

Capítulo XVI

Vibrações dos sistemas biela-manivela

16.1 - Vibrações de flexão

Cada eixo tem uma frequência própria de vibração, que depende das dimensões e do número de apoios do mesmo. A determinação indireta dessa frequência pode ser feita por meio de fórmulas empíricas, de maneira aproximada.

Dependendo da forma da linha elástica, existem várias ordens de frequência de vibração. Essas vibrações podem ser excitadas pelas irregularidades dos momentos e forças que agem no mesmo. São porém menos importantes e críticas, no caso de máquinas a pistão, do que as vibrações de torção.

16.2 - Vibrações de torção

O estudo das vibrações de torção pode ser feito:

- 1) substituindo-se o sistema biela-manivela por um sistema equivalente no que diz respeito a elasticidade torsional;
- 2) calculando-se as frequências próprias de vibração desse sistema;
- 3) determinando-se as frequências excitadoras e as rotações críticas, avaliando-se suas periculosidades relativas.

1.- Redução do sistema a um sistema equivalente

a) redução dos comprimentos

Escolhe-se primeiramente um momento de inércia polar para o eixo do sistema equivalente; chamemo-lo de  $J_{p\text{red}}$ .

O ângulo de torção de um eixo é

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_p}$$

onde  $M_t$  é o momento de torção;  $l$  o comprimento;  $G$  o módulo de rigidez e  $J_p$  o momento polar de inércia.

Para que o ângulo de torção  $\varphi$  no sistema equivalente seja o mesmo, é necessário que se tenha

$$l_{red} = \frac{J_{p,red}}{J_p} l$$

onde  $l_{red}$  é o comprimento do eixo equivalente.

No caso de peças simétricas em relação ao eixo de rotação, o cálculo do comprimento equivalente não apresenta dificuldades; no caso de manivelas, porém, é necessário o uso de fórmulas empíricas. Assim, segundo Geiger,

$$l_{red} = (c + 0,4 h) + (a + 0,4 h) \frac{J_{p,red}}{J_k} + 0,773(r-2d) \frac{J_{p,red}}{J_w}$$

onde a, c, h, d e r têm o significado indicado na figura 16.1,

$$J_w = \frac{h b^3}{12}$$

$J_k$  = momento de inércia polar do pino da manivela =

$$= \frac{d^4}{32}$$

$z = 0$  para  $\frac{b}{d}$  entre 1,6 e 1,63

$z = 4$  para  $(b/d) = 1,49$

Segundo Carter:

$$l_{red} = (c + 0,8 h) + \frac{3}{4} a \frac{J_{p,red}}{J_k} + 1,274 \frac{J_{p,red}}{J_w}$$

b) redução de massa

Em geral se escolhe o raio da manivela " $r_0$ " para parâmetro na redução de massa. Vem, então:

$$m_{red} = m_{verd} \frac{i^2}{r_0^2} = \frac{J}{r_0^2}$$

onde  $i$  é o raio de giração da massa verdadeira.

Calculam-se ou medem-se os momentos de inércia pe-

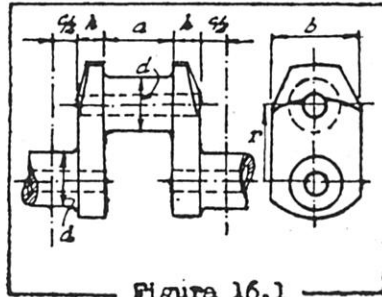
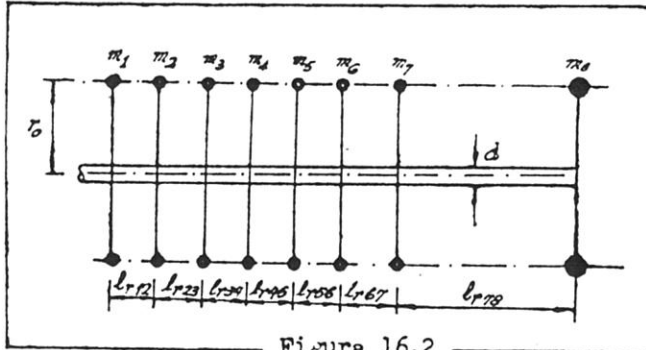


Figura 16.1

los processos clássicos. No caso das bielas, pistões e cruzetas, computa-se a massa da biela que tem movimento giratório puro e já fixada a distância  $r_0$  do eixo; as massas alternativas destas peças só intervêm no movimento do eixo quando o ângulo entre a biela e a manivela for diferente de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ ; obtém-se aproximação suficiente quando se considera metade das massas oscilantes como que girando em torno do eixo num raio  $r_0$

(Para um processo mais preciso ver List, volume VIII, 2ª parte, pg.165 e seguintes).

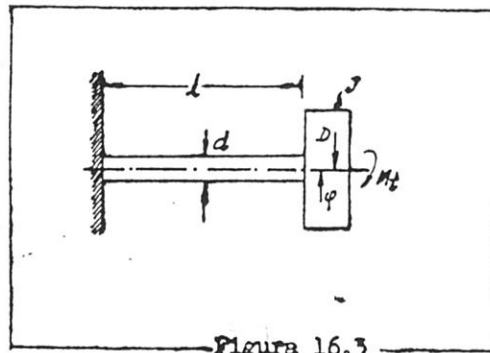


Obtidos as massas e os comprimentos equivalentes, o sistema resultante é aquele exemplificado na fig.16.2.

## 2.- Determinação da frequência de vibração própria

a) Eixo em balanço com massa única na extremidade livre (fig. 16.3).

A massa de momento de inércia  $J$  é deslocada de sua posição de equilíbrio de um ângulo  $\varphi$ , pela aplicação do momento de torção  $M_t$ . Em consequência da elasticidade do eixo haverá um momento igual e de sentido oposto



$$M_t = - D \varphi$$

proporcional ao ângulo  $\varphi$ , pois as deformações são pequenas e contidas na região onde é válida a lei de Hooke.

Este momento provoca uma aceleração angular de valor

$$\omega'' = \frac{M}{J}$$

Consequentemente

$$J \cdot \omega'' = - D \varphi$$

é a equação diferencial da oscilação; uma sua solução é

$$\varphi = \varphi_0 \text{ sen } (\omega_e \cdot t + \alpha).$$

Derivando  $\varphi$  duas vezes em relação ao tempo, obtém-se

$$\omega'' = -\omega_e^2 \cdot \varphi$$

e

$$\omega_e = \sqrt{\frac{D}{J}}$$

que é o valor da frequência de ressonância para este sistema;  $\omega_e$  é independente de  $\varphi_0$ .

Consideremos agora um ponto que dista  $r_0$  do eixo de rotação e no qual esteja concentrada a massa  $m$  (fig. ..

16.4). No ponto extremo da oscilação a massa está parada e há condição de equilíbrio. Logo há igualdade entre o momento elástico  $D\varphi_0$  e o momento devido à inércia  $T r_0$ .

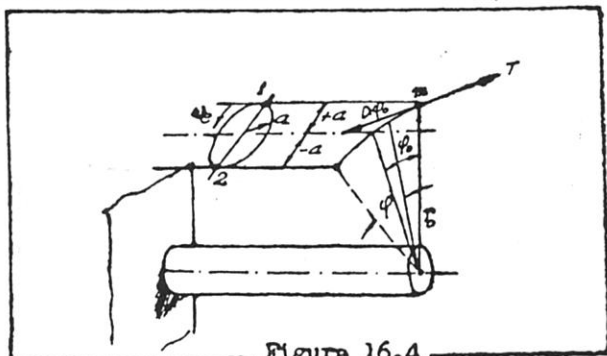


Figura 16.4

$$D\varphi_0 = T r_0 \quad D = \frac{T r_0^2}{a}$$

Como  $a = \varphi_0 r_0$  e  $J = m r_0^2$ , vem que

$$\omega_e^2 = \frac{D}{J} = \frac{T r_0^2}{a m r_0^2}$$

§

$$T = a m \omega_e^2$$

b) Caso de um eixo com uma massa em cada extremidade em oscilação livre

Torcendo-se as duas massas em sentido oposto e soltando-as em seguida, o eixo vai oscilar. Os momentos das forças de inércia estão em equilíbrio a qualquer instante, Por isso, na ocasião de atingir-se a amplitude máxima, pode-se escrever (fig. 16.5)

$$m_1 a_1 \omega_e^2 r_0 = m_2 a_2 \omega_e^2 r_0$$

ou

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

Conclui-se que as amplitudes são inversamente proporcionais às massas. O ponto nodal K fica mais próximo da massa mais pesada.

A geratriz da fig. 16.5 pode ser representada no plano pois para pequenos ângulos, este se confunde com a parede do cilindro. Obtém-se assim a fig. 16.6. A geratriz que se prolonga além das massas  $m_1$  e  $m_2$  é paralela ao eixo, pois não sofre de formações.

Note-se que existe uma só frequência e um só ponto nodal possíveis para este sistema.

c) Eixo com um número  $n$  de massas

Há  $n-1$  frequências diferentes de oscilação. Em cada massa a geratriz do cilindro oscilante sofre uma descontinuidade tomando o aspecto da fig. 16.7. Podemos escrever

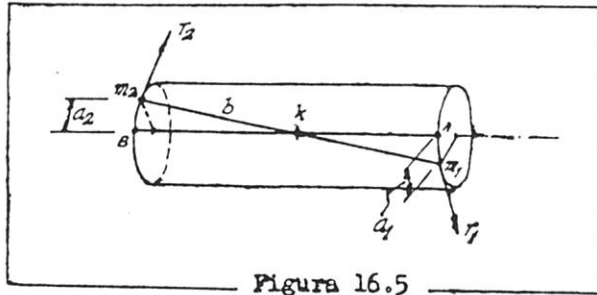


Figura 16.5

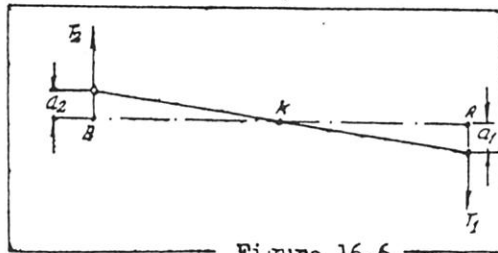


Figura 16.6

(fig. 16.8):

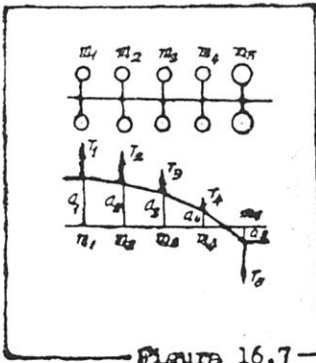


Figura 16.7

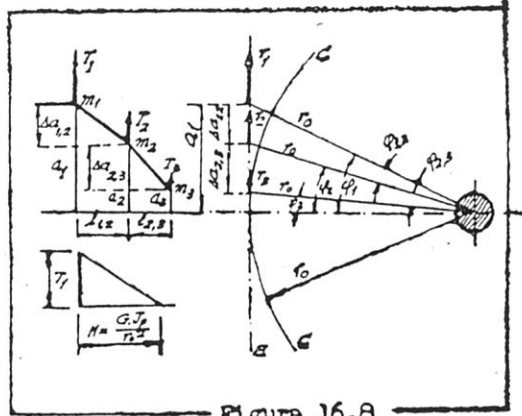


Figura 16.8

$$\varphi_{12} = \frac{\Delta a_{12}}{r_0} = \frac{M_t}{G \cdot J_{p\text{red}}} \cdot l_{12}$$

$$\Delta a_{12} = \frac{T_1 \cdot r_0}{G \cdot J_{p\text{red}}} \cdot l_{12} \cdot r_0$$

ou

$$\frac{\Delta a_{12}}{l_{12}} = \frac{T_1}{H}$$

sendo

$$H = \frac{G \cdot J_{p\text{red}}}{r_0^2}$$

Analogamente vem:

$$\varphi_{23} = \frac{\Delta a_{23}}{r_0} = \frac{M_t}{G \cdot J_{p\text{red}}} \cdot l_{23}$$

$$\Delta a_{23} = \frac{(T_1 + T_2) \cdot r_0}{G \cdot J_{p\text{red}}} \cdot l_{23} \cdot r_0$$

$$\frac{\Delta a_{23}}{l_{23}} = \frac{T_1 + T_2}{H}$$

ou

$$\frac{\Delta a_{34}}{l_{34}} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{H}, \text{ etc. } \dots$$

A determinação das frequências pode ser feita por um processo gráfico, da seguinte maneira:

As condições de equilíbrio exigem:

$$\Sigma T = 0$$

e geratrizes paralelas ao eixo, externamente às massas.

Admite-se inicialmente uma rotação qualquer  $n$  correspondente à frequência  $\omega = (2\pi.n/60)$ .

A amplitude  $a_1$  da massa  $m_1$  também é admitida (não influe na frequência); calcula-se então  $T_1 = m_1 a_1 \omega^2$ .  
Como

$$H = \frac{G \cdot J_{p_{red}}}{r_0^2}$$

é conhecido, a inclinação da geratriz entre  $m_1$  e  $m_2$  pode ser determinada (fig. 16.9) e obtém-se  $a_2$ .

Conhecido  $a_2$ , calcula-se

$$T_2 = m_2 a_2 \omega^2$$

e assim por diante, até obter-se  $T_n$ . Se a escolha da rotação inicial  $\bar{t}_i$  ver sido feliz,  $\Sigma T_i = 0$  será conseguido; normalmente porém haverá uma resultante  $R$  das forças  $T_i$ .

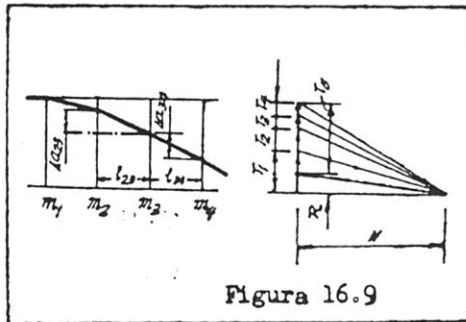


Figura 16.9

Repete-se o processo para diferentes rotações fazendo-se a representação da função  $R = R(n)$ ; obtém-se assim as rotações correspondentes a  $R = 0$  (fig. 16.10).

Em geral é suficiente obter duas ou três raízes de  $R$ , por serem as frequências mais altas de pouco interesse.

### 3.- Rotações críticas e suas periculosidades relativas

A rotação crítica é toda aquela para a qual há ressonância entre a vibração própria e a frequência de excitação devida às forças dos gases ou de inércia.

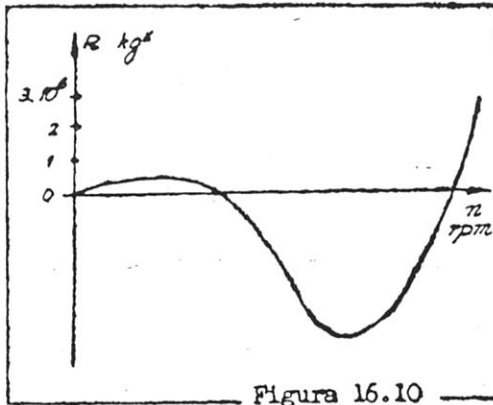


Figura 16.10

Já vimos que a análise harmônica do diagrama das forças tangenciais fornece componentes de ordem 1 a n no caso de motores 2T e de ordem 1/2 a n/2 no caso de motores 4T (ver tabela 15-III, pg. 254). Quando o produto do número de ordem pela rotação iguala uma frequência de vibração própria, tem-se uma rotação crítica. Como é necessário levar em consideração duas ou três frequências próprias e de 12 a 24 ordens de componentes excitadora, o número de rotações críticas é muito grande. Felizmente, porém, somente algumas oferecem realmente o perigo de provocarem quebra do eixo de manivelas.

A rotação crítica é obtida pela expressão

$$n_c = \frac{\text{frequência própria}}{\text{número de ordem}}$$

Não precisam ser considerados os números de ordem tão baixos que fornecem  $n_c$  maior que a rotação máxima e nem os altos que fornecem  $n_c$  menor que a rotação de marcha lenta.

As forças de inércia podem ser representadas, como vimos anteriormente, por 4 componentes senoidais, das quais as de 2ª e 3ª ordem têm maior amplitude. Se esses números de ordem não corresponderem a rotações críticas mais altas que a rotação máxima, é necessário somar seus valores aos componentes da força dos gases.

Um fenômeno de ressonância somente ocorre se há transferência de trabalho, pela força excitatriz para o sis-

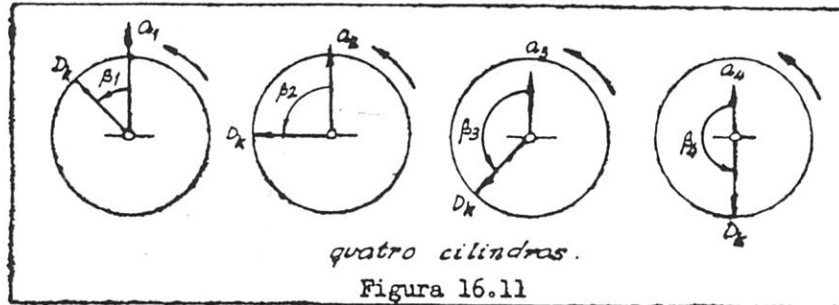


tama que vibra. Quando as frequências de vibração própria e de excitação coincidem, a força excitatriz fornece, em cada período, trabalho ao sistema. Esse trabalho vai se acumulando no sistema vibrante e, se não houver amortecimento, atinge um valor infinitamente grande. Caso haja amortecimento o corre equilíbrio quando o trabalho fornecido ao sistema em cada período é igual ao trabalho perdido por meio do amortecimento dentro do sistema.

Para ter-se uma idéia da amplitude relativa de vibração, basta então determinar o trabalho fornecido ao sistema pela força excitadora; esse trabalho é o produto da força excitadora pela deformação angular do eixo, medida no raio  $r_0$ .

A força excitadora pode ser representada por um vetor girante de módulo  $D_k$ , obtido na análise harmônica.

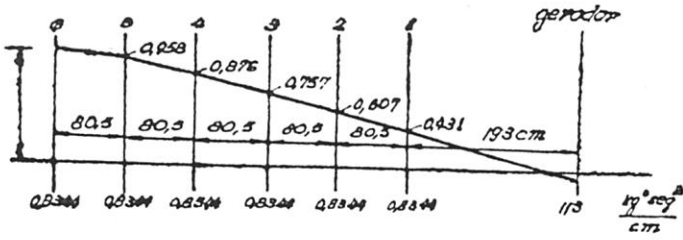
A deformação angular de cada manivela é conhecida através do diagrama da geratriz que fornece os valores  $a_i$  para as deformações angulares. As deformações angulares  $a_i$  máximas ocorrem todas ao mesmo tempo; estão portanto em fase, tendo porém amplitudes diversas. As forças excitadoras têm, por sua vez, amplitude constante (para uma determinada ordem harmônica), porém fases diferentes para as diversas manivelas (ver. fig. 16.11).



Pode-se mostrar que o trabalho realizado pela força excitadora de ordem  $k$  e amplitude  $D_k$  dentro de uma oscilação de amplitude  $a_i$  da manivela  $i$  é expresso por

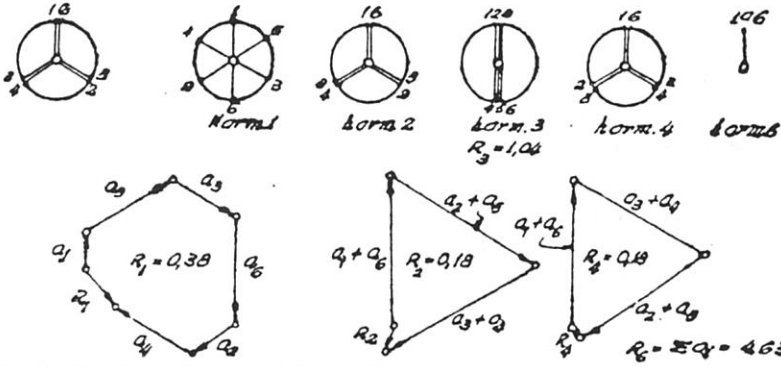
$$A_i = \pi a_i D_k \text{ sen } \beta_i \quad (\text{kg}^* \text{m})$$

onde  $\beta_i$  é o ângulo de fase da força em relação à deforma-



Forma de vibração própria do eixo manivelas

sequência de explosões 153624



sequência de explosões 135642

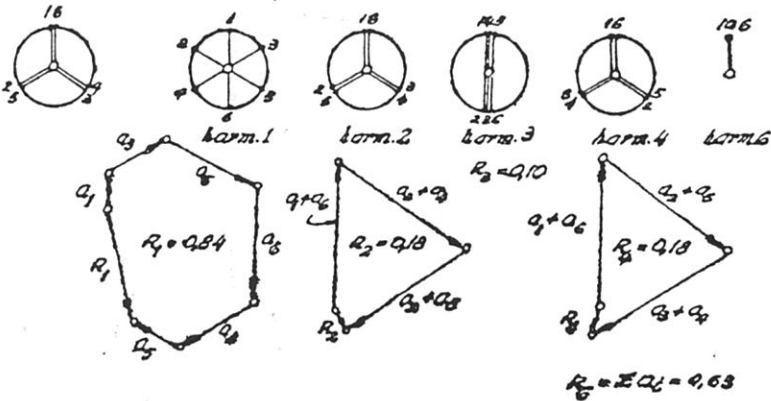


Figura 16.12

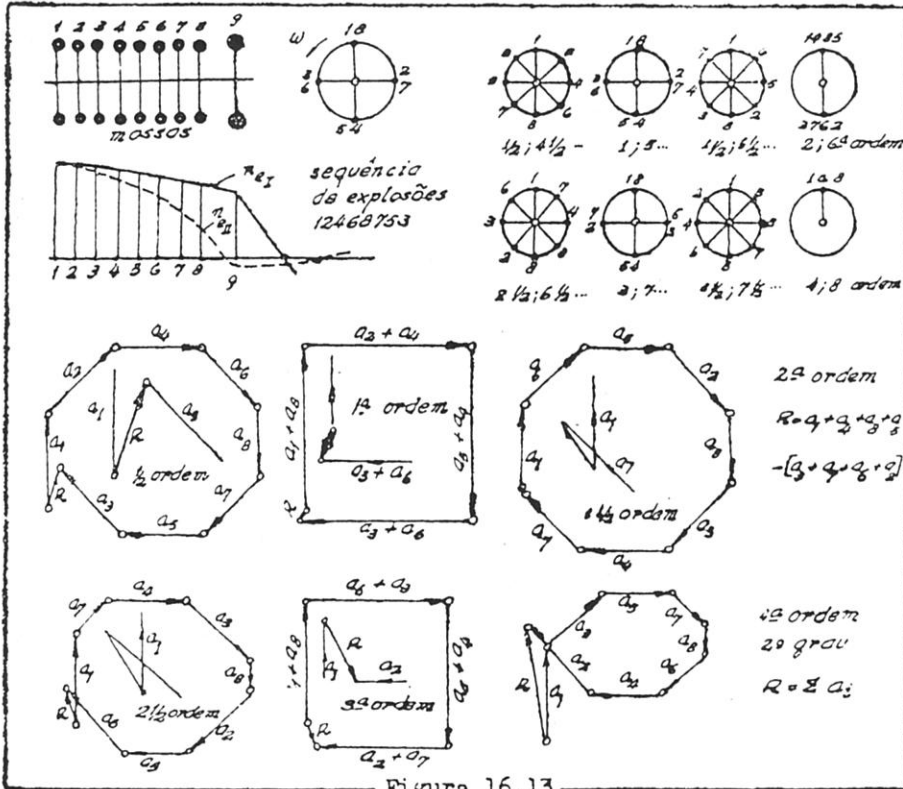


Figura 16.13

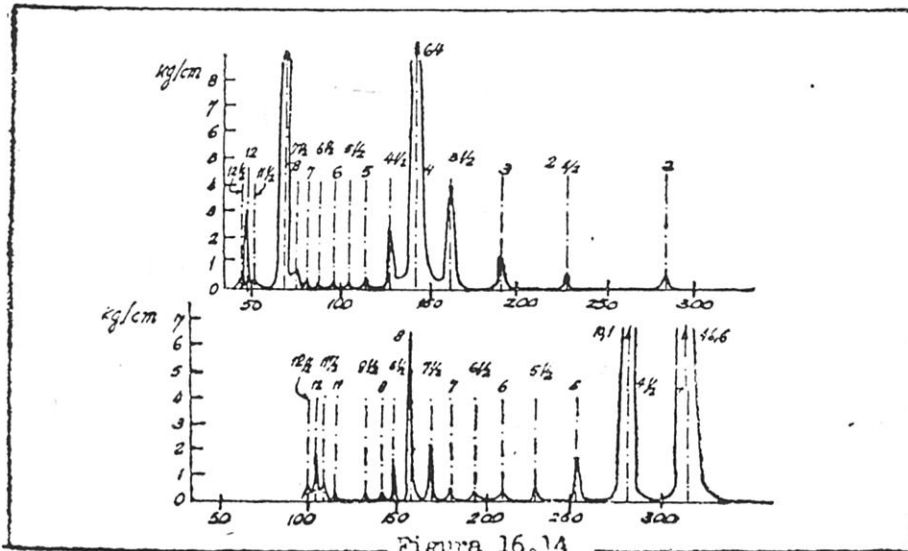


Figura 16.14

ção. (Den Hartog, J.P. - Mechanical Vibrations, McGraw-Hill).

Como conhecemos todos os valores da expressão  $A_i$ , podemos calcular o trabalho para cada manivela. O trabalho total correspondente a esta ordem harmônica é a somatória dos  $A_i$ .

Há um processo gráfico que simplifica bastante a obtenção dos trabalhos para os diversos harmônicos.

Podemos escrever

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = \pi D_k \sum_{i=1}^n a_i \operatorname{sen} \beta_i$$

A expressão  $\sum_{i=1}^n a_i \operatorname{sen} \beta_i$

obtem-se somando vetorialmente as deflexões  $a_i$ , nas direções das manivelas obtidas da estrela de manivelas correspondentes ao harmônico considerado. Pode-se mostrar que o vetor resultante  $R$  forma um ângulo de  $90^\circ$  com a força excitadora, de maneira que  $\operatorname{sen} \beta_R = 1$ . Como queremos obter apenas valores relativos para as deformações, o produto  $R D_R$  proporcional a  $A$ , é a medida relativa do trabalho envolvido na oscilação.

No exemplo da fig. 16.12 (motor Diesel 4T - 6 cilindros), se obteve as amplitudes relativas das oscilações de ressonância entre as componentes das forças dos gases desde a fundamental até a 6ª harmônica com a vibração própria de 1ª ordem do sistema. Foram selecionadas duas sequências de explosões, obtendo-se resultados diversos.

No exemplo da fig. 16.13 determinou-se as amplitudes das vibrações de 1ª e 2ª ordem para um motor Diesel de 8 cilindros. As rotações críticas podem ser observadas na figura 16.14.

### 16.3 - Maneiras de atenuar as vibrações do sistema biela-manivela

Pode-se influir nas vibrações, diminuindo o perigo de ressonância.

a) Escolhendo rotações de operação que fiquem distantes das rotações críticas. Estas somente seriam atingidas durante a partida ou a parada do motor, sem consequências devido ao curto tempo de duração destes regimes.

Essa medida somente é possível se o motor opera em rotação constante.

b) Alterando a frequência própria do sistema, quando a rotação de operação coincide com uma rotação crítica. Isto se consegue mudando as posições das massas, especialmente do volante, bem como aumentando o diâmetro dos eixos, o que aumenta a frequência. O mesmo efeito se consegue diminuindo as massas. Como um aumento do diâmetro dos eixos também aumenta as massas, nem sempre é possível aumentar a frequência própria para o valor que se deseja. Neste caso pode-se proceder de maneira inversa, colocando-se massas suplementares no eixo e usando um acoplamento elástico (eixo comprido) ou um acoplamento hidráulico entre o volante e o girabrequim.

Esta solução, porém, faz aumentar a influência das vibrações de 2ª ordem ou maior.

c) Mudando-se a influência das forças excitatrizes, especialmente as devidas à pressão dos gases, pela escolha conveniente da ordem de explosões. Isto porém somente tem efeito nos motores de 4 tempos, e em geral, o desaparecimento de uma rotação crítica implica no aparecimento de outras. Às vezes, porém, a grandeza relativas das deformações pode ser mais favorável para uma ordem de explosões do que para outra. Nos motores 2T não há influência da ordem de explosões sobre as rotações críticas.

O valor da amplitude de cada componente harmônica das forças dos gases não pode em geral ser alterado, pois sua grandeza depende da pressão dos gases; essa pressão depende por sua vez de uma série de fatores (forma da câmara de combustão, instante de ignição, etc.) que foram fixados para obter-se um bom rendimento termodinâmico.

Poder-se-ia influir na resultante das forças dos gases usando-se intervalos de ignição irregulares, especialmente nos motores em "V", fazendo-se o ângulo do "V" diferente daquele que dá uma sequência uniforme de explosões. Assim, por exemplo, mudando-se o ângulo do V de um motor de

2 x 4 cilindros de 90° para 60°, diminui-se a influência das vibrações das componentes dos gases de terceira ordem. As componentes de sexta ordem, porém, produzem vibrações maiores, nesta disposição dos cilindros e o equilíbrio dinâmico do motor é prejudicado, piorando-se a composição das forças de inércia.

- d) Influindo no amortecimento próprio do sistema, quando as medidas descritas nos parágrafos anteriores não são viáveis ou não trazem os resultados desejados.

Como se procura diminuir o atrito dos mancais ao mínimo, para conseguir um rendimento mecânico bom, o amortecimento próprio do sistema é geralmente muito baixo, especialmente quando as deformações se limitam ao regime elástico, no qual a energia fornecida às peças para deformá-las é praticamente toda devolvida quando se retorna à forma inicial.

Quando não há outro recurso recorre-se por isso à construção de aparelhos, para diminuir as vibrações. Como o aumento de amortecimento sempre implica em perda de energia transformada em calor, procura-se com estes aparelhos diminuir as vibrações sem introduzir grandes perdas devidas ao amortecimento.

Existem três tipos básicos de aparelhos: os amortecedores de ressonância, os de fricção e os extintores de vibrações.

#### 16.4 - Amortecedores de ressonância

Consistem de um sistema oscilatório adicional que entra em ressonância na rotação crítica que se deseja anular. O sistema total constituído pelo sistema biela-manivela e pelo amortecedor tem frequências próprias que ficam acima e abaixo da frequência do sistema sem amortecedor. O amortecedor tem um grau de amortecimento relativamente alto, de maneira que as amplitudes de ressonância devidas ao conjunto são baixas. Os resultados obtidos são aqueles apresentados na fig. 15.15.

A colocação dos amortecedores deve ser feita distante dos nós, de preferência num local que tenha grande am-

plitude de deformação.

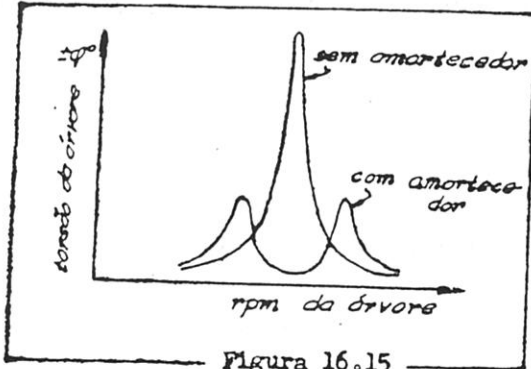


Figura 16.15

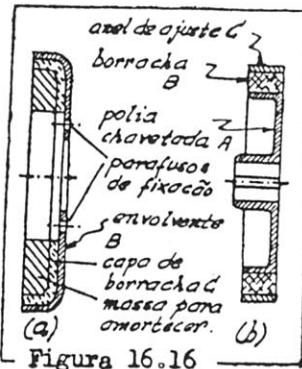


Figura 16.16

A construção mecânica mais usual é a de uma massa em forma de anel (às vezes a polia para acionar os acessórios) presa por um anel de borracha e um disco solidário com o girabrequim (fig. 16.16). A determinação das massas do anel e da espessura pode ser feita analiticamente ou de maneira experimental.

16.5 - Amortecedores de fricção

São constituídos de um sistema representado na fig. 16.17. As massas  $m_p$  estão ligadas ao girabrequim por atrito. Quando o eixo se deforma numa rotação crítica, as massas deslizam aumentando a frequência própria do sistema e diminuindo por isso as deformações. Se a rotação do eixo aumenta a vibração também aumenta porém é fortemente amortecida pelo trabalho transformado em calor por causa do deslizamento das massas  $m_p$ . Para rotações acima da crítica as massas funcionam novamente solidárias com o eixo.

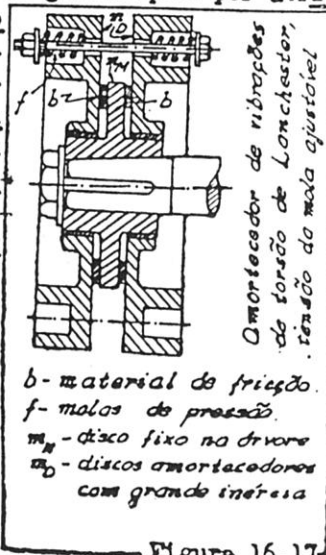


Figura 16.17

O aperto das molas  $f$  não deve ser demasiado, a fim de permitir deslizamento desnecessário com consequente perda de energia. O valor das massas  $m_p$  não é crítico, porque o amortecedor não constitui um sistema

ressonante; o momento de deslizamento tem que estar, porém, em certa relação com as massas.

Foram construídos amortecedores, desse tipo, que têm o momento de atrito condicionado à força centrífuga, embora que essa dependência não corresponde às necessidades reais.

16.6 - Extintores de vibração (Pêndulo de Sarazin)

Consiste num pêndulo preso a um ponto distante  $L$  do centro de rotação (fig. 16.18).

Este pêndulo sofre os efeitos da força centrífuga  $F$  devida à rotação do eixo, e efeitos estes que tornam a aceleração da gravidade desprezível.

$F$  se decompõe numa força  $P$  na direção do pêndulo e uma outra,  $Q$ , que se opõe ao movimento do pêndulo:

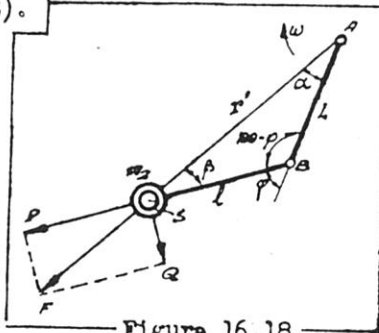


Figura 16.18

$$Q = F \text{ sen } \beta = m_2 r' \omega^2 \text{ sen } \beta$$

O momento de  $Q$  em torno da articulação do pêndulo  $B$  é

$$M = Ql = m_2 r' l \omega^2 \text{ sen } \beta$$

Mas

$$r' \text{ sen } \beta = L \text{ sen } \varphi$$

e

$$M = m_2 l L \omega^2 \text{ sen } \varphi$$

A aceleração tangencial de  $m_2$  é

$$t' = l \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

e o momento devido à aceleração tangencial

$$M' = m_2 l^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$



Pela condição de equilíbrio.

$$M + M' = 0$$

ou

$$m_2 \cdot l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + m_2 \cdot l \cdot L \omega^2 \operatorname{sen} \varphi = 0$$

e dividindo por  $m_2 \cdot l \neq 0$ , vem

$$\frac{l \cdot d^2 \varphi}{dt^2} + L \omega^2 \operatorname{sen} \varphi = 0$$

Para pequenos valores de  $\varphi$   $\operatorname{sen} \varphi \approx \varphi$  e

$$\frac{l \cdot d^2 \varphi}{dt^2} + L \omega^2 \varphi = 0$$

Uma solução desta equação diferencial é

$$\varphi = \varphi_0 \operatorname{sen} (\omega_2 \cdot t + \alpha)$$

equação de um movimento pendular harmônico de amplitude  $\varphi_0$  onde

$$\omega_2^2 = \frac{L}{l} \omega^2$$

ou

$$\omega_2 = \omega \cdot \sqrt{\frac{L}{l}}$$

Como se vê o período do pêndulo é proporcional à rotação, podendo ser dimensionado para entrar em ressonância com qualquer harmônico das forças dos gases.

Se  $k$  for a ordem do harmônico angular, ter-se-á:

$$\omega_2 = k \omega = \omega \cdot \sqrt{\frac{L}{l}}$$

donde

$$\frac{L}{l} = k^2$$

Este tipo de pêndulo é muito usado em motores estréla. Nesse tipo de motor a ordem do harmônico que provoca vibrações apreciáveis é  $(z/2)$  sendo  $z$  o número de cilindros.

No caso de 9 cilindros, por exemplo,  $k = 4,5$  e

$$\frac{L}{l} = 4,5^2 = 20,25$$

ou

$$l \approx \frac{L}{20}$$

$L$  não pode em geral ser maior do que o raio da ma nívela. Se este for de 8 cm, vem

$$l = \frac{r}{20} = \frac{8}{20} = 0,4 \text{ cm}$$

A maneira prática de se construir um pêndulo com este comprimento é articulando os contrapesos do eixo de mani velas como mostra a fig. 16.19. Desta maneira o pêndulo tem uma massa elevada, o que limita sua amplitude de oscilação. Esta construção foi idealizada por Chilton.

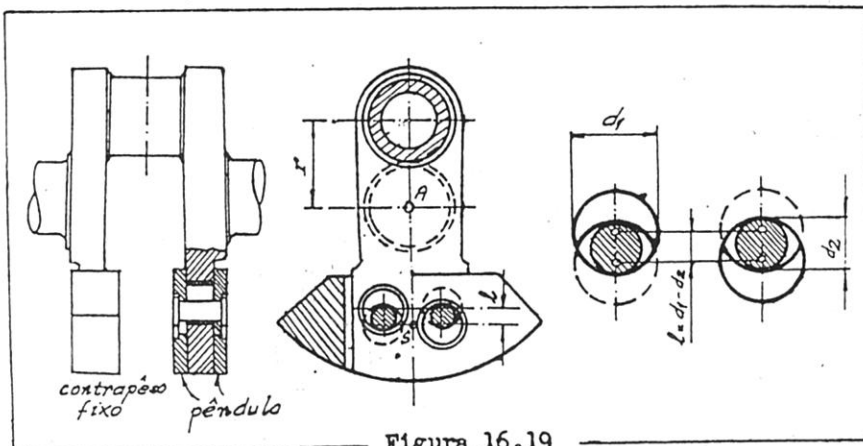


Figura 16.19

Interessante é notar que o pêndulo de Sarazin faz com que as frequências próprias de vibração do sistema sejam funções da rotação. O pêndulo não cria nenhuma rotação crítica nova, como no caso do amortecedor de ressonância, mas desloca as rotações críticas do sistema devido a variação das frequências próprias com a rotação.

Pode-se usar um pêndulo para cada harmônico que se deseja anular.