. É conveniente medir o ângulo de ataque relativo a secção principal do aerofólio, isto é, relativo ao eixo x e não relativo a linha de corda. A inclinação da linha de arqueamento é dada por

$$\begin{aligned}\bar{Y}'(x) &\cong ds \quad \text{para } 0 < x < E_s c \\ &\cong -d_f \quad \text{para } (1 - E_f)c < x < c \\ &= 0 \quad \text{no resto}\end{aligned}\tag{4.148}$$



Figura 4.60 Nomenclatura para aerofólio fino com slat e flap.

Considere

$$\left. \begin{aligned}E_s c &= \frac{c}{2}(1 - \cos q_s) \\ (1 - E_f)c &= \frac{c}{2}(1 - \cos q_f)\end{aligned} \right\}\tag{4.149}$$

Deste modo a inclinação da linha de arqueamento

$$S(q_0) = \begin{cases} d_s & 0 < q_0 < q_s \\ -d_f & q_f < q_0 < p \\ 0 & q_s < q_0 < q_f \end{cases}$$

Deste modo os coeficientes  $A_0$  e  $A_n$

$$A_0 = a - \frac{d_s}{p} \int_0^{q_s} dq_0 + \frac{d_f}{p} \int_{q_f}^p dq_0 \quad (4.150)$$

$$= a + d_f - \frac{1}{p} (d_s q_s + d_f q_f)$$

$$A_n = \frac{2}{p} d_s \int_0^{q_s} \cos n q_0 dq_0 - \frac{2}{p} d_f \int_{q_f}^p \cos n q_0 dq_0$$

$$= \frac{2}{n p} (d_s \operatorname{sen} n q_s + d_f \operatorname{sen} n q_f), \quad n = 1, 2, 3 \quad (4.151)$$

O ângulo de sustentação nulo é

$$L_{L0} = \frac{d_s}{p} (q_s - \operatorname{sen} q_s) + \frac{d_f}{p} (q_f - \operatorname{sen}(q_f - p))$$

e o momento em torno do centro aerodinâmico é

$$c_{mac} = -\frac{d_s}{2} \operatorname{sen} q_s (1 - \cos q_s) - \frac{d_f}{2} \operatorname{sen} q_f (1 - \cos q_f)$$

#### 4.15 Método de vórtice concentrado; método aproximado

Um método aproximado para resolver a parte de arqueamento de aerofólio é de substituir os vórtices distribuídos da equação (4.99) por um vórtice concentrado no ponto  $x = a$  como está na figura 4.61. Sendo que a intensidade de vórtice é  $\Gamma$  único valor e não é mais uma função de  $x$ , não pode mais satisfazer a condição de tangência de escoamento ao corpo, equação (4.92), ao longo do aerofólio. No lugar para fixar  $\Gamma$ , será satisfeito somente no ponto  $x = b$ . Sendo que a velocidade induzida pelo vórtice no  $x = b, y = 0$  tem valor  $\Gamma/2\pi(b-a)$  e direcionado para baixo, a equação (4.92) torna-se

$$-\frac{\Gamma}{2\pi(b-a)} = V_\infty \left( \frac{d\bar{Y}}{dx} - a \right) \quad \text{no } x = b \quad (4.152)$$

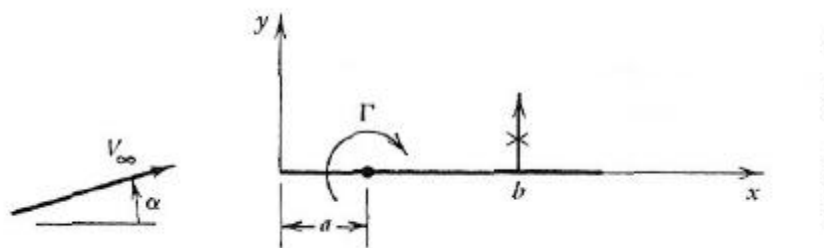


Figura 4.61 Método de vórtice concentrada

Para usar o método deve-se satisfazer o ponto "a" onde colocar o vórtice e o ponto "b" onde satisfaça a condição de tangência. Podem ser escolhidos de modo que a equação (4.136) concorde com

os resultados correspondentes à teoria de aerofólio para o caso de aerofólio com arqueamento parabólico. Para este caso, das equações (4.112) e (4.139),

$$\Gamma = \rho V_{\infty} c(\alpha + 2e)$$

e da equação (4.136)

$$\frac{d\bar{Y}}{dx}(b) = 4e(1 - 2\frac{b}{c})$$

Substituindo estas equações na equação (4.152) temos

$$-(1/2)V_{\infty}(c/(b-a)) = V_{\infty}[4e(1 - (2b/c)) - \alpha]$$

Para que isto seja verdadeiro para qualquer valor de  $\alpha$  e  $e$ , os coeficientes destas variáveis devem corresponder ou seja

$$-\frac{k}{2(b-a)} = -1$$

$$-\frac{c}{(b-a)} = 4(1 - \frac{2b}{c})$$

e resolvendo pode se determinar que

$$a = \frac{c}{4}, \quad b = \frac{3c}{4} \quad (4.152a)$$

Deste modo pode-se resumir que o vórtice concentrado para substituir a distribuição de vorticidade pode ser colocado no ponto  $x = a = c/4$ , e deve satisfazer a condição de tangência no ponto  $x = b = 3c/4$ , ou seja, da equação (4.152)

$$G = \rho c V_{\infty} [\alpha - \frac{d\bar{Y}}{dx}(\frac{3c}{4})] \quad (4.153)$$

#### 4.16 Solução numérica de aerofólio com espessura e arqueamento arbitrários pelo método dos painéis

Os resultados do método analítico e o método numérico apresentados são altamente preciosos para aerofólio fino com pouco arqueamento para uso na aviação convencional. Entretanto a determinação das características aerodinâmicas de aerofólio grosso com grande arqueamento, com um ou múltiplos *flaps* e diversos tipos de interferência necessita de modo geral do uso de métodos numéricos como métodos dos painéis.

A precisão do método depende da habilidade do projetista em representar adequadamente a superfície por painéis de fontes e vórtices além de outros fatores.

O método é uma variação do método dos painéis, onde o aerofólio é representado por polígono fechado de painéis de vórtice. O problema de aerofólio e asa pode ser resolvido por painéis de vórtice, mas o cálculo de fuselagem e “naceles” e sua interferência no escoamento necessitam do uso de fontes e doublets junto com painéis de vórtices. O método de painel de vórtice introduzido aqui tem a característica que a densidade de circulação em cada painel varia linearmente de um canto para o outro e é contínuo através do canto como indicado na figura 4.62. A condição de Kutta é incorporada nesta formulação e o método numérico é usualmente estável. Os  $m$  painéis são assumidos planos e são chamados na direção sentido horário iniciando de borda de fuga. Os pontos de contorno escolhidos sobre a superfície do aerofólio são as intersecções dos painéis de vórtice no arranjo. A condição para que o aerofólio seja uma linha de corrente é atendida aproximadamente pela aplicação da condição de componente normal de velocidade nula nos pontos de controle, especificados como os pontos médios dos painéis.

Na presença de fluxo uniforme  $V_{\infty}$  num ângulo de ataque  $\alpha$  e  $m$  painéis de vórtice, o potencial de velocidade no ponto de controle  $i(x_i, y_i)$  é:

$$f(x_i, y_i) = V_{\infty}(x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) - \sum_{j=1}^m \int_j \frac{g(s_j)}{2p} \tan^{-1}(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}) ds_j \quad (4.154)$$

onde

$$\mathbf{g}(s_j) = \mathbf{g}_j + (\mathbf{g}_{j+1} - \mathbf{g}_j) \frac{s_i}{S_j} \quad (4.155)$$

Como definido na figura 4.62, o ponto arbitrário  $(x_i, y_i)$  no painel  $j$  de comprimento  $S_j$  que é situado a uma distância  $s_i$  medida a partir da borda de ataque. A integração é realizada ao longo do comprimento total do painel  $(X_j, Y_j)$  à  $(X_{j+1}, Y_{j+1})$ . As letras maiúsculas são usadas para identificar as coordenadas de ponto de contorno. Os  $(m+1)$  valores de  $\gamma_j$  nos pontos de contorno são constantes incógnitas serão determinados numericamente.

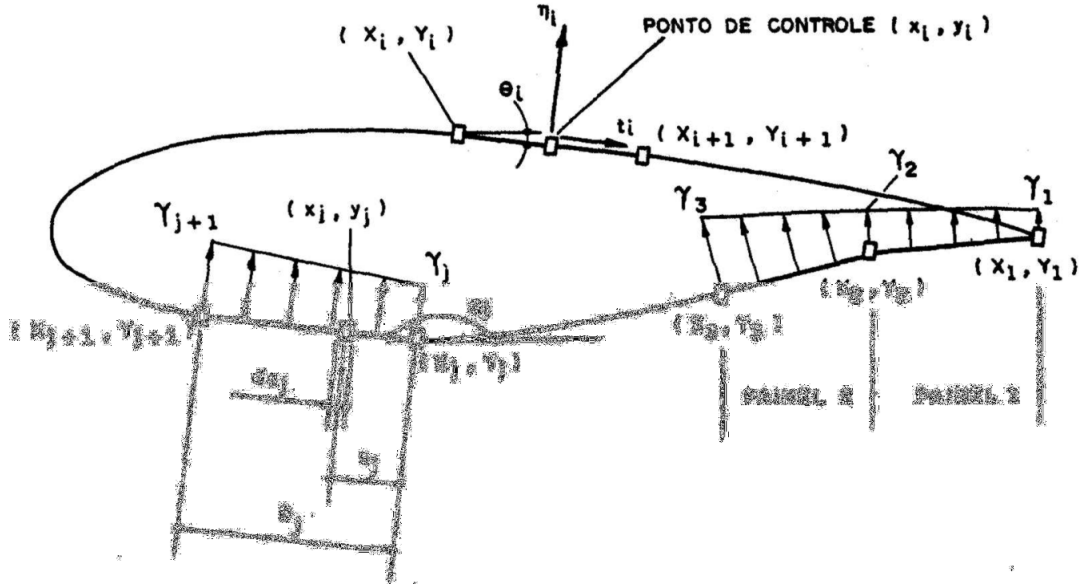


Figura 4.62 Corpo representando a distribuição de painéis.

A condição de contorno requer que a velocidade na direção normal para fora  $n_i$  é nula no ponto de controle  $i$  de modo que

$$\frac{\partial}{\partial n_i} f(x_i, y_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Realizando as operações de diferenciação e integração temos:

$$\sum_{j=1}^m (C_{n1ij} \mathbf{g}'_j + C_{n2ij} \mathbf{g}'_{j+1}) = \text{sen}(\mathbf{q}_i - \mathbf{a}), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.156)$$

onde  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} / 2pV_\infty$  é a densidade adimensional de circulação e  $\theta_i$  é o ângulo de orientação de painel  $i$  medida de eixo  $x$  a superfície de painel e as coeficientes são

$$C_{n1ij} = 0,5DF + CG - C_{n2ij}$$

$$C_{n2ij} = D + 0,5QF / S_j - (AC + DE)G / S_j$$

As constantes são:

$$A = -(x_i - X_j) \cos \mathbf{q}_j - (y_i - Y_j) \text{sen} \mathbf{q}_j$$

$$B = (x_i - X_j)^2 + (y_i - Y_j)^2$$

$$C = \text{sen}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$$



$$D = \cos(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$$

$$E = (x_i - X_j) \sin \mathbf{q}_j - (y_i - Y_j) \cos \mathbf{q}_j$$

$$F = \ln(1 + \frac{(S_j^2 + 2AS_j)}{B})$$

$$G = \tan^{-1}(\frac{ES_j}{B + AS_j})$$

$$P = (x_i - X_j) \sin(\mathbf{q}_i - 2\mathbf{q}_j) + (y_i - Y_j) \cos(\mathbf{q}_i - 2\mathbf{q}_j)$$

$$Q = (x_i - X_j) \cos(\mathbf{q}_i - 2\mathbf{q}_j) - (y_i - Y_j) \sin(\mathbf{q}_i - 2\mathbf{q}_j)$$

Observe que estas constantes são funções das coordenadas dos pontos de controle i, das coordenadas de pontos de contorno de painel de vórtice j e os ângulos de orientação dos painéis i e j. Podem ser calculados, para todos os valores possíveis de i e j quando a geometria do painel é definida.

A expressão na esquerda da equação (4.156) representa a velocidade normal no ponto de controle i induzida pela distribuição linear de vorticidade no painel j. Para i = j, os coeficientes tem os valores simplificados.

$$C_{n1ii} = -1 \quad e \quad C_{n2ii} = 1$$

que representa a velocidade normal auto induzida no ponto de controle i.

Para ter um fluxo suave na borda de fuga, a condição de Kutta, que a intensidade da vorticidade na borda de fuga é nula, ou seja,

$$\mathbf{g}'_i + \mathbf{g}'_{m+1} = 0 \quad (4.157)$$

Assim temos (m+1) equações após combinar as equações (4.156) e (4.157), suficiente para resolver os (m+1) incógnitas  $\gamma_j$ .

Pode-se escrever o sistema de equações simultâneas numa forma conveniente

$$\sum_{j=1}^{m+1} A_{nij} \mathbf{g}'_j = RHS_i, \quad i = 1, 2, \dots, m+1 \quad (4.158)$$

no qual para i < m+1

$$A_{ni1} = C_{n1i1}$$

$$A_{nij} = C_{n1ij} + C_{n2i, j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, m$$

$$A_{nim+1} = C_{n2im}$$

$$RHS_i = \sin(\mathbf{q}_i - \mathbf{a})$$

e para i = m+1

$$A_{ni1} = A_{nim+1} = 1$$

$$A_{nij} = 0, \quad j = 2, 3, \dots, m$$

$$RHS_i = 0$$

Exceto para i = m+1, os  $A_{nij}$  podem ser chamados dos coeficientes influencia dos  $\mathbf{g}'_j$  sobre a velocidade normal no ponto de controle i. Após determinar as densidades de circulação podemos calcular as velocidades tangenciais e a pressão nos pontos de controle. No ponto de controle o vetor de velocidade tangencial é  $\mathbf{t}$  e a velocidade local tangencial adimensional é definido como  $(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t_i})/V_\infty$  pode ser computada da expressão

$$V_i = \cos(\mathbf{q}_i - \mathbf{a}) + \sum_{j=1}^m (C_{t1ij} \mathbf{g}'_j + C_{t2ij} \mathbf{g}'_{j+1}), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.159)$$

onde

$$C_{K1ij} = 0,5CF - DG - C_{t2ij}$$

$$C_{t2ij} = C + 0,5PF / S_j + (AD - CE)G / S$$

$$C_{t1ii} = C_{t2ii} = P/2$$

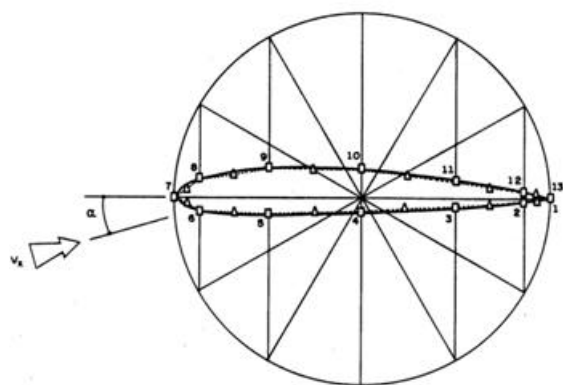


Figura 4.63 Distribuição dos pontos de contorno e pontos de controle dos painéis.

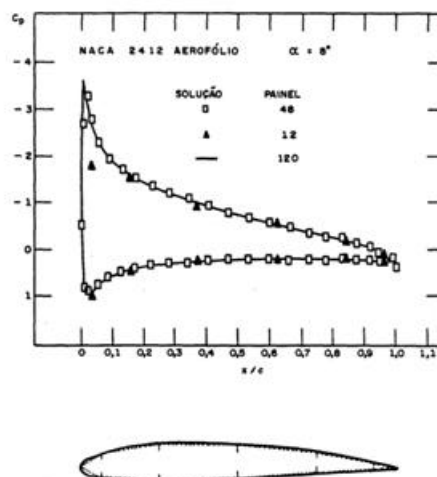


Figura 4.64 Distribuição de pressão para três conjuntos de painéis de vórtice.

O segundo termo da direita da equação (4.159) representa a velocidade tangencial no ponto de controle  $i$  induzida pelas vórtices distribuídas sobre o painel  $j$ .

Para facilitar o cálculo numérico da equação (4.159) pode ser escrita como:

$$V_i = \cos(\mathbf{q}_i - \mathbf{a}) + \sum_{j=1}^m A_{tij} \mathbf{g}_j \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.160)$$

onde os coeficientes de influência da velocidade tangencial são definidos como segun  $A_{i11} = C_{t1i1}$

$$A_{tij} = C_{t1ij} + C_{t2ij-1}, \quad j = 2, 3, \dots, m$$

$$A_{tim+1} = C_{t2im}$$

O coeficiente de pressão no ponto de controle  $i$

$$C_{pi} = 1 - V_i^2 \quad (4.161)$$

O método de painel de vórtice é usado para calcular o escoamento em torno de aerofólio NACA 2412 com  $\alpha = 8^\circ$ . A figura 4.63 mostra um método simples de escolher os pontos de contorno sobre o aerofólio. O centro de círculo é no meio corda e o círculo passa pelas bordas de ataque e fuga. Divide o perímetro em número igual o número de painéis desejados e projeta os pontos no perímetro sobre o perfil onde a intersecção representa o ponto de controle. O polígono fechado dos painéis é formado conectando os pontos de contorno.

O programa pode ser adaptado para aerofólios arbitrários, com superfícies adicionais de sustentação como flaps. A distribuição de pressão obtida na figura 4.64 é para o caso de 12 painéis.

#### 4.17 Método de painéis de fonte

Foi demonstrado que o escoamento em torno de um dado corpo pode ser gerado pela distribuição de singularidades (fontes, sorvedouros e vórtices) no seu inteiro numa localização específica tal que sua

superfície torna-se uma linha de corrente de escoamento. Alternativamente, este escoamento pode ser obtido substituindo a superfície por fontes de superfície, a intensidade da qual varia sobre a superfície de tal modo que em qualquer ponto a velocidade normal gerada pelos vórtices de superfície cancela o componente normal da velocidade de escoamento livre. Se o corpo gera sustentação, vórtices de superfície podem ser introduzidos para fornecer a circulação necessária, Hess e Smith [1967]. Nesta seção será introduzido o método de painéis de fonte para corpo que não gera sustentação. O método de fontes distribuídas na superfície pode ser adaptado substituindo o corpo por número finito de painéis de fonte, cada um de intensidade constante, como pode ser verificado na figura 4.66, ao invés da distribuição contínua de vórtices nas superfícies “vortex sheet”

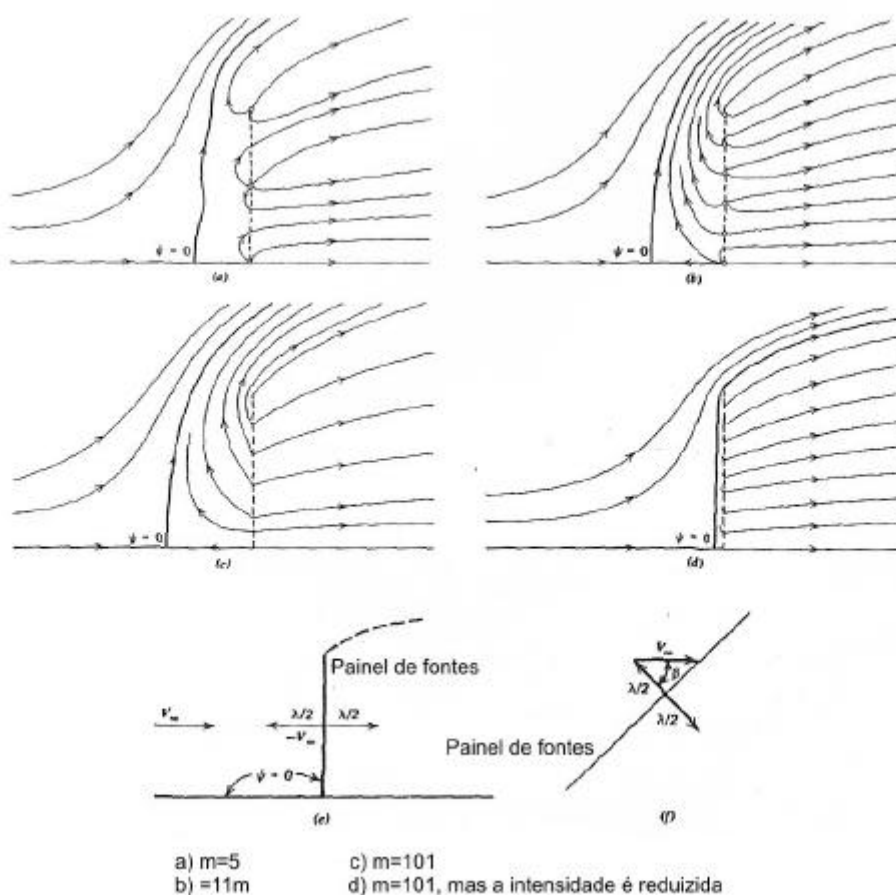


Figura 4.65 Os perfis resultantes da combinação de escoamento uniforme com uma distribuição de  $m$  fontes lineares ao longo da linha tracejada.

O processo via qual um número de fontes de linhas discretas arranjadas ao longo de uma linha normal ao escoamento envolvem-se num painel de fonte formando uma linha de corrente é mostrado na figura 4.65. A configuração do escoamento da figura 4.65a é a metade superior das linhas de corrente resultando da superposição de escoamento uniforme  $V_\infty$ . A intensidade das fontes é escolhida tal que a superfície  $y = 0$  engloba todas as fontes e pode ser visualizada como superfície de um corpo rígido. Se a mesma intensidade total ( $5\Lambda a$ ) é distribuída entre 11 fontes igualmente espaçadas, a configuração das linhas de corrente muda para aquela da figura 4.65b onde a ondulação da figura 4.65a não é mais visível, mas ainda pode ser identificadas as fontes individuais. Se a intensidade total ( $5\Lambda a$ ) é dividida igualmente entre 101 fontes igualmente espaçadas, como está na figura 4.65c. se a intensidade for reduzida

uniformemente para zero, a linha de corrente  $y = 0$ , isto é, a superfície do corpo se aproxima da linha ao longo da qual as fontes estão localizadas, como está na figura 4.65d. No limite a configuração torna-se o painel de fontes mostrado na figura 4.65e. Este painel é caracterizado por densidade de fonte  $I$ , definida como o volume de descarga por unidade de área do painel. As velocidades de descarga serão  $\pm I/2$  e  $I/2 = V_\infty$  é a condição de contorno necessária para fazer o painel de fonte numa linha de corrente do escoamento.

Na figura 4.65f o painel da fonte está num certo ângulo ao escoamento e a velocidade na superfície para um painel de fonte é mostrada para um corpo fechado sendo aproximado por vários painéis de fontes, a soma das contribuições de cada um ao componente da velocidade normal deve balançar  $V_\infty \cos \theta$  em cada painel.

Considere um corpo bidimensional num escoamento uniforme de velocidade  $V_\infty$ . A superfície do corpo é substituída por  $m$  painéis de fonte de diferentes comprimentos,  $S_j$  e intensidade uniforme  $I_j$ . Como pode ser visto na figura 4.66, painéis adjacentes se intersectam nos pontos de contorno da superfície. Os pontos de controle, os pontos nos quais o escoamento resultante deve ser tangente à superfície dos painéis são escolhidos como sendo os pontos médios dos painéis.

A distribuição da fonte sobre o painel  $j$  causa um campo de escoamento induzido cujo potencial de velocidade em qualquer ponto no escoamento  $(x_i, y_i)$  é dado por:

$$\int_j \ln r_{ij} \frac{I_j ds_j}{2\pi} \quad (4.162)$$

Onde  $I_j ds_j$  é a intensidade do elemento  $ds_j$  no ponto  $(x_j, y_j)$  sobre o painel, isto é, o que representa a vazão por unidade de comprimento ao longo do eixo  $z$  e,

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (4.163)$$

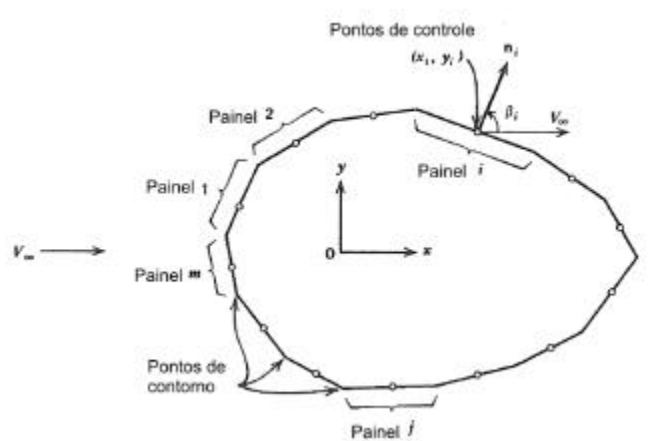


Figura 4.66 Substituição de um corpo por painéis de fontes.

E a integração cobre o comprimento total do painel  $j$ . assim, o potencial da velocidade do escoamento resultando da superposição do escoamento uniforme e os  $m$  painéis de fonte são dados por:

$$f(x_i, y_i) = V_\infty x_i + \sum_{j=1}^m \frac{I_j}{2\pi} \int_j \ln r_{ij} ds_j \quad (4.164)$$

Sendo que a equação (4.164) é válida no campo de escoamento deixa-se que  $(x_i, y_i)$  sejam as coordenadas do ponto de controle no painel  $i$  onde o vetor normal na direção para fora é  $\eta$ . O ângulo entre  $\eta$  e  $V_\infty$  é  $\theta_i$ , como está na figura 4.66. A condição de contorno aproximada na superfície do corpo

é aquela que em cada ponto de controle a velocidade normal resultante de todos os escoamentos superimpostos é nula, assim,

$$\frac{\partial}{\partial n_i} f(x_i, y_i) = 0 \quad (4.165)$$

Estabelece que o ponto de controle de cada painel está sobre a linha de corrente de escoamento. Deste modo a equação (4.164) pode ser diferenciada para obter:

$$\sum_{j=1}^m \frac{I_j}{2p_j} \int \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j = -V_{\infty} \cos \mathbf{b}_i \quad (4.166)$$

Cada termo da somatória representa as contribuições integradas do painel  $j$  ao componente da velocidade normal ao painel  $i$ . O termo representando a contribuição do painel  $i$  é simplesmente  $(I_i/2)$ , e a equação acima se torna:

$$\frac{I_i}{2} + \sum_{j \neq i} \frac{I_j}{2p_j} \int \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j = -V_{\infty} \cos \mathbf{b}_i \quad (4.167)$$

Onde a somatória é para todos os valores de  $j$  exceto  $j = i$ .

Para uma dada configuração de painel  $n_i$  e  $\mathbf{b}_i$  são especificadas em cada ponto de controle. Após avaliação das integrais na equação (4.167) para todos os valores de  $i$ , um conjunto de  $m$  equações algébricas e simultâneas é alcançado permitindo que se obtenha  $I_j$ . Com as intensidades dos painéis conhecidos, os campos de velocidade e de pressão em qualquer ponto no escoamento podem ser calculados tomando as derivadas de  $f$  expressas na equação (4.164) e usando a equação de Bernoulli.

**Exemplo 4.7:** Resolver o campo de velocidade e da pressão em torno de um cilindro submerso num escoamento uniforme usando painéis de fonte.

**Solução:**

Como está na figura 4.67a, a superfície do cilindro é substituído por 8 painéis de fonte de comprimento igual ao arranjado de modo que o primeiro painel facia o escoamento uniforme.

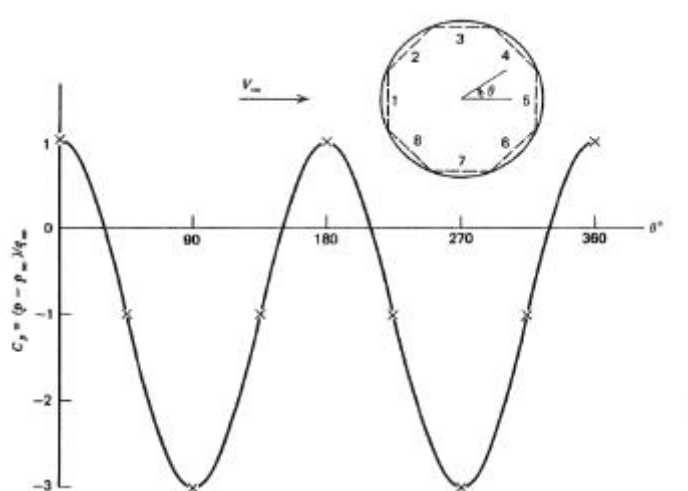


Figura 4.67a Coeficiente de pressão sobre um cilindro circular num escoamento uniforme e comparação com a solução exata.

Como amostra do cálculo será computado a contribuição da velocidade normal no painel 3 pela distribuição de fonte no painel 2. esta contribuição é o produto de  $(I_2/2p_2)$  e a integral:

$$I_{32} = \int_2 \frac{\partial}{\partial n_3} (\ln r_{32}) ds_2 \quad (4.168)$$

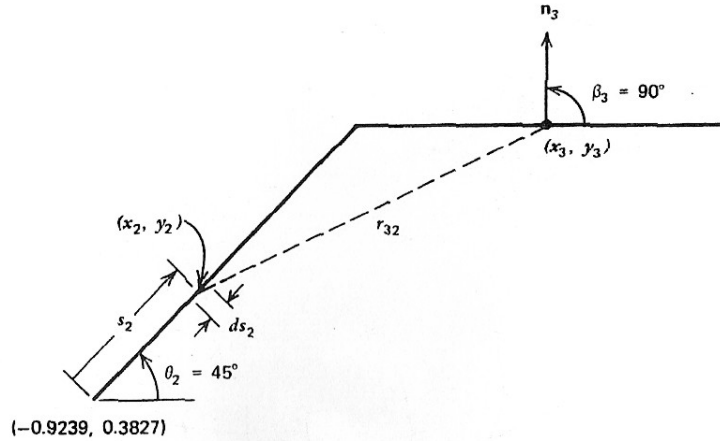


Figura 4.67b Nomenclatura para o exemplo resolvido.

Considere  $(x_3, y_3)$  as coordenadas do ponto e controle sobre o painel 3 (origem está no centro do cilindro) e  $(x_2, y_2)$  são as coordenadas de um ponto arbitrário sobre o painel 2; o ponto  $(x_2, y_2)$  é uma distância  $s_2$  de extremidade inferior, como está na figura 4.67b.

Assim,

$$r_{32} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad (4.169)$$

e a integral torna-se:

$$r_{32} = \int_0^{l_2} \frac{(x_3 - x_2)(\partial x_3 / \partial n_3) + (y_3 - y_2)(\partial y_3 / \partial n_3)}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} ds_2 \quad (4.170)$$

Na qual  $l_2 (=0,7654)$  é o comprimento total do painel 2,  $(\partial x_3 / \partial n_3) = \cos \mathbf{b}_3 = 0$  e  $(\partial y_3 / \partial n_3) = \sin \mathbf{b}_3 = 1$ .

Painel 2 faça um ângulo  $\mathbf{q}_2 (= 45^\circ)$  com o eixo x assim  $\sin \mathbf{q}_2 = \cos \mathbf{q}_2 = 0,7071$ . Assim,

$$x_3 = 0 ; y_3 = 0,9239 ; x_2 = 0,9239 + 0,7071 s_2 ; y_2 = 0,3827 + 0,7071 s_2$$

e o lado direito da equação (4.170) torna-se:

$$I_{32} = \int_0^a \frac{b - c s_2}{s_2^2 - e s_2 + f} ds_2 \quad (4.171)$$

onde,  $a = 0,7654$ ,  $b = 0,5412$ ,  $c = 0,7071$ ,  $e = 2,0720$ ,  $f = 1,1464$

Assim,

$$I_{32} = -\frac{c}{2} \left[ \ln(s_2^2 - e s_2 + f) \right]_0^a + \frac{2b - ce}{b} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{2se - e}{b} \right) \right]_0^a = 0,3528$$

O resto das integrais contidas na equação (4.167) podem ser avaliadas de maneira similar para cada combinação de  $i$  e  $j$ . Assim, assumindo que :

$(I'_j = I_j / 2pV_\infty)$  e  $i = 1, 2, \dots, 8$ , a equação (4.167) pode ser colocada na seguinte forma matricial:

Deste conjunto de equações temos:

$$I'_1 = 0,3765 ; I'_2 = 0,2662 ; I'_3 = 0 ; I'_4 = -0,2662$$

$$I'_5 = -0,3765 ; I'_6 = -0,2662 ; I'_7 = 0 ; I'_8 = 0,2662$$

A soma das  $I_s$  é zero como deve ser para representar um corpo fechado:

$$C_p = \frac{(p - p_\infty)}{q_\infty} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

$$= \begin{pmatrix} 1.0000 \\ .7071 \\ .0000 \\ -.7071 \\ -1.0000 \\ -.7071 \\ .0000 \\ .7071 \end{pmatrix}$$



Figura 4.68 Perfil NASA LS(1) – 0417.

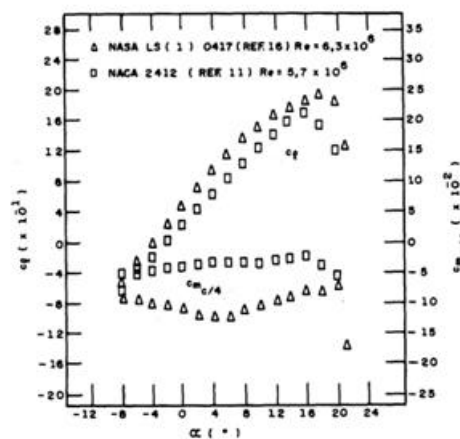


Figura 4.69 Comparação entre o perfil NASA LS (1) 0417 e NACA 2412.

## 4.18 Alguns aspectos de aerodinâmica aplicada

### 4.18.1 Aerofólios modernos de baixa velocidade

Durante os anos 1970, a NASA projetou vários tipos de aerofólios superiores aos aerofólios NACA. Os novos aerofólios foram projetados por computador usando técnicas numéricas similares aos métodos de painéis de fontes e vórtices com previsão numérica de efeitos viscosos como atrito e separação de escoamento. Teses experimentais foram conduzidos para validar os perfis numéricos. Um destes aerofólios LS(1) – 0417, para aviação geral é mostrado na figura 4.68. Observe que o aerofólio tem raio maior de borda de ataque, 0,08C em comparação ao 0,02C do aerofólio padrão para reduzir o pico do coeficiente de pressão perto do nariz. Também a superfície inferior próximo da borda de fuga é cuspide para aumentar o arqueamento e conseqüentemente a carga aerodinâmica desta região. As duas características aliviam a separação do escoamento sobre a superfície superior para ângulos de ataque grandes e assim produzem maiores coeficientes máximos de sustentação. Este tipo de aerofólio e também a família quando comparados com o aerofólio padrão de mesma espessura, figura 4.69, mostram aproximadamente:

i – 30% maior  $C_{l_{max}}$

ii – 50% aumento da razão de sustentação/ arraste ( $L/D$ ) no coeficiente de sustentação de 1,0. Este valor de  $c_l = 1,0$  é típico de coeficiente para ascensões para aviação geral e uma razão alta de  $L/D$  melhora o desempenho da ascensão.

### 4.18.2 Escoamento real sobre aerofólios

O estudo de escoamento invíscido em torno de aerofólios mostra resultados que concordam bem com as medidas experimentais. No caso real de separação de escoamento acontece sobre a superfície superior de aerofólio quando ultrapassa o ângulo de ataque crítico chamado de ângulo de estol. O aumento de  $\alpha$  além desse valor geralmente resulta na redução de sustentação. Abaixo do valor de estol, a relação é linear e mostra boa concordância com a situação real e os experimentos indicando que a teoria de escoamento invíscido mostra excelente concordância com os experimentos como mostrado na figura 4.70.

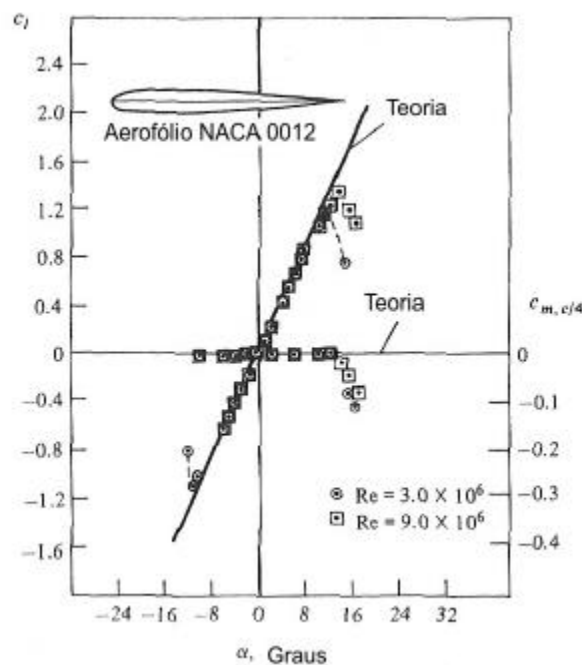


Figura 4.70 Comparação entre teoria e experimentos para aerofólio NACA 0012.



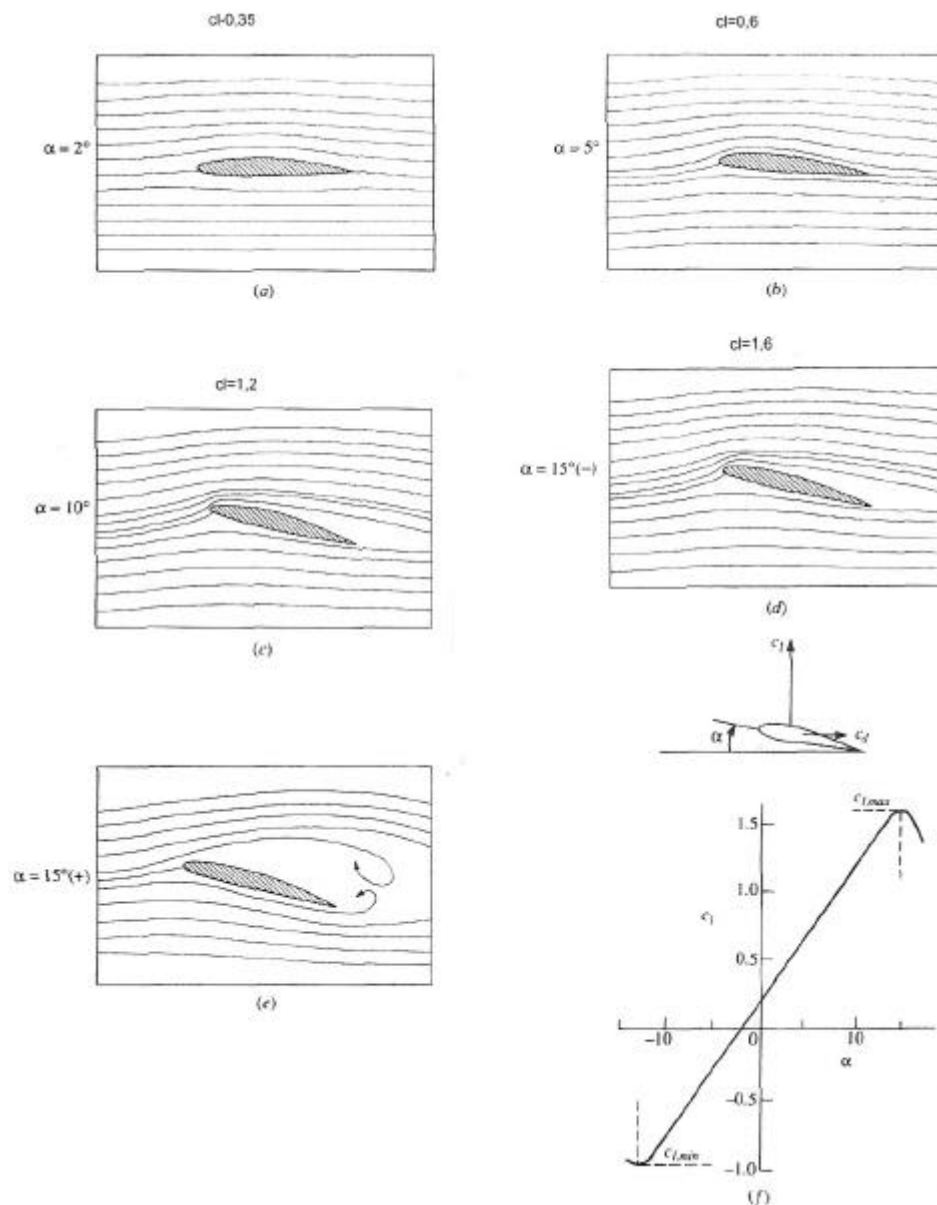


Figura 4.71 Estolamento de borda de ataque do aerofólio NACA 4412.

Neste capítulo foi estudado o escoamento inviscido em torno do aerofólio e corpos. Foi visto que a sustentação aumentou com o ângulo de ataque de forma linear até atingir um certo ângulo onde a separação ocorre na superfície superior do aerofólio e o aerofólio inicia o processo de estolamento. Este ângulo de ataque é chamado de ângulo de ataque de estolamento. Este processo viscoso e a teoria apresentada aqui não são adequados para explicar este processo. Entretanto, é possível discutir e investigar o problema físico de demonstrar os efeitos reais e como a sustentação do aerofólio é influenciado. Os campos de escoamento sobre o aerofólio NACA 4412 para diferentes ângulos de ataque são obtidos experimentalmente [50]. Pode-se observar que para pequenos ângulos de ataque  $\alpha = 2^\circ$ , na figura 4.71a, as linhas de corrente são relativamente não perturbadas das formas de escoamento livre e que  $C_l$  é pequeno. À medida que  $\alpha$  aumenta para  $\alpha = 5^\circ$ , como está na figura 4.34b, e assim, para  $10^\circ$  na figura 4.71c, as linhas de corrente mostram uma deflexão na região de borda de ataque e uma subsequente deflexão para baixo na região de borda de fuga. Observa-se que o ponto de estagnação

move-se progressivamente no lado inferior da superfície da asa.  $C_L$  aumenta nesta região com o aumento de  $\alpha$  de forma linear. Quando  $\alpha$  é aumentado para um valor ligeiramente menor que  $15^\circ$ , como está na figura 4.71d, o escoamento é ainda colado a superfície superior do aerofólio. Entretanto, à medida que  $\alpha$  aumenta um pouco além de  $\alpha = 15^\circ$ , uma separação massiva do escoamento do lado superior da asa ocorre como está na figura 4.71e. O pequeno aumento do ângulo de ataque da condição da figura 4.71d para a condição da figura 4.71e provocou uma separação brusca no escoamento com a redução correspondente na sustentação da asa como pode ser visto na figura 4.71f.

O fenômeno de estolamento mostrado na figura 4.71 é chamado de estolamento de borda de ataque e é uma característica de aerofólio fino com a razão de espessura entre 10 a 16% da corda. Como pode ser visto, a separação de escoamento ocorre abruptamente sobre a superfície superior inteira, como início na borda de fuga. Observa-se também a curva de sustentação que mostra um pico na região de  $C_{Lmax}$ , como está na figura 4.71 f.

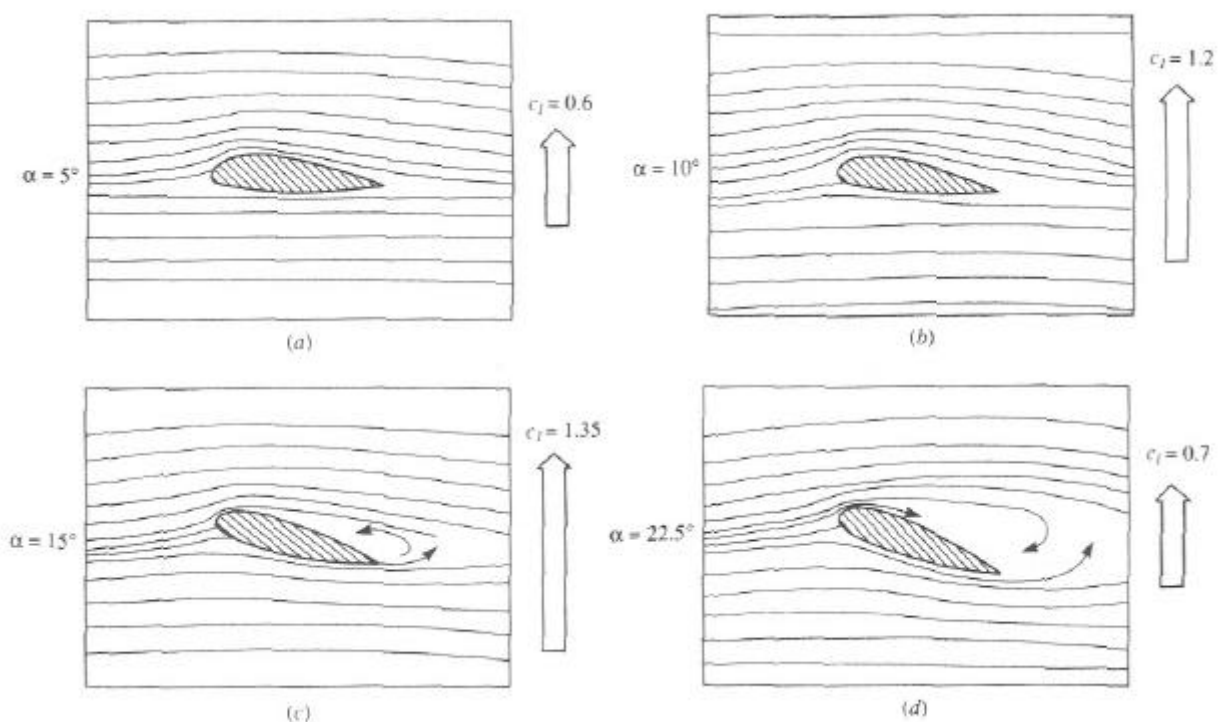


Figura 4.72 Estolamento de borda de fuga para aerofólio NACA 4421.

Um outro tipo de estolamento é o chamado estolamento de borda de fuga. Esta é uma característica típica de aerofólios grossos como NACA 4421 mostrada na figura 4.72. Da figura, pode-se observar um movimento progressivo e gradual da separação incluindo na borda de fuga na direção da borda de ataque, à medida que o ângulo de ataque aumenta. A curva de sustentação neste caso é mostrada na figura 4.72. A curva tracejada é do aerofólio NACA 4421, com o estolamento de borda de fuga. Desta figura 4.72 pode-se fazer os seguinte comentários:

- O estolamento da borda de fuga provoca uma declinação gradual perto de  $C_{Lmax}$  em contraste a redução forte e abrupta de  $C_L$  no caso de estol de borda de ataque;
- O valor de  $C_{Lmax}$  é muito alto como no caso de estolamento de borda de ataque
- Os dois aerofólios NACA 4412 e NACA 4421 têm conforme a teoria linear de aerofólio fino deve ter a mesma inclinação da curva de sustentação zero, isto é, o mesmo  $(dC_l / d\alpha)$  e o mesmo

$$\alpha_{L=0}.$$

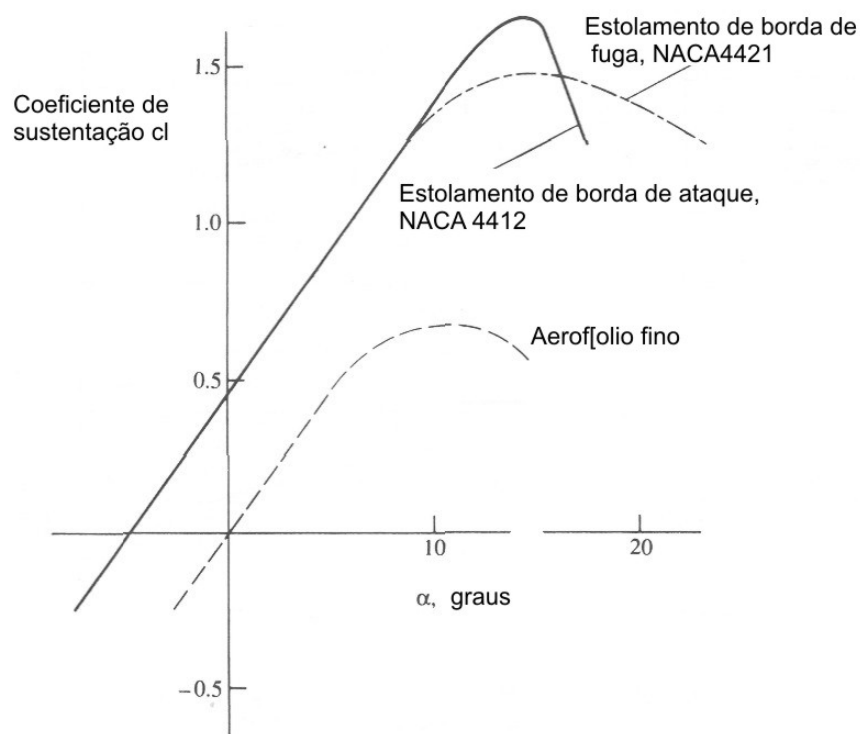
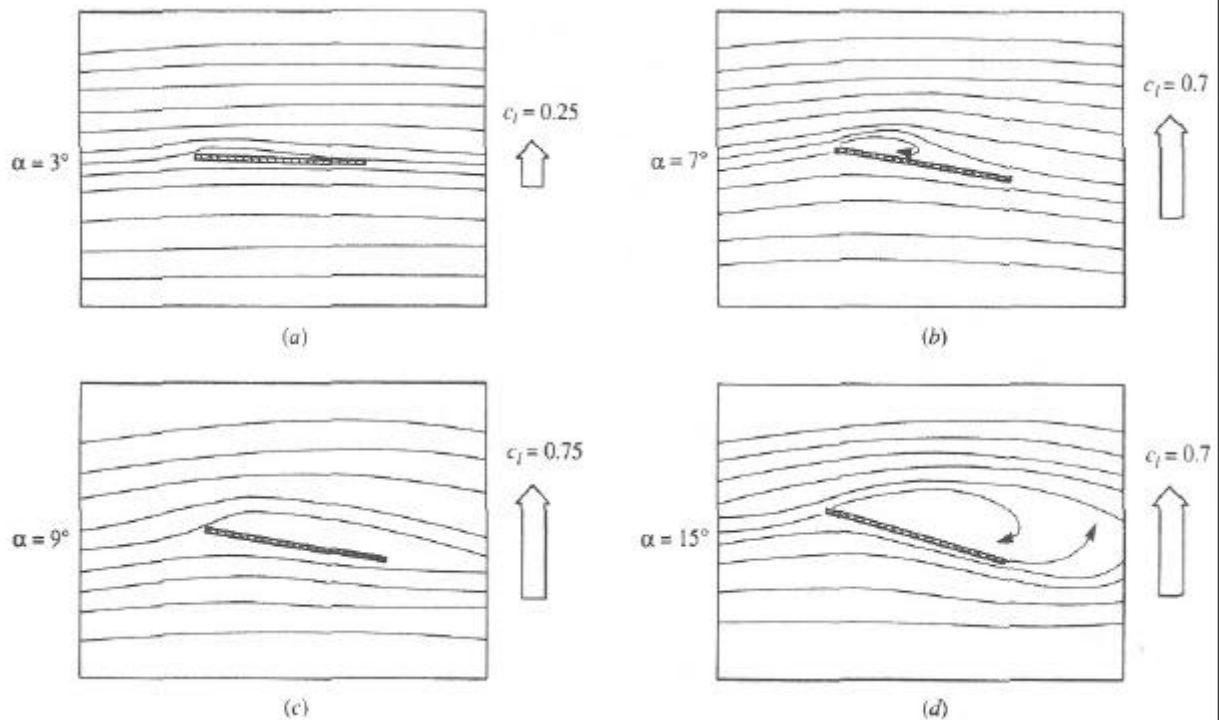


Figura 4.73 Curvas de coeficiente de sustentação de três aerofólios com diferentes comportamentos aerodinâmicos, estol de borda de fuga NACA 4421; estol de borda de ataque NACA 4412; estolamento de aerofólio fino.

Da comparação dos resultados das figuras 4.71 e 4.73 pode-se concluir que o efeito da espessura sobre as características do aerofólio, é separação da borda de ataque no caso de aerofólio fino e separação da borda de fuga no caso de aerofólio mais grosso NACA 4421.

Existe ainda um terceiro tipo de estolamento chamado de estolamento de aerofólio fino e é geralmente associado com escoamento em torno de aerofólios extremamente finos. Um exemplo extremo de aerofólio fino é a placa plana. A curva de sustentação da placa plana é mostrada com linha tracejada na figura 4.73. As linhas de corrente do escoamento em torno de uma placa com ângulo de ataque  $\alpha$  são mostradas na figura 4.74 para vários valores de ângulo de ataque  $\alpha$  a 2% da corda. A teoria incompressível mostra que a velocidade torna-se infinita numa quina côncava aguda; a borda de ataque de uma placa plana com ângulo de ataque é tal caso no escoamento real sobre uma placa plana demonstrado na figura 4.74, a natureza resolve este comportamento similar pela separação do escoamento na borda de ataque, mesmo no caso de ângulo de ataque muito pequeno. A figura 4.74a, é para  $\alpha = 3^\circ$  pode-se observar que uma pequena região de escoamento separado na borda de ataque. Este escoamento separado recolhe novamente a superfície superior formando um bolsão ou uma bola de separação na região próxima da borda de ataque. À medida que  $\alpha$  é aumentado o ponto de recolagem avança ao longo da superfície superior na direção de borda de fuga, isto é, a bola de separação torna-se cada vez maior, como ilustrado na figura 4.74b para  $\alpha = 7^\circ$ . No caso de  $\alpha = 9^\circ$ , a figura 4.74c, a bolha de separação estende quase sobre a placa plana inteira que com referência à figura 4.73 pode-se observar que este ângulo corresponde ao  $C_{l_{max}}$  da placa plana. Quando  $\alpha$  é aumentado mais ainda, uma separação total é estabelecida como está na figura 4.74d. A curva de sustentação para tal placa plana é mostrada na figura 4.73 e apresenta logo cedo um afastamento de comportamento linear em torno de  $\alpha = 30^\circ$  o que corresponde a formação da bolha de separação próxima a borda de ataque. Esta curva gradualmente se declina à medida que  $\alpha$  aumenta e mostra estolamento gradual e suave com valor de  $C_{l_{max}}$  muito menor que dos dois casos anteriores de aerofólios NACA 4412 e NACA 4421 da figura 4.73.

Assim, da figura 4.73 pode-se concluir que  $C_{lmax}$  é fortemente dependente da espessura do aerofólio e que uma certa distribuição de espessura é vital para obter alto valor de  $C_{lmax}$ . Além disto, a espessura influencia o tipo de estolamento e que aerofólios que são de maior espessura tendem a demonstrar menor valores de  $C_{lmax}$  para a família de aerofólios NACA 64-2xx em função da razão de espessura.



Figuras 4.74 Estolamento de aerofólio fino.

A figura mostra que a medida que a razão de espessura aumenta o  $C_{lmax}$  aumenta até atingir um valor máximo de espessura. Também é mostrado o efeito do número de Reynolds indicando que o valor de  $C_{lmax}$  aumenta com o aumento de  $C_{lmax}$ .

Outros aspectos importantes da aerodinâmica do aerofólio além da simples produção da sustentação incluem essencialmente a razão  $L/D$  e o valor de  $C_{lmax}$  que ambos influenciam no processo de projeto e a escolha de perfil para certa aeronave.

- i- A razão  $L/D$ . Um aerofólio eficiente produz uma boa sustentação com mínimo de arrasto, isto é, a razão  $L/D$  é uma medida da eficiência de um aerofólio.
- ii- O coeficiente de sustentação máxima  $C_{lmax}$ . Um aerofólio eficaz produz um alto valor de  $C_{lmax}$ , muito maior que de uma placa plana.

O coeficiente de sustentação máxima é importante para a aeronave como um todo porque o  $C_{lmax}$  determina a velocidade de estolamento da aeronave, onde a velocidade de estolamento é dada por:

$$V_{estol} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_{\infty} S C_{lmax}}}$$

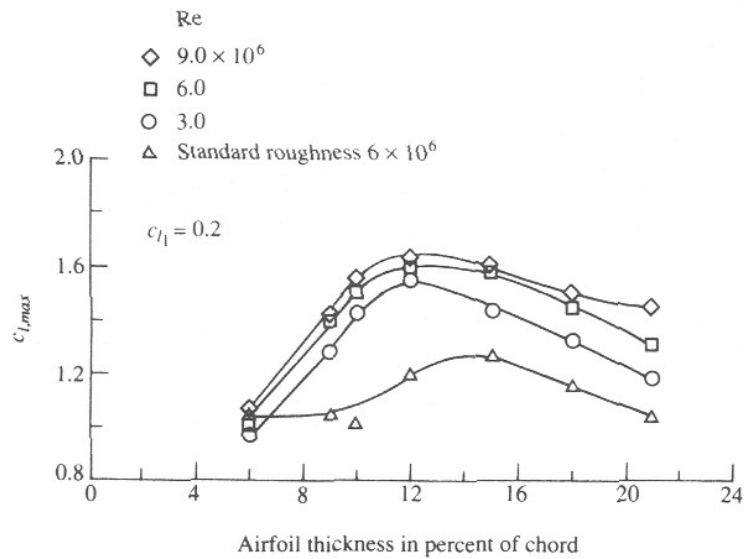


Figura 4.75 Efeito da espessura sobre o coeficiente máximo de sustentação para aerofólios series NACA 63-2xx,[11].

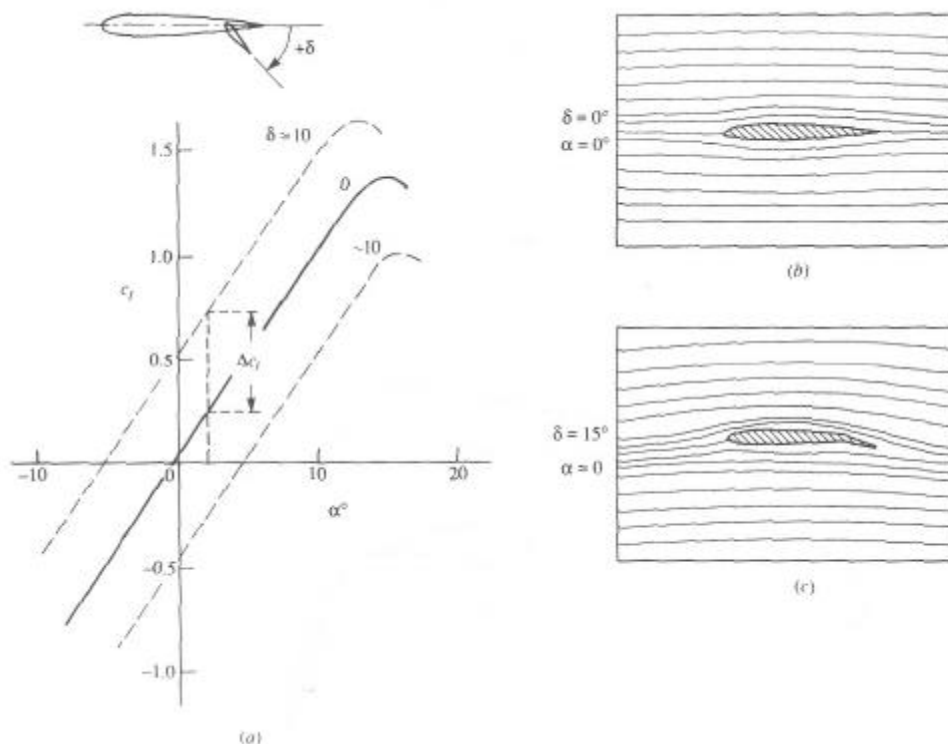


Figura 4.76 Efeito da deflexão de flap sobre as linhas de correntes.

Consequentemente existe um tremendo incentivo para aumentar o coeficiente de sustentação máxima do aerofólio, para obter menores velocidades de estolamento ou alto peso aproveitável para a mesma velocidade.

Também a manobra da aeronave, isto é, a menor curva e a maior taxa de virada dependem do alto valor de  $C_{Lmax}$  assegurado pelo projeto do aerofólio. Mas, um dado aerofólio operando num dado valor de número de Reynolds oferece certo valor de  $C_{Lmax}$  que é função da sua geometria e qualquer aumento de  $C_{Lmax}$  além deste valor deve ser fornecido por outros mecanismos, tais como os flaps de borda de ataque e fuga. Estes dispositivos chamados de dispositivos de alta sustentação permitem ter valor de  $C_{Lmax}$  além do valor de  $C_{Lmax}$  do aerofólio de referência dele mesmo.

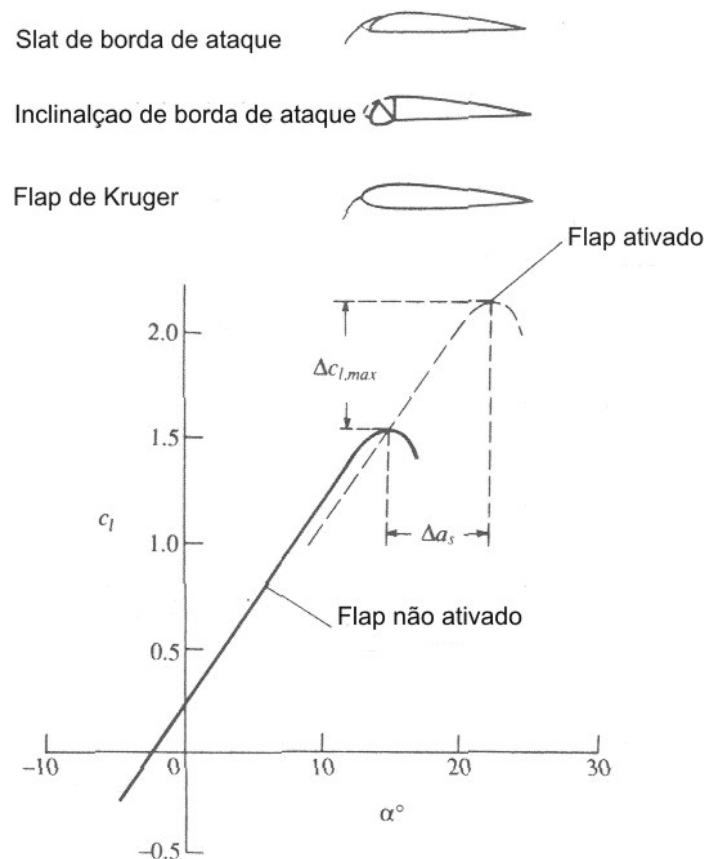


Figura 4.77 Efeito dos flaps de borda de ataque sobre o coeficiente de sustentação.

O flap de borda de fuga é simplesmente uma parte da borda de fuga do aerofólio articulado e modo que permite a deflexão para baixo com um ângulo  $\delta$ . A figura 4.76 mostra que o coeficiente de sustentação aumenta com o aumento do ângulo  $\delta$  que resulta num aumento no arqueamento efetivo do aerofólio. A teoria do aerofólio fino mostra que o ângulo de ataque da sustentação nula  $\alpha_{L=0}$  torna-se mais negativo com o aumento de arqueamento. Como pode ser visto na figura 4.76a, a curva sem deflexão de flap é deslocado para esquerda. Na figura 4.76a são apresentados os casos para  $\delta = \pm 10^\circ$ . Comparando as curvas para  $\delta = 0^\circ$  e  $\delta = 10^\circ$  pode-se observar que para um dado ângulo de ataque  $\alpha$ , o valor de  $C_l$  é aumentado por  $\Delta C_l$  e que o valor máximo  $C_{lmax}$  é aumentado e também aumentado e que o ângulo de ataque no qual este valor máximo ocorre é reduzido ligeiramente, isto é, o ângulo de ataque para  $C_{lmax}$  decresce com o aumento da deflexão de flap de borda de ataque. A mudança nas linhas de corrente quando o flap é defletido é mostrada na figura 4.76b e c. A figura 4.76b mostra o caso quando  $\delta = 0$  e  $\alpha = 0^\circ$ , isto é, escoamento simétrico. Entretanto, quando  $\alpha$  é mantido no valor zero e aumenta o ângulo da deflexão do flap  $\delta$  para  $\delta = 15^\circ$ , figura 4.76c, o escoamento torna-se assimétrico, isto é, as

linhas de corrente próximas da borda de ataque são defletidas para cima e defletidas para baixo próximas da borda de fuga e o ponto de estagnação move-se para a superfície inferior do aerofólio.

Os dispositivos de alta sustentação podem ser incorporados na borda de ataque, como está na figura 4.77. Estes podem ser na forma de slats, borda de ataque caída (drooping leading edge), ou flap de borda de ataque.

Considerando inicialmente o slat de borda de ataque que é simplesmente uma superfície curva defletida na frente da borda de ataque. Além do escoamento principal sobre o aerofólio, existe um escoamento secundário no espaçamento entre o slat e o aerofólio que acelera o escoamento na parte superior da asa principal evitando a separação e consequentemente, aumento o ângulo de ataque de estolamento que leva ao aumento do valor de  $C_{lmax}$ , como é mostrado na figura 4.77.

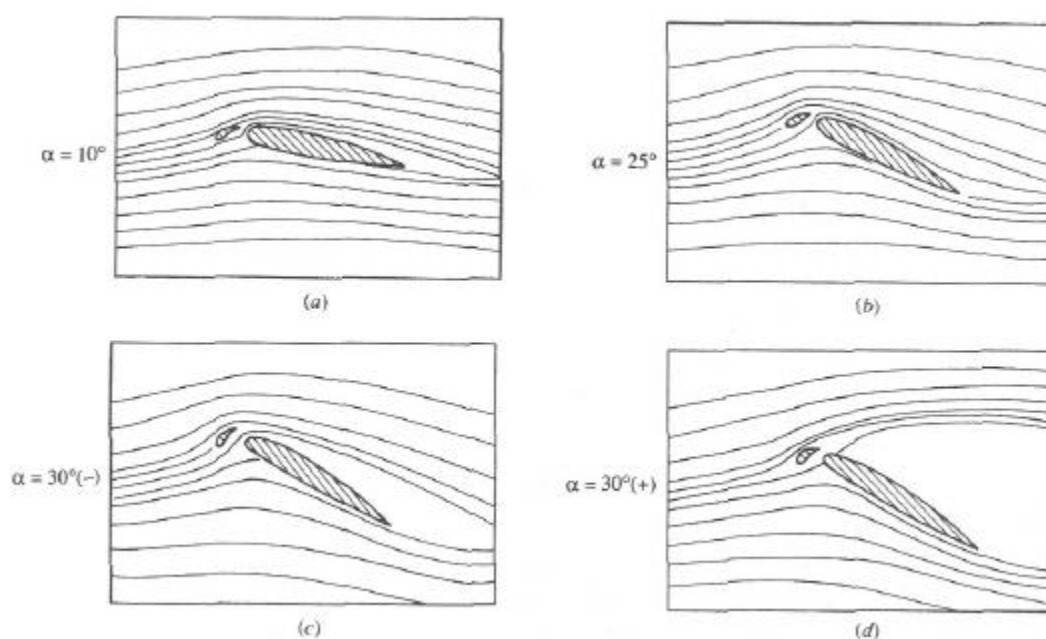


Figura 4.78 Efeito de slat de borda de ataque sobre as linhas de corrente de um aerofólio tipo NACA 4412.

Observa-se que a função do slat de borda de ataque é inerentemente diferente daquela do flap de borda de fuga. Não há mudança em  $a_{L=0}$ , mas a curva de sustentação é simplesmente estendida a um ângulo de ataque de estolamento maior, com o correspondente aumento no  $C_{lmax}$ .

As linhas de corrente associados com slat de borda de ataque estendido são mostradas na figura 4.78. O aerofólio é NACA 4412 com ângulo de estolamento do aerofólio de referência de  $15^\circ$ , isto é, sem slat.

Como pode ser visto até um valor de  $\alpha = 20^\circ$ , o escoamento é colado e continua até valores um pouco abaixo de  $30^\circ$ . Para valores ligeiramente acima de  $30^\circ$ , o escoamento separa bruscamente e o aerofólio entra no estado de estolamento.

#### 4.18.3 Dados adicionais dos aerofólios finos

Uma comparação entre os coeficientes de sustentação e arrasto de um aerofólio moderno NACA 64a212 e um aerofólio de placa arqueada de razão de aspecto 6 é mostrada na figura 4.79. enquanto figura 4.80 demonstra a superioridade do aerofólio sobre a placa arqueada como indicado pela razão  $L/D$ . Figura 4.77 mostra a variação da sustentação do aerofólio com o aumento de número de Reynolds indicando acréscimo da sustentação com o aumento de número de Reynolds.

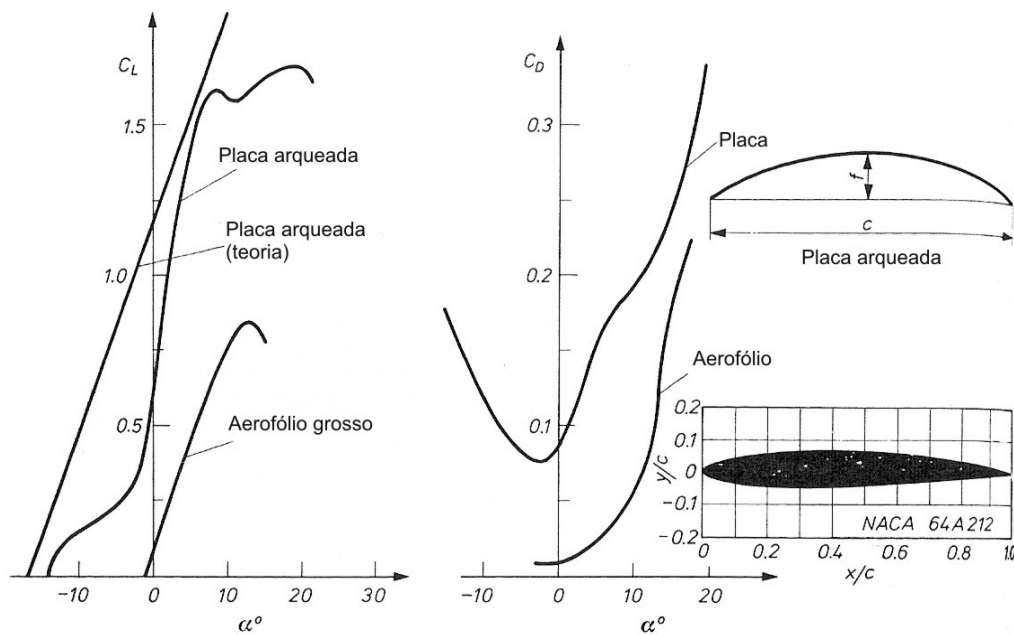


Figura 4.79 Comparação dos coeficientes de sustentação e arrasto de um aerofólio moderno e uma placa arqueada.

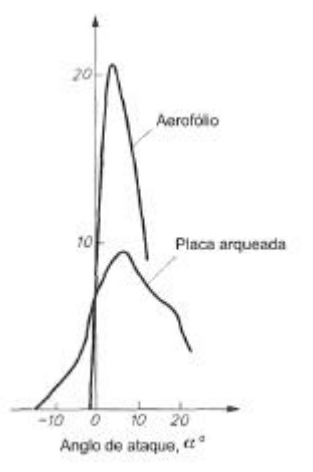


Figura 4.80 Comparação da razão de sustentação á arrasto de um aerofólio moderno e uma placa arqueada.

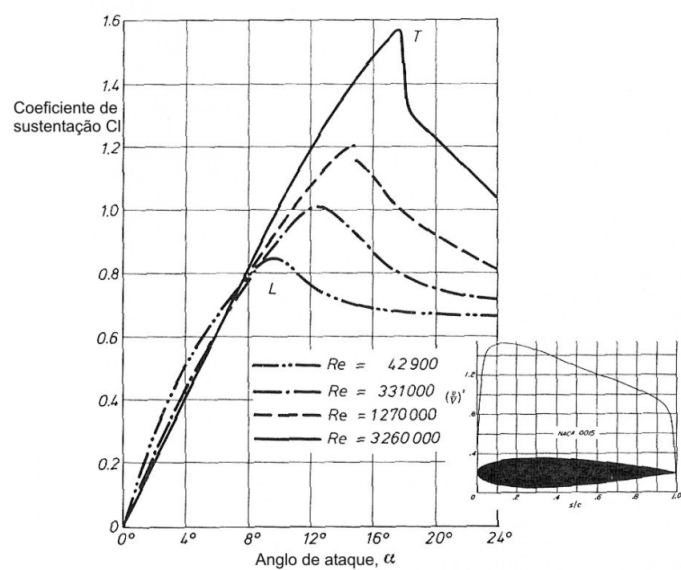


Figura 4.81 mostra a variação da sustentação do aerofólio com o aumento de numero de Reynolds.



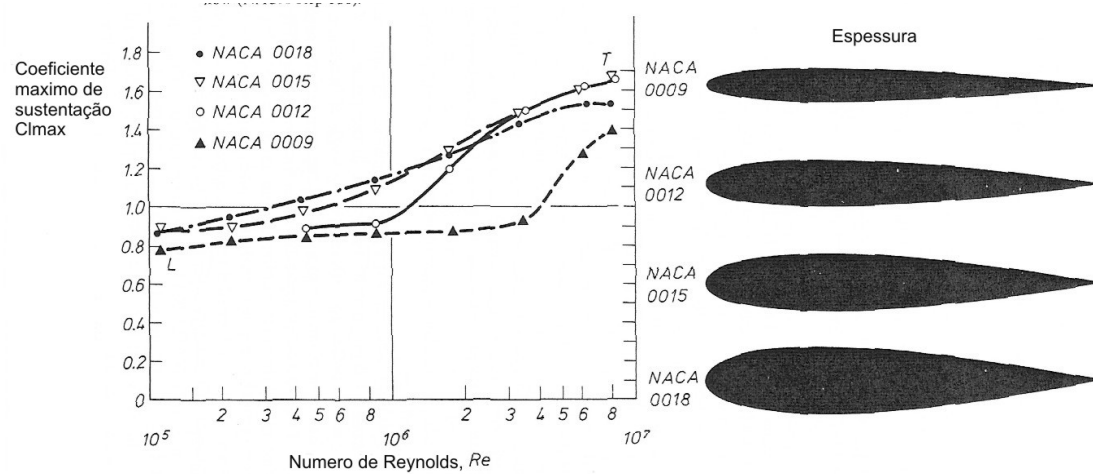


Figura 4.82 Efeito da variação de numero de Reynolds sobre o valor de  $C_{Lmax}$ .

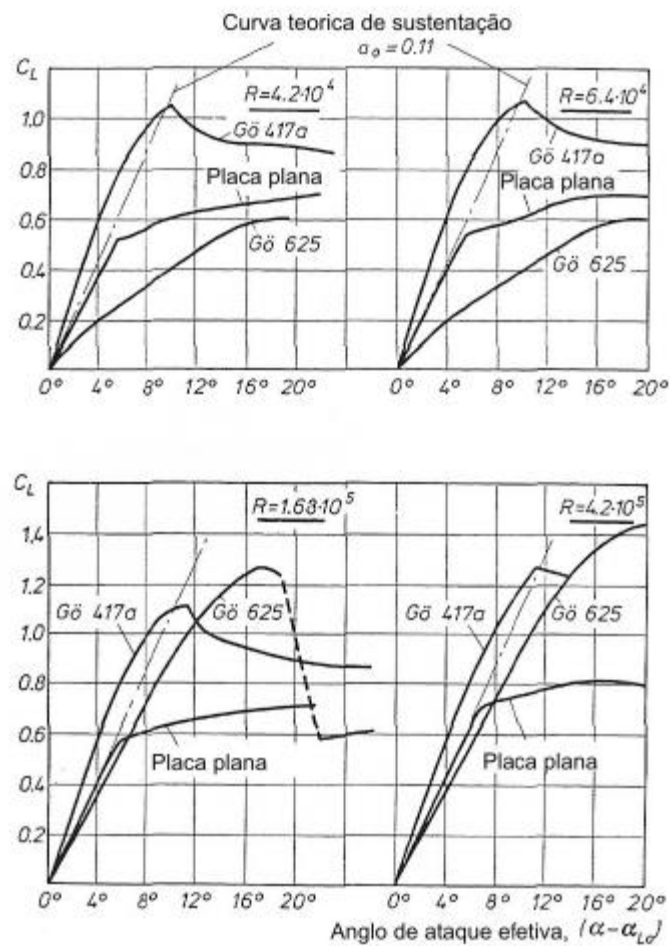


Figura 4.83 Variação do coeficiente de sustentação com o numero de Reynolds.

Variação do coeficiente de sustentação máxima com o número de Reynolds e espessura para aerofólios simétricos é mostrada na figura 4.82. Pode-se verificar que o valor de  $C_{Lmax}$  inicialmente aumenta de forma gradual e após um certo valor de número de Reynolds (totalmente turbulento) aumenta mais rápido e logo atinge um valor quase constante. Também pode-se observar que o valor de  $C_{Lmax}$  aumenta com o aumento da espessura do aerofólio confirmando o comentário anterior.

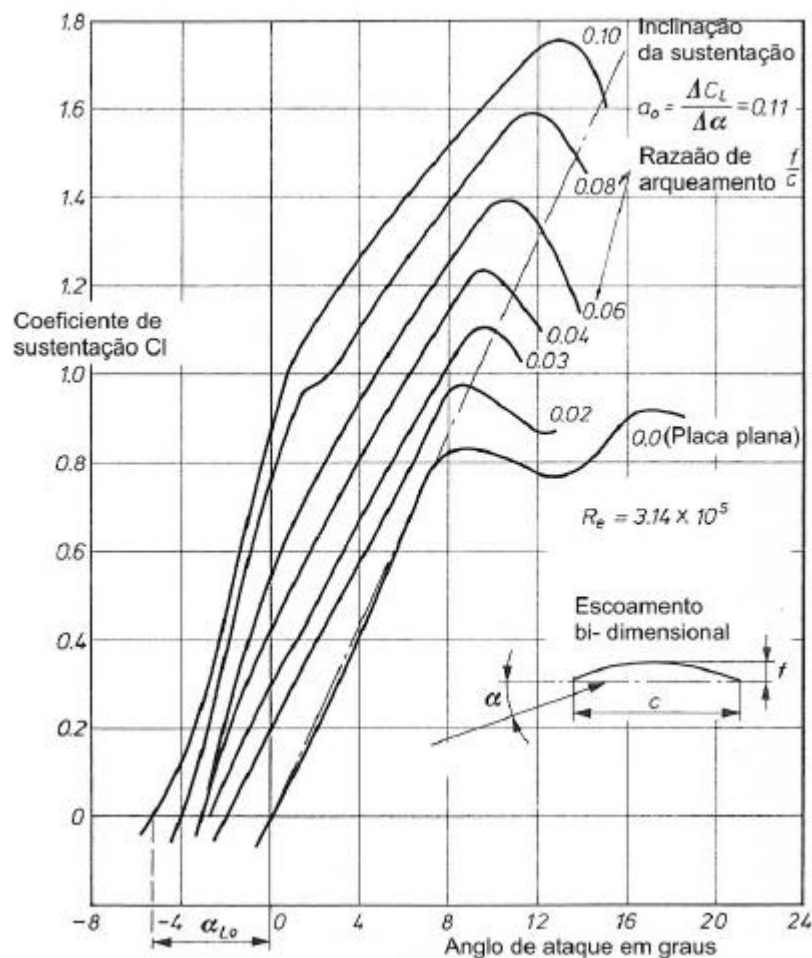


Figura 4.84 Variação do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque para aerofólio arco circular em função da razão de arqueamento.

Figura 4.83 mostra a dependência de alguns aerofólios sobre o número de Reynolds.

Figura 4.84 mostra a variação do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque para aerofólio de tipo arco circular de diferente razão de arqueamento incluindo o caso de placa plana. Como pode ser visto o ângulo de ataque para sustentação nula aumenta com o aumento da razão de arqueamento de acordo com a teoria.

Uma comparação entre os dados de arrasto do arco circular e aerofólio Joukowski mostra que o aerofólio arco circular fino produz cerca do dobro de arrasto do aerofólio do Joukowski mas somente até  $4^\circ$  após este valor os coeficientes são de mesmo ordem de valor.

Tabela 4.2 Resumo das equações apresentadas

	Aerofólio simétrico	Aerofólio arqueado
Distribuição de circulação Ao longo da corda, $\gamma$	$2aV_\infty \frac{1 + \cos q}{\sin q}$ $2aV_\infty \sqrt{\frac{c-x}{x}}$ onde $x = \frac{1}{2}c(1 - \cos q)$	$2V_\infty [A_0 \frac{1 + \cos q}{\sin q} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nq]$ onde $A_0 = a - \frac{1}{p} \int_0^p \frac{dz}{dx} dq$ $A_n = \frac{2}{p} \int_0^p \frac{dz}{dx} \cos nq dq$
Coeficiente de sustentação, $c_l$	$2pa$	$2p[a + \frac{1}{p} \int_0^p \frac{dz}{dx} (\cos q - 1) dq]$
Inclinação da curva de $c_l$ , vs. $\alpha$ , $m_0$	$2p$	$2p$
Posição do centro de pressão ao longo da corda, $x_{CP}$	$\frac{c}{4}$	$\frac{c}{4} - \frac{pc}{4} \frac{A_2 - A_1}{c_l}$
Coeficiente de momento em torno da borda de ataque, $c_{mLE}$	$-\frac{pa}{2}; -\frac{c_l}{4}$	$-\frac{1}{4}c_l + \frac{1}{4}p(A_2 - A_1)$
O centro aerodinâmico	$\frac{c}{4}$	$\frac{c}{4}$
Coeficiente de momento em torno do centro aerodinâmico, $c_{mac}$	0	$\frac{1}{2} \int_0^p \frac{dz}{dx} (\cos 2q - \cos q) dq$
Angulo de sustentação zero, $\alpha_{L0}$	0	$\frac{1}{p} \int_0^p \frac{dz}{dx} (\cos q - 1) dq$

### Problemas sugeridos

4.1 Um aerofólio bidimensional fino de corda  $a$  operando no seu coeficiente de sustentação ideal  $C_{Li}$ , tem carga linear chegando a zero na borda de fuga. Mostrar que a forma do aerofólio é dada por:

$$y/c = \frac{C_{Li}}{4p} \left[ \frac{x}{c} \left( \frac{x}{c} - 2 \right) \ln \frac{x}{c} - \left( 1 - \frac{x}{c} \right)^2 \ln \left( 1 - \frac{x}{c} \right) \right].$$

4.2 Um aerofólio de placa plana é provido com flap na borda de fuga com corda 100% da corda de aerofólio. Mostrar que a efetividade da flaps  $a_2/a_1$  é aproximadamente  $4/p \sqrt{E}$  para flaps de pequena corda em escoamento incompressível.

4.3 Um aerofólio fino com arqueamento na forma de arco circular com arqueamento máximo de 2,5%. Determinar o coeficiente de momento em torno do ponto  $\frac{1}{4}$  da corda, atrás da borda de ataque. A linha

de arqueamento pode ser aproximada pela relação  $y = k \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{x}{c} \right)^2 \right]$  onde a origem de  $x$  é tomada no ponto médio da linha de corda de comprimento  $c$ .

4.4 A linha de arqueamento de um aerofólio de arco circular é dado por:

$$\frac{y}{c} = 4h \frac{x}{c} \left( 1 - \frac{x}{c} \right)$$

Determine a distribuição de carga no caso de incidência  $\alpha$ . Mostre que o ângulo de zero sustentação  $\alpha_0$  é igual a  $-2h$  e separe os efeitos de arqueamento e incidência. Comparar os resultados com o caso da placa plana.

4.5. Considerem aerofólio cuja linha média de arqueamento é um arco circular, isto é, curvatura constante. O valor máximo de arqueamento médio é de  $kc$ , onde  $k$  é constante e  $c$  é a corda. A velocidade livre é  $V_\infty$  e o ângulo de ataque é  $\gamma$ . Na condição de  $k \ll 1$ , mostrar que a distribuição  $dy$  é aproximadamente

$$g = 2.V_\infty \left( a \frac{1 + \cos q}{\sin q} + 4.k.\sin q \right)$$

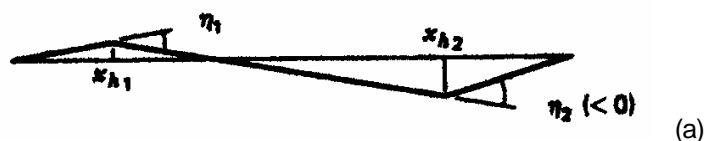
Determine também o ângulo de sustentação nula e o coeficiente de momento em torno do centro aerodinâmico.

4.6. A linha de arqueamento médio com borda de fuga refletido deve ter um ponto de inflexão. E, portanto, a equação mais simples que descreve esta linha deve ser cúbica e contendo quatro incógnitas. Duas condições de contorno são de velocidade nula nas bordas de fuga e de ataque. E assim a equação tem mais duas constantes arbitrárias e pode ser escrita na forma adimensional

$$\bar{z} = a[(b-1)\bar{x}^3 - b\bar{x}^2 + \bar{x}]$$

onde  $\bar{z} = z/c$  e  $\bar{x} = x/c$ ,  $c$  sendo a corda do aerofólio. Determine os valores de  $b$  e  $c_{mac}$  se o ângulo de zero sustentação do aerofólio é zero. Qual o valor de  $b$  para o qual  $c_{mac}$  é nulo? Graficar a linha média de arqueamento em cada caso.

4.7. Considere o aerofólio com duplo flap mostrado na figura (a), onde  $x_{h1} = 0,2c$  e  $x_{h2} = 0,8c$  defletidos nos ângulos  $\eta_1$  e  $\eta_2$  respectivamente. Para um dado valor  $\eta_1 > 0$  o sinal e o valor de  $\eta_2$  deve controlar  $c_{mac}$ . Mostrar que  $\eta_2 = 0,25 \eta_1$  é a condição para que  $c_{mac} = 0$ . Mostrar que para a combinação  $\eta_2 = 0$  e  $\eta_1 > 0$ ,  $\Delta c_{mac} < 0$ , isto é, um momento divisor atua, mas um pequeno valor negativo de  $\eta_2$  faz com que o valor de  $c_{mac}$  da combinação fique nulo.



4.8 A linha média de arqueamento de um aerofólio é composta de duas parábolas ligadas nos vértices como mostrado na figura (b). O valor máximo de arqueamento médio é de 4% da corda e a posição de arqueamento máximo atrás da borda de ataque é 20% da corda. Para este aerofólio, determine os valores de  $c_{mac}$  e  $\alpha_{L0}$ . Para um ângulo de ataque geométrico de  $3^\circ$ , determine o coeficiente de sustentação e o centro de pressão. No mesmo ângulo de ataque, um flap que é 15% da corda é defletido  $2^\circ$  para baixo. Determine o coeficiente de sustentação e o centro de pressão.



4.9. Usar o programa computacional deste capítulo para calcular a sustentação de um perfil NACA 2412 com ângulo de ataque  $\alpha = 8^\circ$ . Repetir o mesmo cálculo para o perfil NACA 0012 para ângulos  $\alpha = 0^\circ$ ,  $4^\circ$  e  $8^\circ$ . Também determinar a distribuição de pressão em torno do perfil. Compare os resultados de distribuição de pressão dos dois perfis para o ângulo de ataque de  $8^\circ$  para demonstrar o efeito de arqueamento para um perfil da mesma espessura.

4.10 Considere os dados do aerofólio NACA2412 e calcule a sustentação e o arrasto em torno da linha de  $c/4$  por unidade de envergadura quando o ângulo de ataque  $\alpha = 4^\circ$  e a velocidade ao nível do mar é 20 m/s e a corda do aerofólio é 0,66m.

4.11 Considere o aerofólio NACA 2412 com corda de 2m num escoamento livre de velocidade 50 m/s na condição padrão ao nível do mar. Se a sustentação por unidade de envergadura é 1353N. Qual o ângulo de ataque?

4.12 Considere um aerofólio simétrico fino com ângulo de ataque de  $1,5^\circ$ . Dos resultados da teoria de aerofólio fino, calcule o coeficiente de sustentação e o coeficiente de momento em torno da borda de ataque.

4.13 O aerofólio NACA 4412 tem linha e arqueamento médio dado por:

$$z/c = \begin{cases} 0,25[0,8(x/c) - (x/c)^2] & 0 \leq x/c \leq 0,4 \\ 0,11[0,2 + 0,8(x/c) - (x/c)^2] & 0,4 \leq x/c \leq 1 \end{cases}$$

Usando a teoria de aerofólio fino calcule:

a)  $\alpha_{L=0}$

b)  $C_l$  quando  $\alpha = 3^\circ$

c)  $c_{m,c/4}$  e  $x_{cp/c}$  quando  $\alpha = 3^\circ$

4.14 Para o aerofólio NACA 2412, os coeficientes de sustentação e momento em torno da linha de  $c/4$  no ângulo de ataque  $\alpha = 6^\circ$  são 0,39 e -0,045 respectivamente. No ângulo de ataque  $\alpha = 4^\circ$ , os coeficientes são 0,65 e -0,037 respectivamente. Calcule a localização do centro aerodinâmico.

## Bibliografia

John J. Bertin and Michael L. Smith, *Aerodynamics for Engineers*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

Ira H. Abbott, and Albert E. Von Doenhoff, *Theory of Wings Sections*, McGraw-Hill, New York, 1949; also, Dover edition, New York, 1959.

John D. Anderson, Jr., *Fundamentals of Aerodynamics*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.

Stevens W. A., Goradia, S. H., and Braden, J. A., Mathematical Model for Two-Dimensional Multi-Component Airfoils in Viscous Flow, MASA CR-1843, 1071.

Kuethe, A. M., and Schetzer, J. D., *Foundations of Aerodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959.

Young, A. D., "The Aerodynamic Characteristics of Flaps," ARC R&M 2622, 1953

Ashley, H., and Landahl, M., *Aerodynamics of Wings and Bodies*, Addison-Wesley, Reading Mass. 1965.

Donovan, J. F., and Selig, M. S., Low Reynolds Number Airfoil Design and Wind Tunnel Testing at

Princeton University, Low Reynolds Conference, Notre Dame University, June 5-7, 1989.

Eppler, R., and Somers, D. M., Airfoil Design for Reynolds Numbers between 50,000 and infinity, Notre Dame University, South Bend, Ind., June 1986.

Faulkner, V. M., "The Calculation of Aerodynamic Loading on Surfaces of Any Shape," ARC R&M 1910, 1943.

Jones R. T., "Properties of Low-Aspect -Ratio Pointed Wings at Speeds Below and Above Speed of Sound," NACA Report 835, 1946.

Roos, F. W., and Kegelman J. T., An Investigation of Sweep-Angle Influence on Delta-Wing Flows, AIAA paper 90-0383, January 8-11, 1990.

S. F. Hoerner, *Fluid Dynamic Drag*, Hoerner Fluid Dynamics, Brick Town, NJ, 1965.

S. F. Hoerner, and H. V. Borst, Fluid Dynamic Lift, Hoerner Fluid Dynamics, Brick Town, NJ, 1975.

Glauert, H., Elements of Airfoil and Airscrew Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1937.

Karamcheti, K. Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics, Wiley, New York, 1966.

Lighthill, M. J. "Higher Approximations," in High Speed Aerodynamic and Jet Propulsion, vol. 6, W.

R. Sears, ed., Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

Prandtl, L. Essentials of Fluid Dynamics, Hafner, New York, 1952.

Thwaites, B., ed. Incompressible Aerodynamics, Clarendon Press, Oxford, 1960.