Setor de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

UFPR

Sistemas de medição - TM-247

Base matemática

- Revisão de Transformada de Laplace
- Diagrama de blocos
- Função de Transferência

Revisão de Transformada de Laplace

O método da Transformada de Laplace é um método operacional que pode ser usado com vantagens para resolver equações diferenciais lineares.

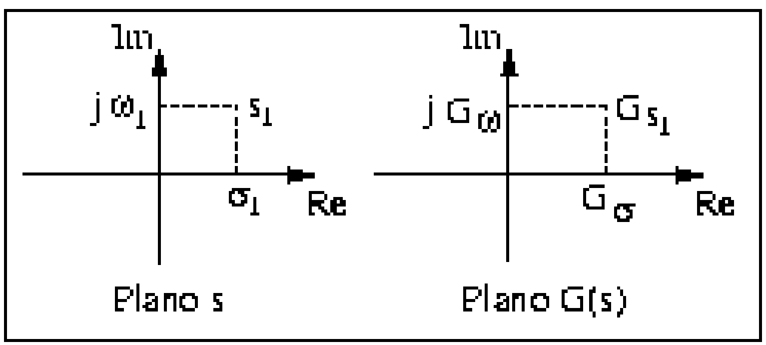
Usando transformadas de Laplace, pode-se converter muitas funções comuns, tais como sen ωt, cos ωt, e^{-t} sen ωt em funções algébricas de uma variável complexa s.

Não serão revistos detalhes matemáticos da Transformada de Laplace, simplesmente recordaremos operações que serão úteis para sistemas de medição, tanto para modelagem quanto para análise dos modelos obtidos.

Variáveis e funções complexas

Uma variável complexa s tem uma componente real σ e uma componente imaginaria $j\omega$, ou $s = \sigma + j\omega$.

Uma função complexa G(s) é um mapeamento da variável s, portanto, seu resultado também pode ser mostrado no plano complexo, no plano G(s).



$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 2.s + 3)} \qquad G(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

são exemplos de funções complexas.

Plano complexo s e G(s)

Álgebra de números complexos:

1) $(\sigma+j\omega)$ e $(\sigma-j\omega)$ são números complexos conjugados, logo:

   $(\sigma+j\omega)(\sigma-j\omega)=\sigma^2+\omega^2$ é um numero real.

2) $e^{j\theta}=\cos\theta + j.\mathrm{sen}\theta$

3) $e^{-j\theta}=\cos\theta - j.\mathrm{sen}\theta$

4) $\sigma+j\omega = r(\cos\theta + j.\mathrm{sen}\theta) = r.e^{j\theta}$

1. Definição da Transformada de Laplace

A transformada de Laplace de uma função no tempo, f(t), é a integral:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

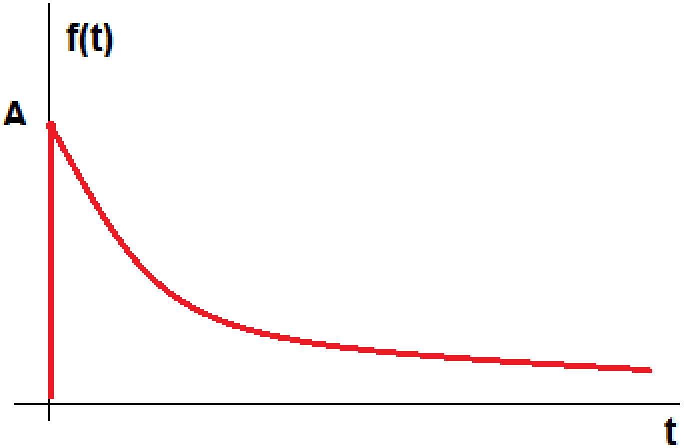
Exemplos da Transformada de Laplace

Exemplo 1 - Função exponencial.

Considere a seguinte função:

$f(t) = 0$ para $t < 0$

$f(t) = A.e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$



onde A e α são constantes.

A transformada de Laplace de f(t) é:

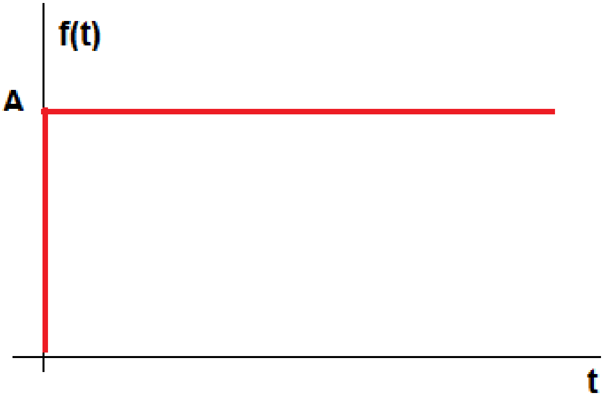
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{A}{s+\alpha}$$

Exemplo 2 - Função degrau

Considere a seguinte função degrau:

$f(t) = 0 \qquad \text{para} \quad t < 0$

$f(t) = A \qquad t \geq 0$



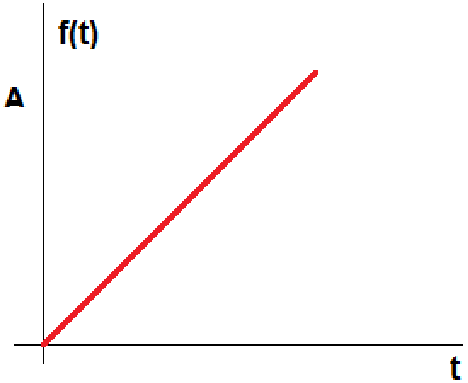
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{A}{s}$$

A função degrau cuja amplitude A for igual a 1, será chamada função degrau unitária, expressa por 1(t).

A transformada de Laplace da função degrau unitária será:

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

Exemplo 3 - Função rampa



Considere a seguinte função:

$f(t) = 0$ para $t < 0$

$f(t) = A.t$ para $t \geq 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{A}{s^2}$$

Exemplo 4 - Função seno:

$f(t) = 0$ para $t < 0$

$f(t) = A.\mathrm{sen}(\omega.t)$ para $t \geq 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{A}{s^2 + \omega^2}$$

Teoremas importantes da Transformada de Laplace

Teorema da diferenciação:

Primeira derivada:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s.F(s) - f(0)$$

Segunda derivada:

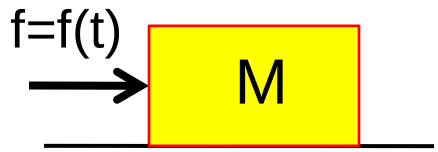
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2.F(s) - s.f(0) - f\,'(0)$$

Derivada de ordem n: $\mathcal{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right]$

$$= s^n.F(s) - s^{n-1}.f(0) - s^{n-2}.f\,'(0) - \dots - s.f^{(n-2)}{}'(0) - f^{(n-1)}{}'(0)$$

Exemplo de aplicação - Segunda Lei de Newton :

Massa M em repouso, sobre plano sem atrito:



A partir de t=0, aplica-se uma força f=f(t).

Se f(t) é igual a um degrau de altura A, determine a velocidade v(t) da massa a partir de t=0 :

Na condição ideal em que não existe atrito, a força resultante sobre a massa é igual a força aplicada f :

$f=f(t)=M.a(t)=M.dv(t)/dt$

$\mathcal{L}[\ f(t)\ ] = \mathcal{L}[\ M.dv(t)/dt\ ]$

$\mathcal{L}[\ f(t)\ ] = M\ \mathcal{L}[\ dv(t)/dt\ ]$

$A/s = M\ \mathcal{L}[\ dv(t)/dt\ ]$

$$\frac{A}{s} = M\,s.V(s)$$

$$V(s) = \frac{A}{M}.\frac{1}{s^2}$$

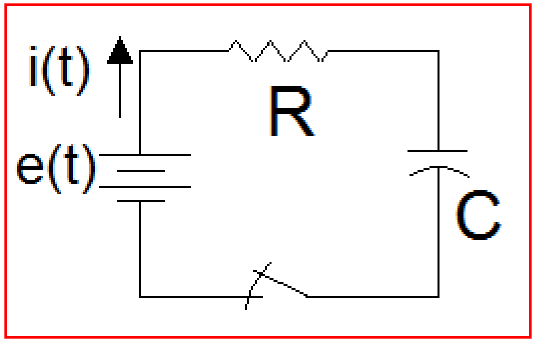
$V(t)=(A/M).t$ (Função Rampa)

Teorema da integral:

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} - \frac{\left.\left|\int f(t)dt\right|\right._{t=0\pm}}{s}$$

Exemplo de aplicação - Circuito elétrico :

Conectando um capacitor C em série a uma resistência R, e em seguida ligarmos uma fonte CC de valor e(t), no tempo t=0, pode-se calcular a corrente i(t) no circuito:



Equação do circuito:

$$e(t) = R.i(t) + \frac{1}{C}.\int i(t)dt$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$E(s) = R.I(s) + \frac{1}{C}.\frac{I(s)}{s}$$

$$E(s) = R.I(s) + \frac{1}{C}.\frac{I(s)}{s}$$

Considerando E(s) como degrau de altura E:

$$\frac{E}{s} = R.I(s) + \frac{1}{C}.\frac{I(s)}{s}$$

Multiplicando por Cs:

$$EC = RC.s.I(s) + I(s)$$

Isolando I(s):

$$I(s) = \frac{EC}{RC.s + 1}$$

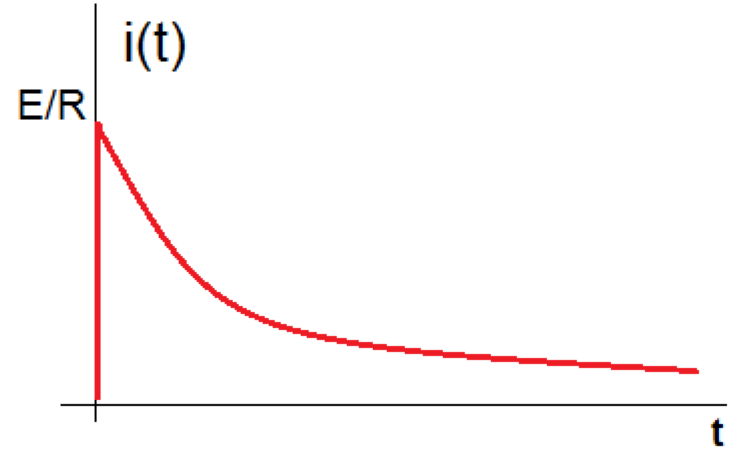
Ou:

$$I(s) = \frac{(E/R)}{s + (1/RC)}$$

Função exponencial:

$f(t) = 0$ para $t < 0$

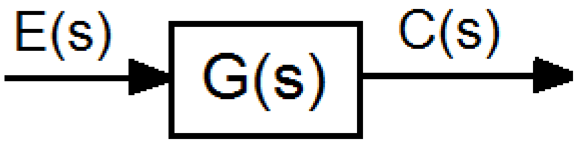
$f(t) = (E/R).e^{-(t/RC)}$ para $t \geq 0$



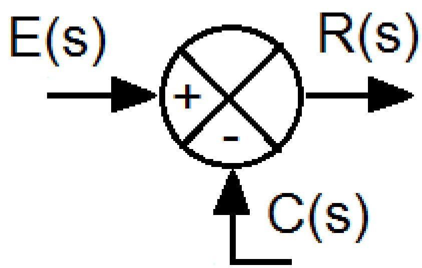
Diagramas de blocos

Diagrama de blocos é um método gráfico de representação de sistemas de equações lineares, particularmente útil em controle de sistemas.

É através de diagrama de blocos que são implementados os sistemas no software MATLAB-Simulink.



$$E(s).G(s)=C(s)$$

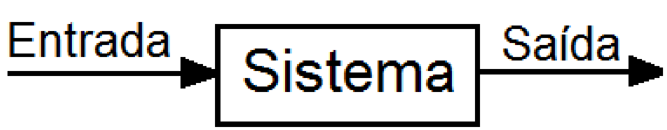


$$R(s)=E(s) - C(s)$$

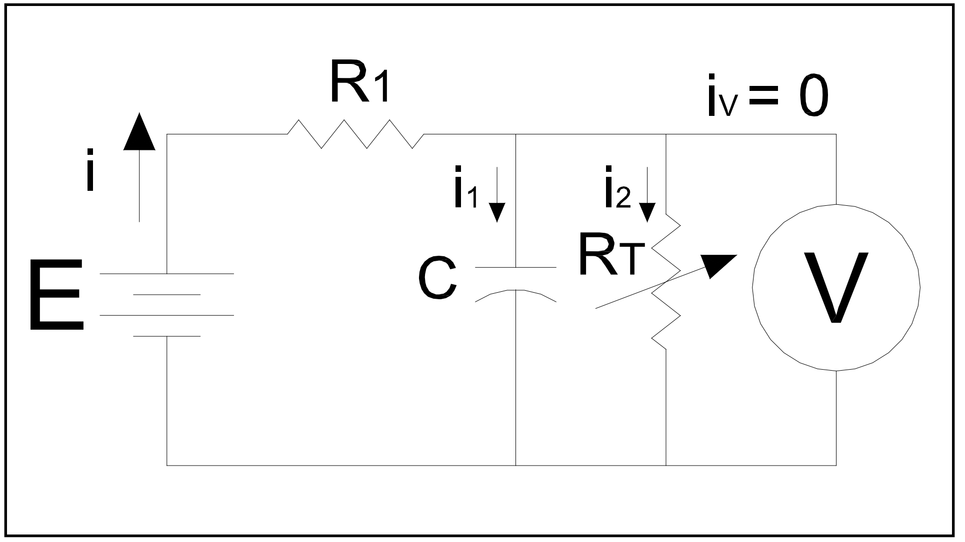
Detector de erro é a forma gráfica para representar a soma ou subtração.

Função de transferência

Função de transferência é uma função em (s) que multiplicado pela entrada de um sistema (ou um sub-sistema) nos fornece a saída deste sistema (ou sub-sistema).



Exemplo de aplicação - Circuito elétrico :



Aplicando as leis de Kirchoff :

$$E(t) = R_1.i(t) + \frac{1}{C}\int i_1(t).dt$$

$$0 = R_T i_2(t) - \frac{1}{C}\int i_1(t).dt$$

$$V(t) = R_T i_2(t)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

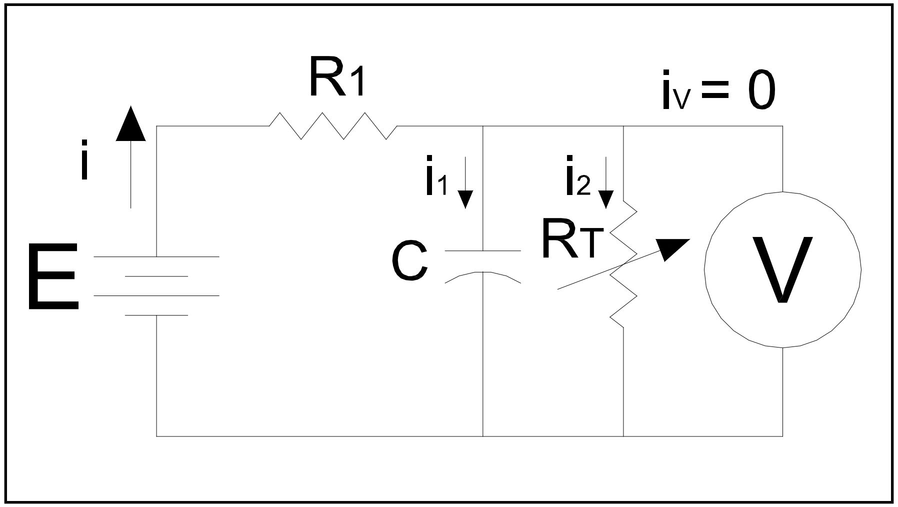
Aplicando Transformada de Laplace:

$$E(s) = R_1 I(s) + \frac{1}{Cs} I_1(s)$$

$$0 = R_T I_2(s) - \frac{1}{Cs} I_1(s)$$

$$V(s) = R_T I_2(s)$$

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$



Substituindo a quarta na primeira equação, e rearranjando:

$$E(s) = R_1\, I_2(s) + \left[\frac{1}{Cs} + R_1\right] I_1(s)$$

$$0 = R_T I_2(s) - \frac{1}{Cs} I_1(s)$$

$$V(s) = R_T I_2(s)$$

Rearranjando a segunda equação:

$$E(s) = R_1\, I_2(s) + \left[\frac{1}{Cs} + R_1\right] I_1(s)$$

$$I_1(s) = R_T Cs.I_2(s)$$

$$V(s) = R_T I_2(s)$$

Substituindo a segunda na primeira equação, e rearranjando temos:

$$E(s) = \left[R_1 R_T C.s + (R_1 + R_T)\right] I_2(s)$$

$$I_2(s) = \frac{V(s)}{R_T}$$

$$\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{R_T}{R_1 R_T C.s + (R_1 + R_T)}$$

$$\boxed{\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{R_T\,/(R_1 + R_T)}{R_1 R_T C.s\,/(R_1 + R_T) + 1}}$$

$$\boxed{\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}}$$