



Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção sob carregamentos de fadiga

Aula 3

Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção sob carregamentos estáticos

Pela teoria da tensão máxima de cisalhamento (Tresca)

$$d = \left[\frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{\tau_{adm}} \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \tau_{adm} = \frac{S_y}{2}$$

$$d = \left[\frac{32}{\pi} \cdot \frac{N}{\sigma_{esc}} \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

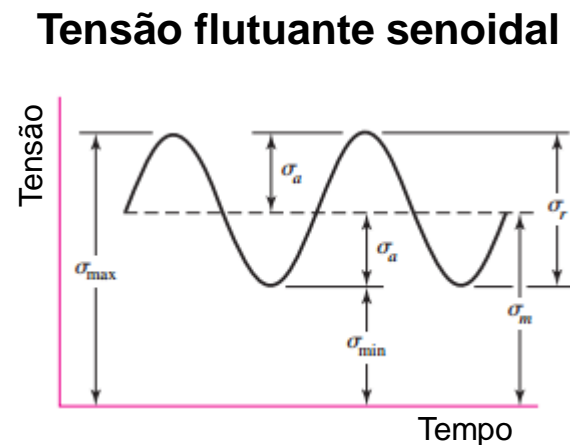
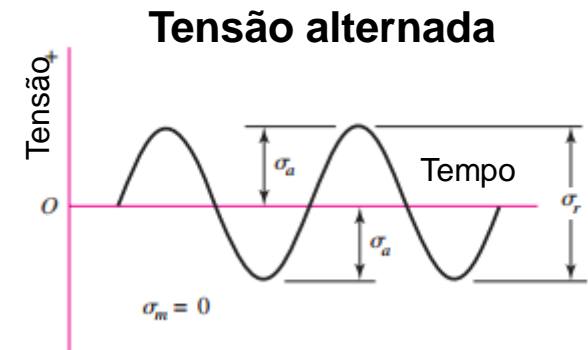
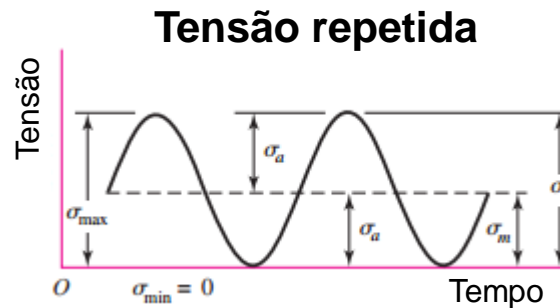
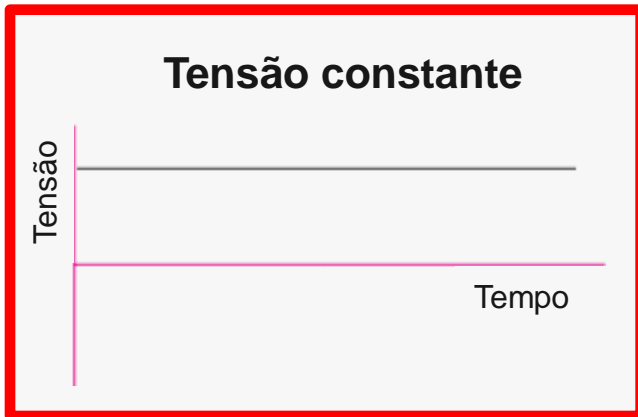
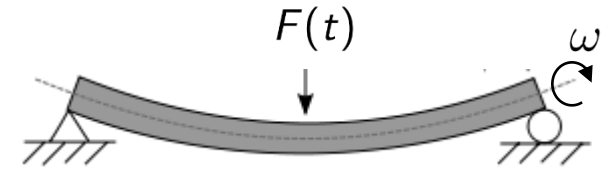
Pela teoria da tensão da energia de distorção (von Mises-Hencky)

$$d = \left[\frac{32}{\pi} \cdot \frac{N}{\sigma_{esc}} \sqrt{M^2 + \frac{3}{4} \cdot T^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Eixos e árvores

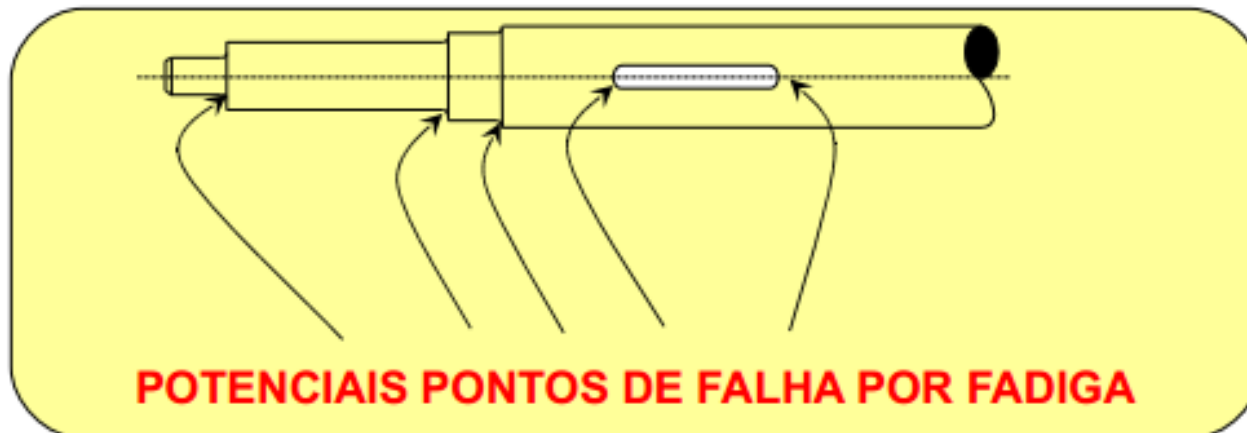
Projeto para flexão e torção sob carregamentos de fadiga

- Os carregamentos podem variar com o tempo e podem ocorrer de forma combinada.



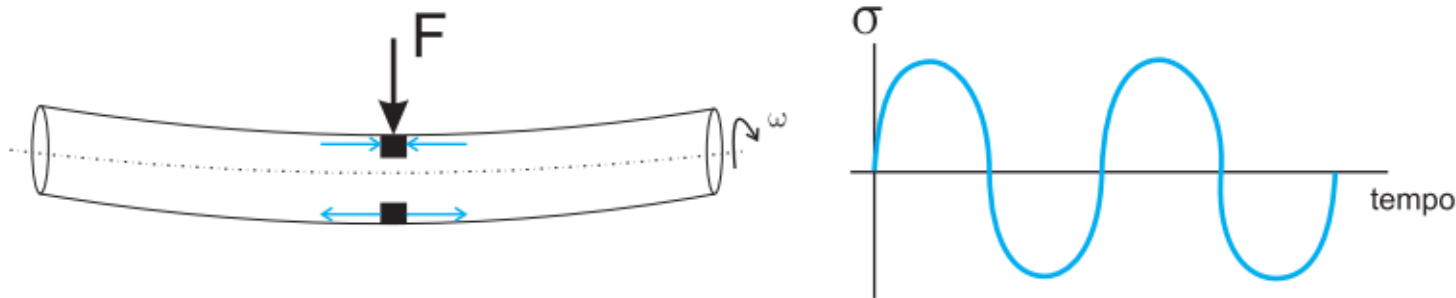
DEFINIÇÕES

- Uma falha por fadiga começa com uma **pequena fissura**;
- Essa fissura aparecerá em um **ponto de descontinuidade do material** como uma mudança de seção reta, um rasgo de chaveta ou um furo



- Muitas falhas estáticas são visíveis e dão aviso com antecipação. **Uma falha por fadiga não dá aviso**; ela é súbita e total e, portanto, perigosa

Carregamento de flexão alternante no eixo:



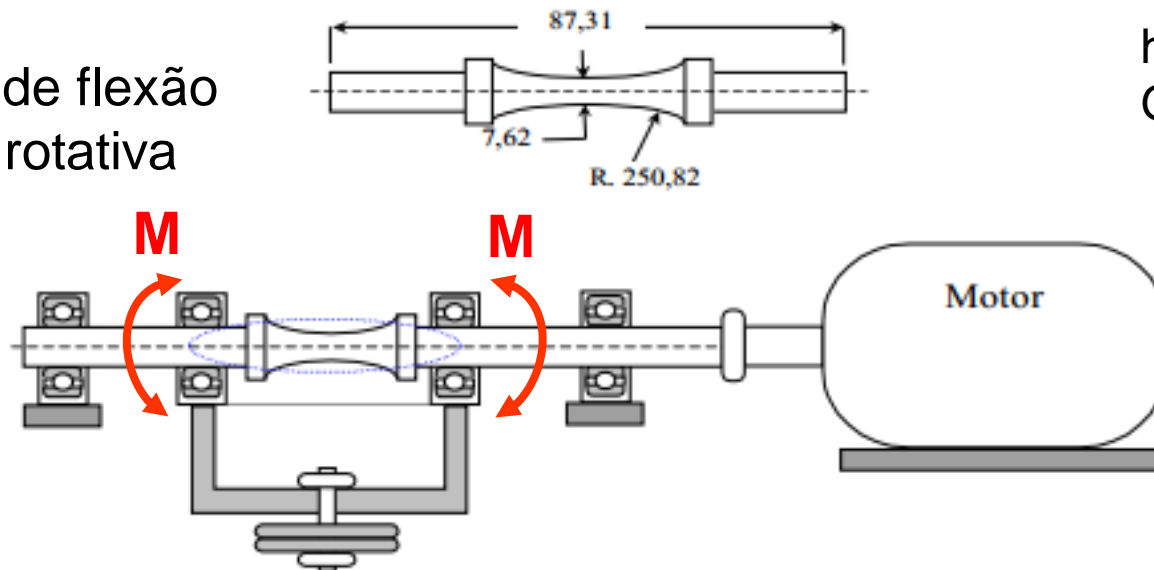
O carregamento muda de valor e/ou direção durante a vida da peça, o que causa fadiga => ocorre de forma rápida, a partir de discontinuidades como:

- Projeto com **mudanças rápidas na seção transversal**, chavetas, furos, etc;
- Elementos que rolam ou deslizam contra outros como mancais, engrenagens, cames, etc, causando **grandes pressões de contato**;
- Marcas de identificação, de ferramentas, riscos e rebarbas, montagens inadequadas ou fabricação sem bons critérios
- **Composição do material**, com discontinuidades microscópicas

RESISTÊNCIA À FADIGA

- Para a determinação da **resistência de materiais sob a ação de cargas de fadiga**, sujeitam-se corpos de prova a forças repetidas e variadas e intensidades especificadas, enquanto são contadas as inversões de ciclos ou de tensões, até a destruição desses corpos de prova;
- O teste mais empregado para determinar a resistência a fadiga é o teste de flexão rotativa (Moore);

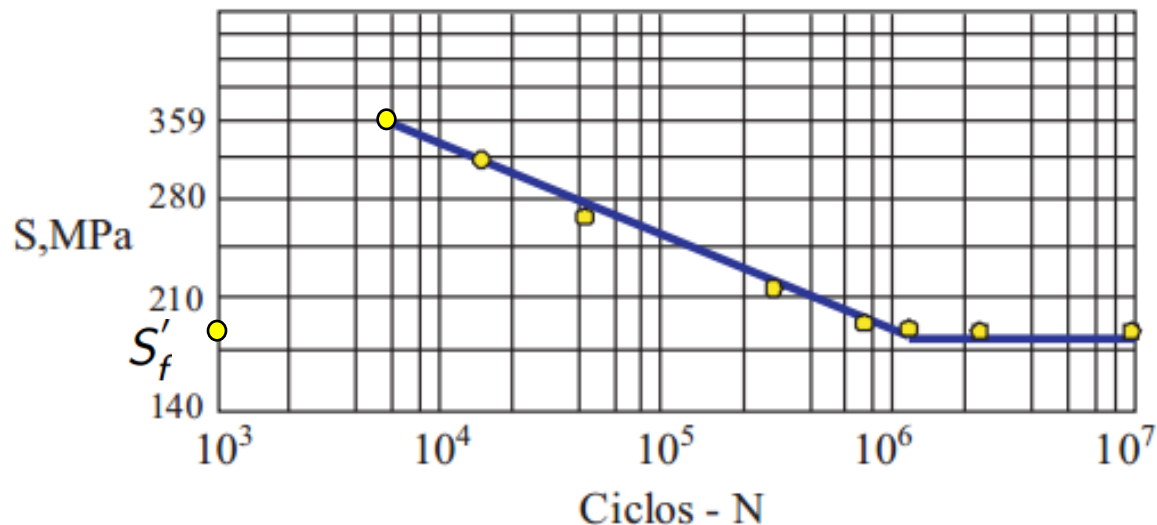
Carga de flexão
pura rotativa



<https://www.youtube.com/watch?v=G1JUJw>

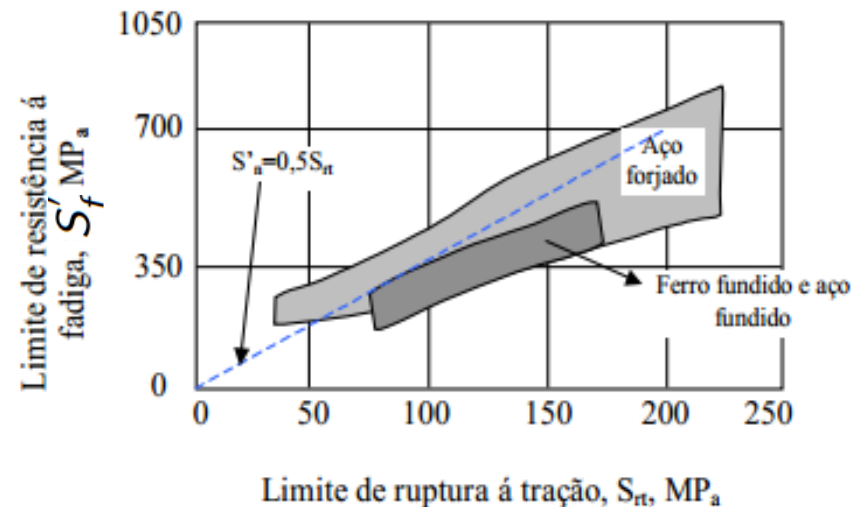
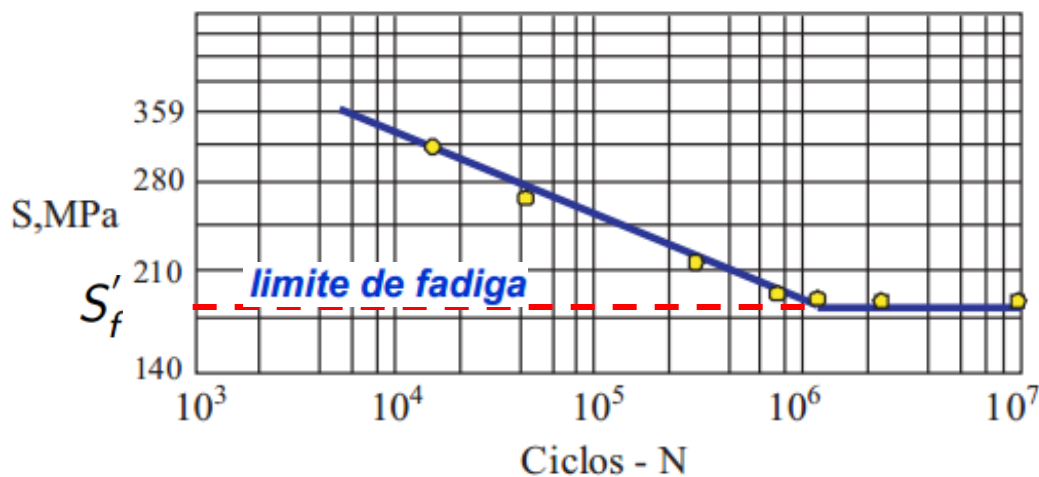
RESISTÊNCIA À FADIGA

- Para o teste rotativo aplica-se uma flexão constante e registra-se o número de revoluções do corpo de prova necessárias para a falha;
- Faz-se o primeiro teste com uma tensão de sollicitação um pouco menor do que o limite de resistência do material (S_{ult}); os demais testes são com tensões de menor valor;
- Chama-se de *resistência a fadiga* S'_f a ordenada do diagrama S-N



RESISTÊNCIA À FADIGA

- No caso de aços, aparece uma inflexão no gráfico e abaixo desse ponto não ocorrerá a falha, não importando o número de ciclos;
- A resistência correspondente a este ponto de inflexão chama-se *limite de resistência à fadiga* S'_f , ou *limite de fadiga*;
- As pesquisas têm mostrado que existe relações entre o limite de fadiga e os limites de resistência obtidos de testes simples a tração, conforme figura a seguir:

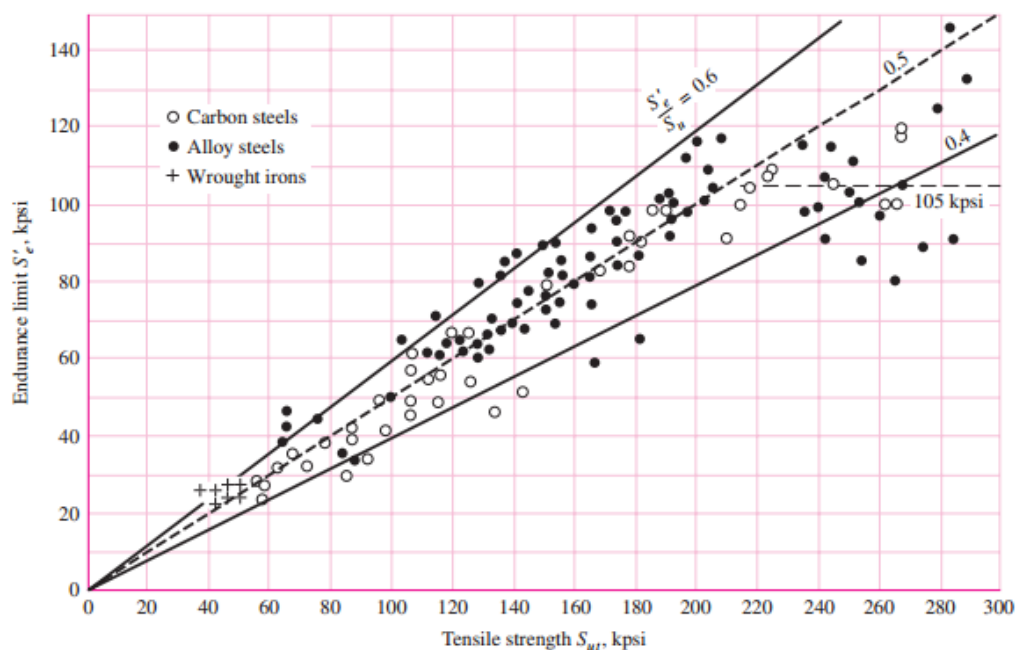


RESISTÊNCIA À FADIGA

- Ensaios mostram que o comportamento da resistência a fadiga das ligas de alumínio em relação a resistência à tração estática segue a razão:

$$S_{f@5 \times 10^8} \approx 0,4 \cdot S_{ut} \quad S_{ut} < 48 \text{kpsi} (330 \text{MPa})$$

$$S_{f@5 \times 10^8} \approx 19 \text{kpsi} (130 \text{MPa}) \quad S_{ut} \geq 48 \text{kpsi} (330 \text{MPa})$$



RESISTÊNCIA À FADIGA

- Das pesquisas, as seguintes relações podem ser empregadas:
 - Para aços:

$$\begin{aligned} S'_f &\approx 0,5 \cdot S_{ut} & S_{ut} < 200 \text{kpsi} (1400 \text{MPa}) \\ S'_f &\approx 100 \text{kpsi} (700 \text{MPa}) & S_{ut} \geq 200 \text{kpsi} (1400 \text{MPa}) \end{aligned}$$

- Para o ferro fundido usa-se, em geral, a seguinte relação:

$$\begin{aligned} S'_f &\approx 0,4 \cdot S_{ut} & S_{ut} < 60 \text{kpsi} (400 \text{MPa}) \\ S'_f &\approx 24 \text{kpsi} (160 \text{MPa}) & S_{ut} \geq 60 \text{kpsi} (400 \text{MPa}) \end{aligned}$$

FATORES MODIFICADORES DO LIMITE DE FADIGA

- O limite de resistência à fadiga S_f de um elemento de máquina pode ser consideravelmente menor do que o limite de fadiga S'_f de um corpo de prova do teste de flexão rotativa;
- Assim pode-se escrever:

Fonte: Oglari (2003)

$$S_f = C_{superf} \cdot C_{tamanho} \cdot C_{conf} \cdot C_{temp} \cdot C_{carreg} \cdot C_{div} \cdot S'_f$$

Onde:

S_f = limite de resistência à fadiga da peça

S'_f = limite de resistência à fadiga do corpo de prova

C_{superf} = fator de superfície

$C_{tamanho}$ = fator de tamanho

C_{conf} = fator de confiabilidade

C_{temp} = fator de temperatura

C_{carreg} = fator de carregamento

C_{div} = fatores diversos

Fonte: Norton (2004)

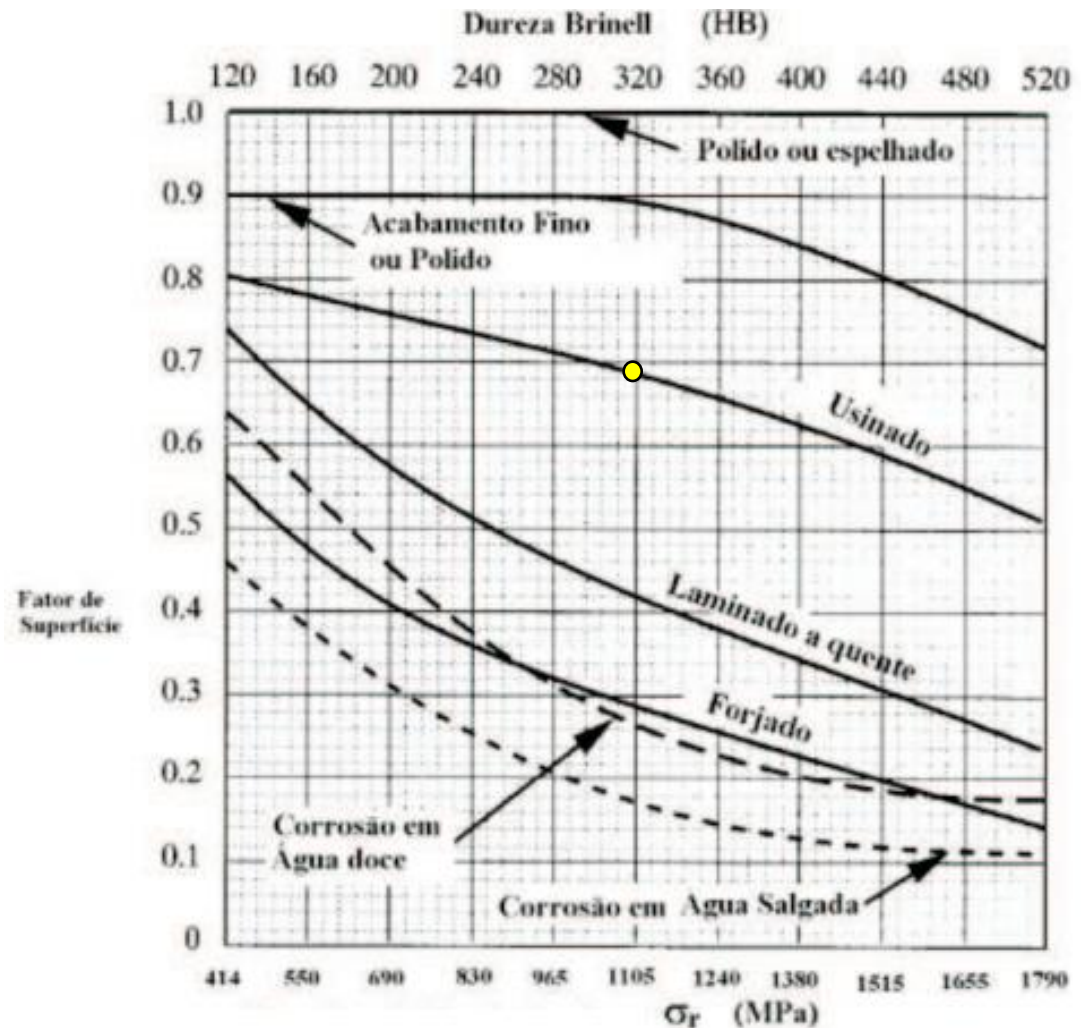
Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção sob carregamentos de fadiga

C_{superf} - ACABAMENTO SUPERFICIAL DO LIMITE DE FADIGA

- A superfície de um corpo de prova de teste de flexão rotativa é muito polida; em geral, as peças não tem tal acabamento.
- O fator modificador C_{superf} mostrado na figura depende da **qualidade do acabamento e da resistência à tração.**

Fonte: Ogilari (2003)



C_{superf} - **ACABAMENTO SUPERFICIAL DO LIMITE DE FADIGA**

Acabamento superficial	a	b
Retificado	1,58	-0,085
Usinado ou laminado a frio	4,51	-0,265
Laminado a quente	57,7	-0,718
Forjado	272	-0,995

tensões de ruptura (σ_r) em MPa

$$C_{superf} \approx A. (S_{ut})^b \text{ Se } C_{superf} > 1, \text{ utilizar } C_{superf} = 1$$

Fonte: Norton (2004)

C_{tamanho} - DIMENSÕES DA PEÇA

- O teste rotativo dá o limite de resistência á fadiga para um corpo de prova de 7,62 mm de diâmetro ;
- Quando se testam corpos de prova de dimensões maiores, verifica-se que o limite de fadiga é reduzido;
- Esse fato se deve as maiores dimensões do corpo de prova, o qual terá, provavelmente, mais defeitos superficiais do que quando for pequeno;
- As seguintes orientações podem ser empregadas:

C_{tamanho}	d
1	$d \leq 7,6\text{mm}$
0,85	$7,6 \leq d \leq 50\text{mm}$
0,75	$d \geq 50\text{mm}$

Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção sob carregamentos de fadiga

C_{conf} - CONFIABILIDADE

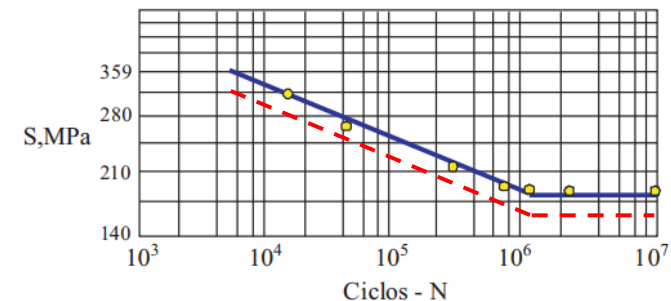
- A tabela a seguir apresenta alguns fatores C_{conf} , dependendo da confiabilidade para o projeto,

Confiabilidade (R)	Fator de confiabilidade C_{conf}
0,50	1
0,90	0,897
0,95	0,868
0,99	0,814
0,999	0,753
0,9999	0,702
.....

- Baixa confiabilidade (muitas simplificações): $C_{conf}=1$
- **Alta confiabilidade** (características de projeto bem definidas): $C_{conf}=0.7$

resistência a fadiga S_f

$$S_f = C_{superf} \cdot C_{tamanho} \cdot C_{conf} \cdot C_{temp} \cdot C_{carreg} \cdot C_{div} \cdot S'_f$$



C_{temp} - TEMPERATURA

- Para o fator de temperatura, usa-se, para aços, a seguinte relação:

$$\begin{array}{ll} \text{para } T \leq 450^{\circ}\text{C} & C_{temp} = 1 \\ \text{para } 450^{\circ}\text{C} < T \leq 550^{\circ}\text{C} & C_{temp} = 1 - 0,0058(T - 450) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} C_{temp} = \frac{344,4}{273,4 + T} & \text{para } T > 71,1^{\circ}\text{C} \\ C_{temp} = \frac{620}{460 + T} & \text{para } T > 160^{\circ}\text{F} \end{array}$$

C_{carreg} - FATOR DE CARREGAMENTO

- A maioria dos dados publicados de resistência à fadiga se referem a ensaios sob flexão rotativa. Assim, deve-se aplicar um fator de redução da resistência para a sollicitação devido à força normal.

$$\begin{array}{lll} C_{carreg} & = & 1 \quad \text{para flexão} \\ C_{carreg} & = & 1 \quad \text{para torção} \\ C_{carreg} & = & 0,7 \quad \text{para força normal} \end{array}$$

(Norton 2004)

C_{div} - EFEITOS DIVERSOS

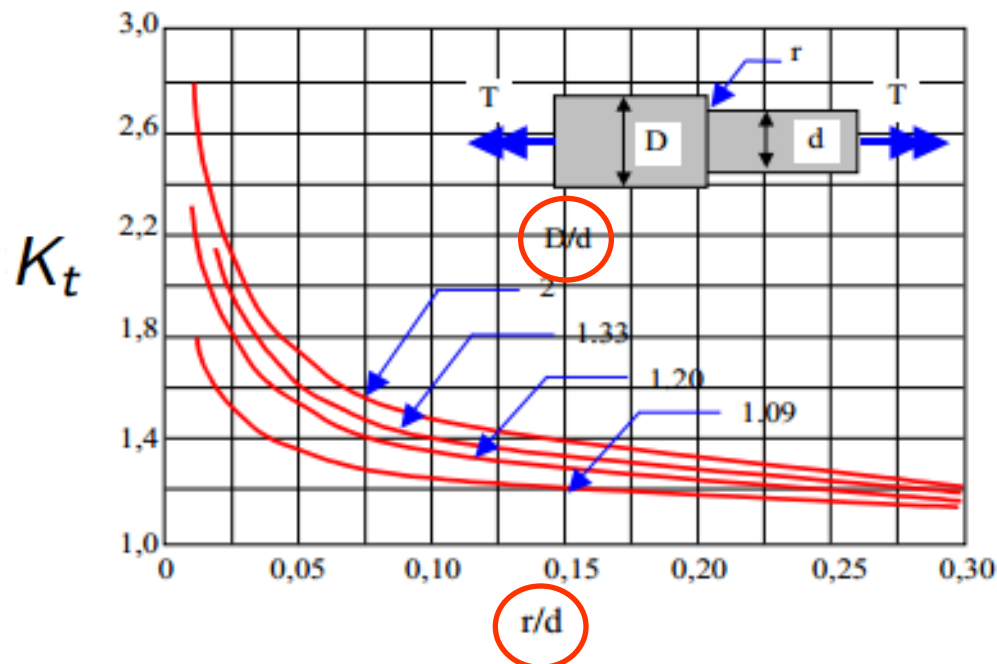
- Ligações por interferência podem reduzir o limite de fadiga em até 25%.
- Revestimentos metálicos como cromagem, niquelagem, etc., reduzem a resistência a fadiga até 35%.
- As peças que operam em ambiente corrosivo tem resistência à fadiga reduzido, Por exemplo: aços de baixa liga em água pura a relação entre S_{ut} e S_e deveria ser modificada para:

$$S_e' \approx 15 \text{ kpsi (100MPa)}$$

K_t - CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES

- Usa-se um fator de concentração de tensões teórico ou geométrico, K_f (flexão) ou K_t (torção) para relacionar a tensão real máxima na descontinuidade com a tensão nominal. Assim as tensões máximas são dadas pelas equações,

$$\sigma_{\max} = K_f \sigma_0 \quad \tau_{\max} = K_t \tau_0$$



K_t - CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES (cont.)

- Alguns dos materiais podem não ser muito sensíveis à existência de entalhes ou descontinuidades e, portanto, não devem ser usados os valores integrais dos fatores teóricos de concentração de tensões. Para esses materiais, é conveniente usar-se um valor reduzido de K_t .
- Define-se **sensibilidade ao entalhe**, q , pela seguinte equação, onde q , normalmente varia entre zero e a unidade.

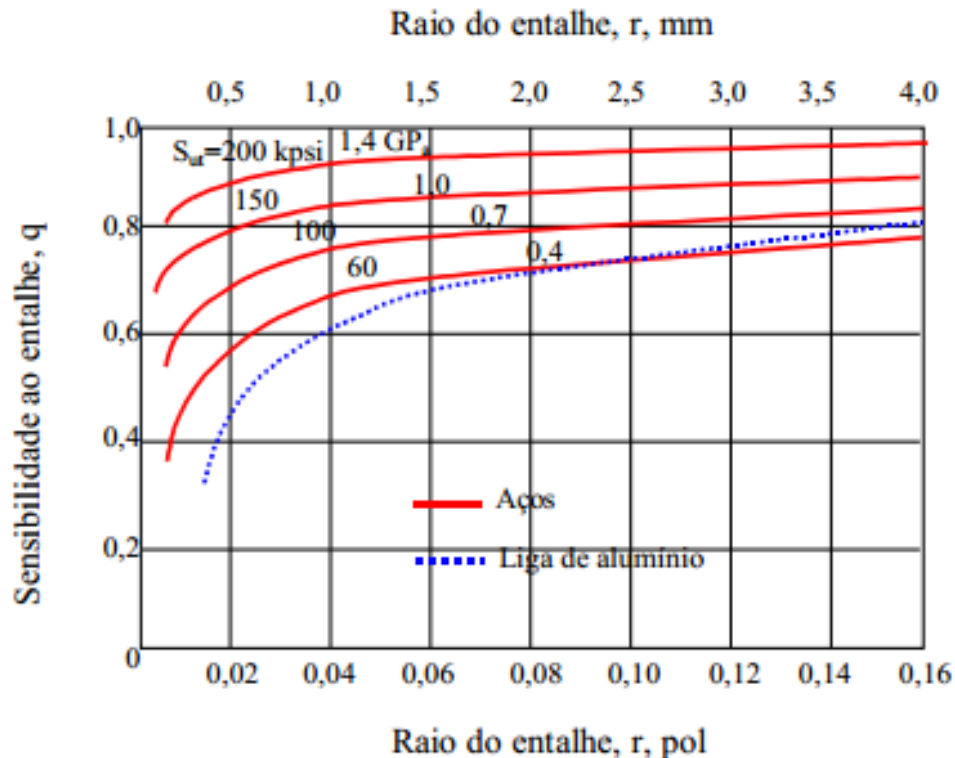
$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$

K_t - CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES (cont.)

- Para **aços e ligas de alumínio** usa-se a figura a seguir para determinar q , quando as peças estão sujeitas a ações do tipo do teste rotativo de fadiga ou a um carregamento axial alternado.

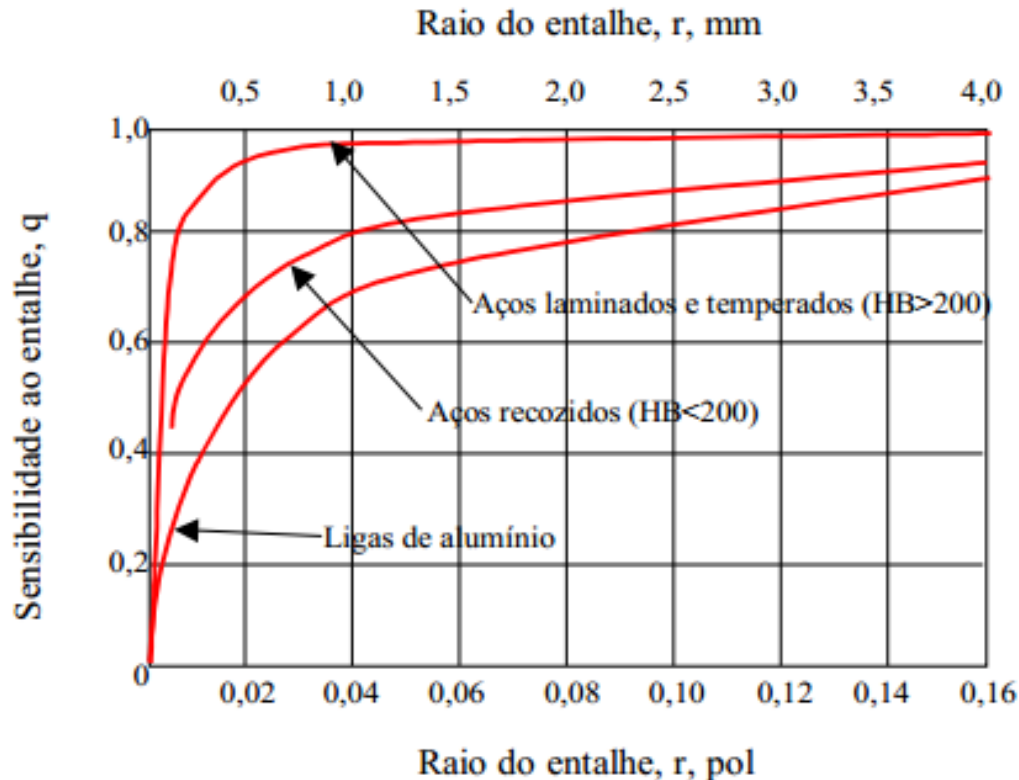
FLEXÃO



K_t - CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES (cont.)

- A figura seguinte é usada para peças sujeitas a cisalhamento alternado.

TORÇÃO

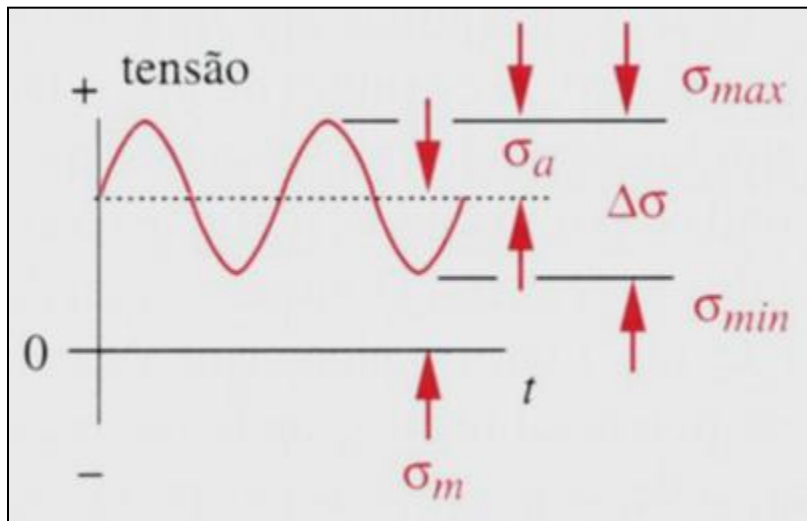


Tensão média

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

Tensão alternada

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$



Amplitude de tensões alternantes

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$$

Razão de tensão

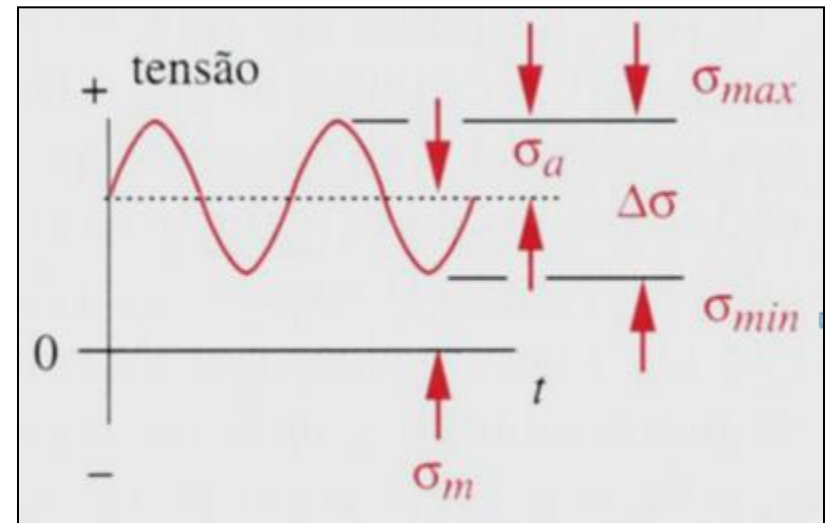
$$R = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$$

Razão de amplitude

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}$$

Ambos o torque e a velocidade angular podem estar variando com o tempo.

É importante definir a relação torque-potência em função do tempo.



A partir do equacionamento anterior é possível calcular algumas grandezas necessárias para a análise de fadiga:

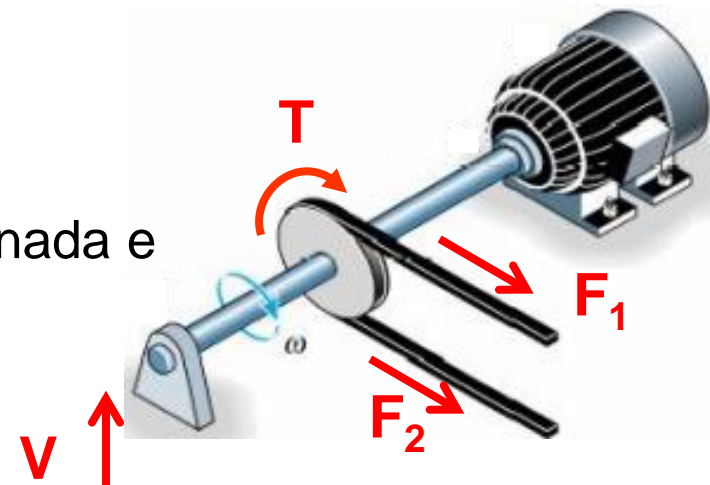
Torque alternado

$$T_a = \frac{30P_a}{\pi n} [N.m]$$

Torque médio

$$T_m = \frac{30P_m}{\pi n} [N.m]$$

- Existem 4 métodos diferentes de solução para o dimensionamento de eixos e árvores considerando efeitos de fadiga:
 - **Método de Sines:** muito limitado, considera apenas o efeito da flexão, desprezando o efeito por torção;
 - **Método de Soderberg:** considera parcelas estáticas e alternadas para flexão e torque;
 - **Método de Goodman:** projeto para flexão alternada e torção alternada;
 - **Método da ASME:** projeto para flexão alternada e torque fixo



Derivado da teoria da máxima tensão cisalhante (Tresca)

Esse critério para o caso de árvores ou eixos, resulta em:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32n}{\pi} \cdot \sqrt{\left(K_t \frac{T}{\sigma_e}\right)^2 + \left(K_f \frac{M}{S_f}\right)^2}}$$

Generalizando:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32n}{\pi} \cdot \sqrt{\left(K_t \left(\frac{T_a}{S_f} + \frac{T_m}{\sigma_e}\right)\right)^2 + \left(K_f \left(\frac{M_a}{S_f} + \frac{M_m}{\sigma_e}\right)\right)^2}}$$

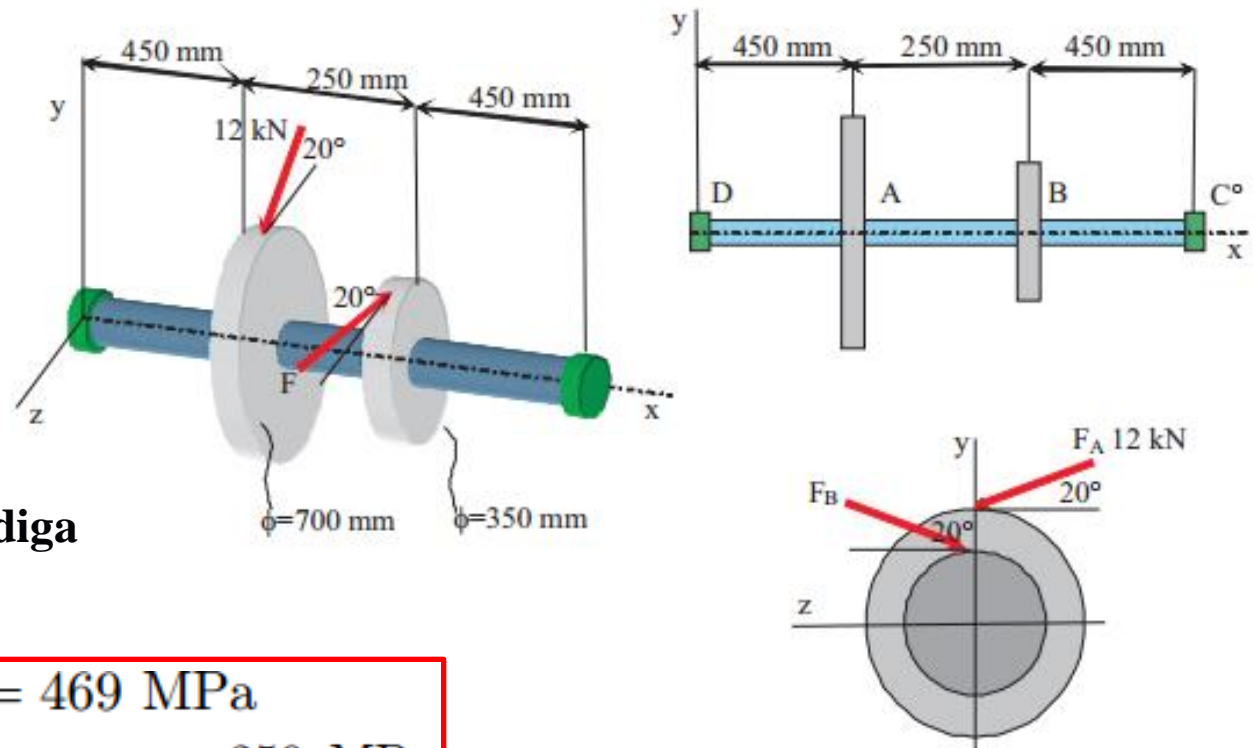
S_f = tensão de fadiga para uma vida infinita

Eixos e árvores

Exemplo 1.4: Projeto de árvore por Soderberg

Deve-se projetar uma árvore, conforme mostrado na figura 2.29, onde são montadas duas engrenagens cilíndricas de dentes retos. Na construção da árvore, deve-se utilizar aço SAE 1035

Pergunta-se qual o diâmetro para um coeficiente de segurança igual a 1,6. Admitindo que a árvore seja escalonada, estabeleça o diâmetro em **A**, no trecho **DA** e no trecho **BC**. Desconsidere os efeitos de temperatura e de concentração de tensões.



S_f : limite de resistência à fadiga

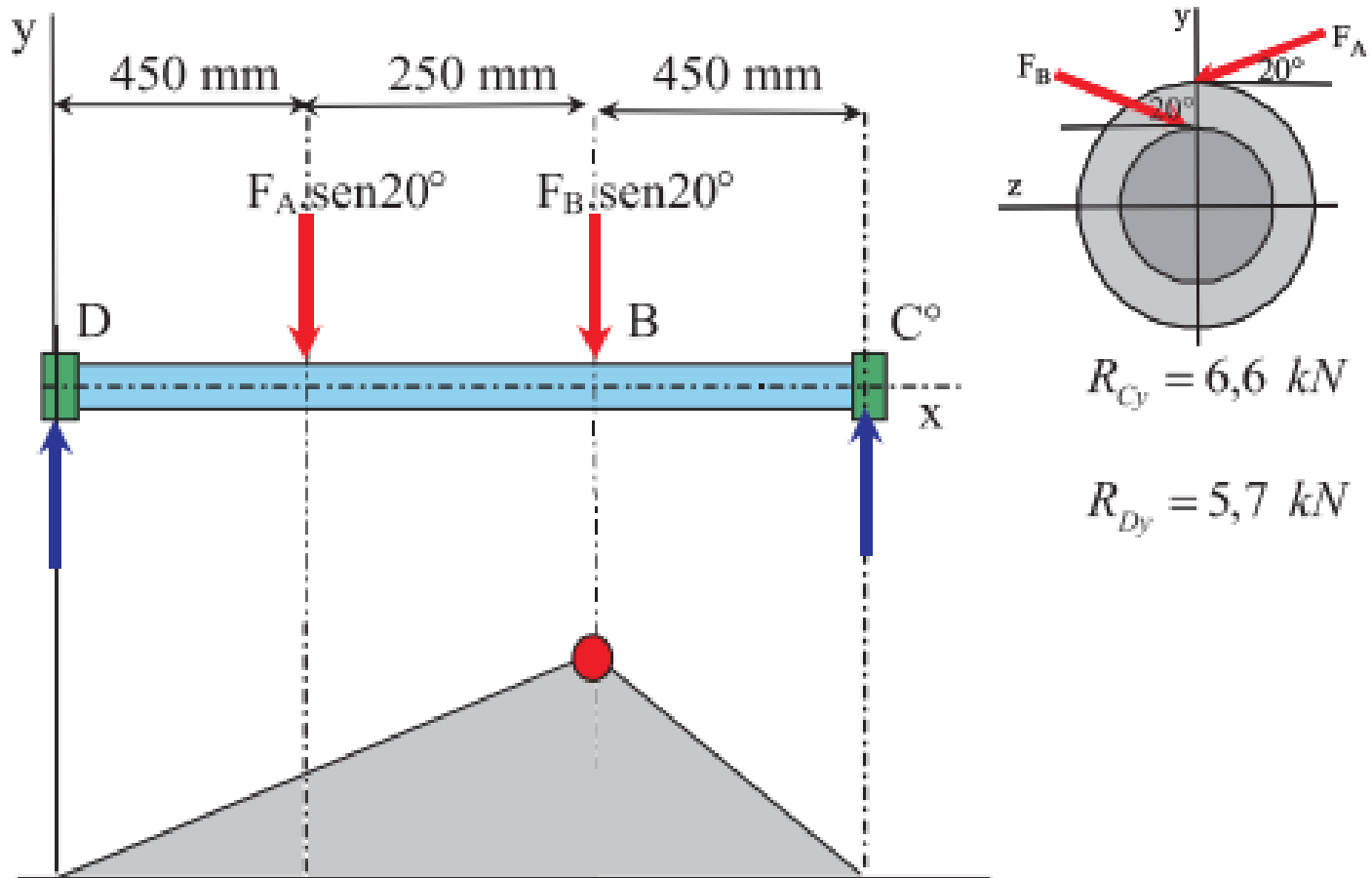
aço SAE 1035

tensão de ruptura $\sigma_r = 469 \text{ MPa}$

tensão limite de escoamento $\sigma_e = 259 \text{ MPa}$

Eixos e árvores

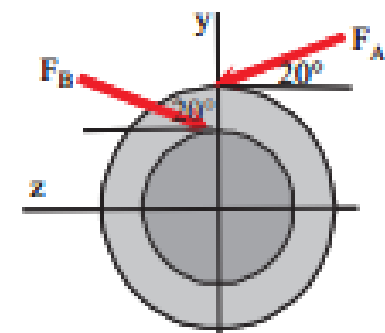
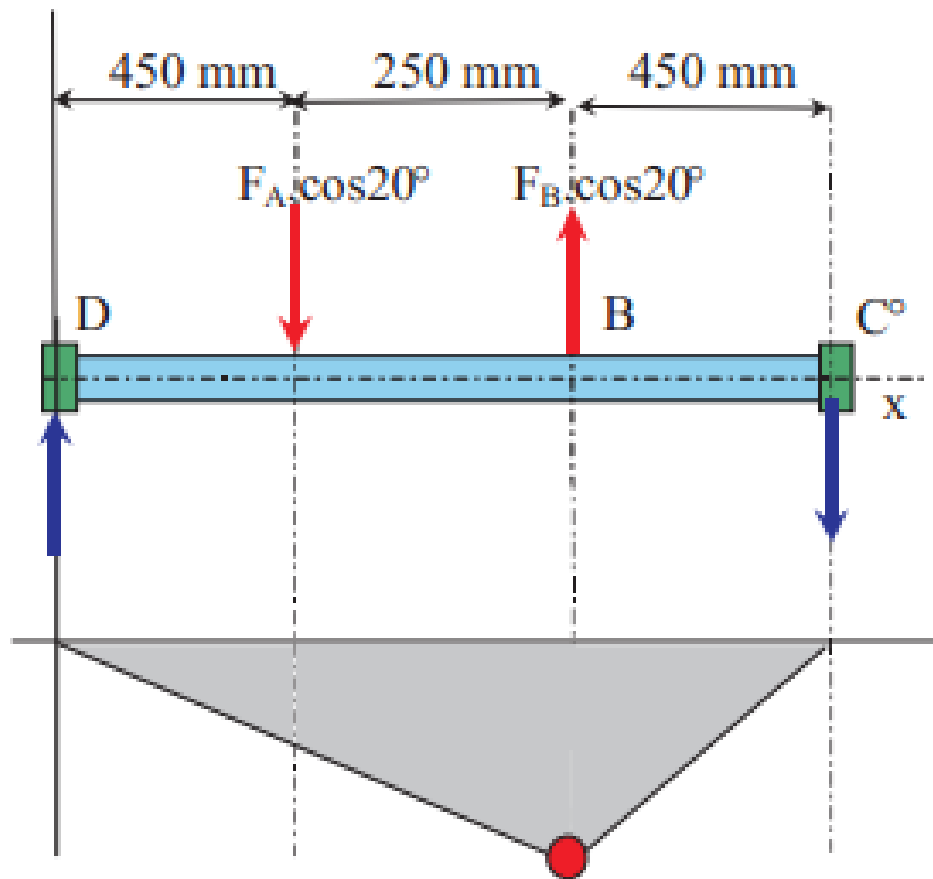
Exemplo 1.4: Projeto de árvore por Soderberg



Momento fletor no plano XY

Eixos e árvores

Exemplo 1.4: Projeto de árvore por Soderberg



$$R_{Dz} = -1,97 \text{ kN}$$

$$R_{Cz} = 9,33 \text{ kN}$$

Momento fletor no plano XZ

Eixos e árvores

Exemplo 1.4: Projeto de árvore por Soderberg

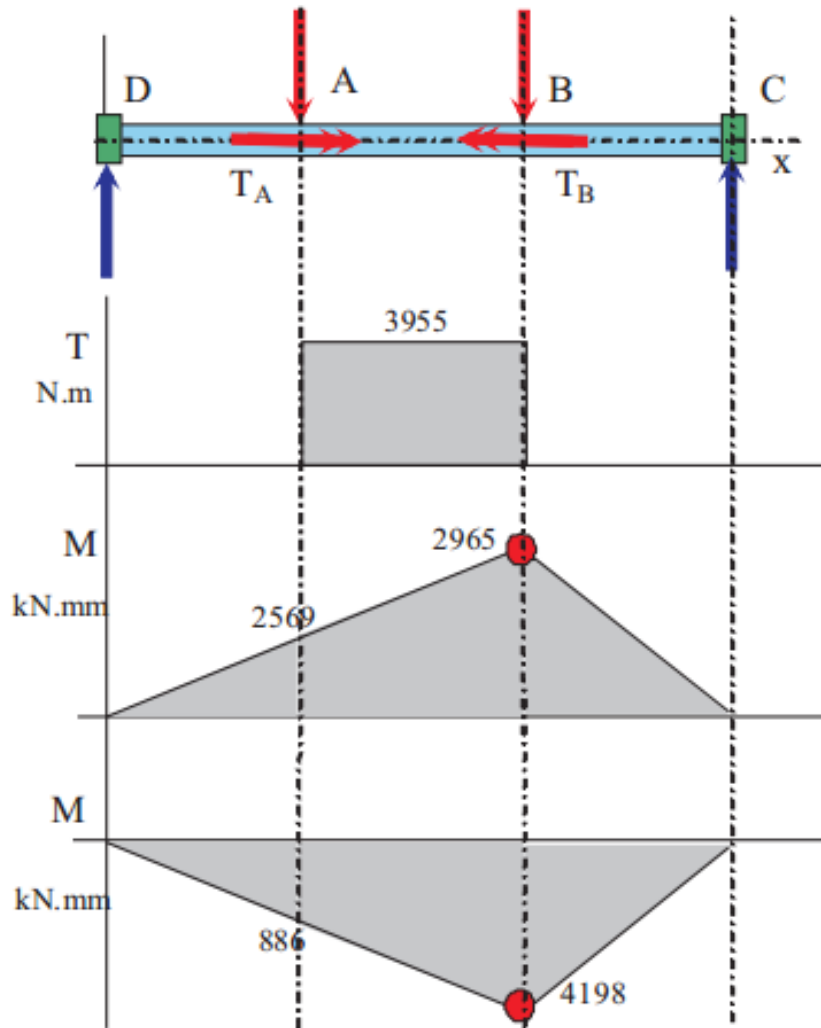
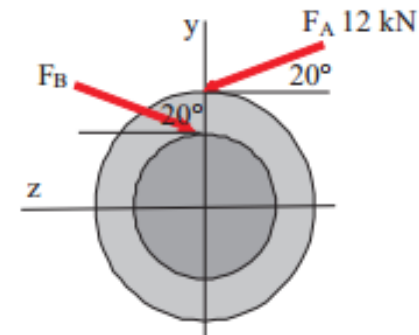


Diagrama de esforços



$$\Sigma T = 0 \Rightarrow F_A \cdot \cos 20^\circ \cdot \frac{0,700}{2} = F_B \cdot \cos 20^\circ \cdot \frac{0,350}{2}$$

$$F_A \cdot \sin 20^\circ = 4,1 \text{ kN} \quad F_A \cdot \cos 20^\circ = 11,3 \text{ kN}$$

$$F_B \cdot \sin 20^\circ = 8,2 \text{ kN} \quad F_B \cdot \cos 20^\circ = 22,6 \text{ kN}$$

torque no trecho AE

$$T = F_A \cdot \cos 20^\circ \cdot \frac{0,700}{2} = 3.955 \text{ Nm}$$

Eixos e árvores

Exemplo 1.4: Projeto de árvore por Soderberg

•Para aços:

$$S'_f \approx 0,5 \cdot S_{ut} \quad S_{ut} < 200 \text{kpsi (1400MPa)}$$

$$S'_f \approx 100 \text{kpsi (700MPa)} \quad S_{ut} \geq 200 \text{kpsi (1400MPa)}$$

$$S'_f = 234,5 \text{ MPa}$$

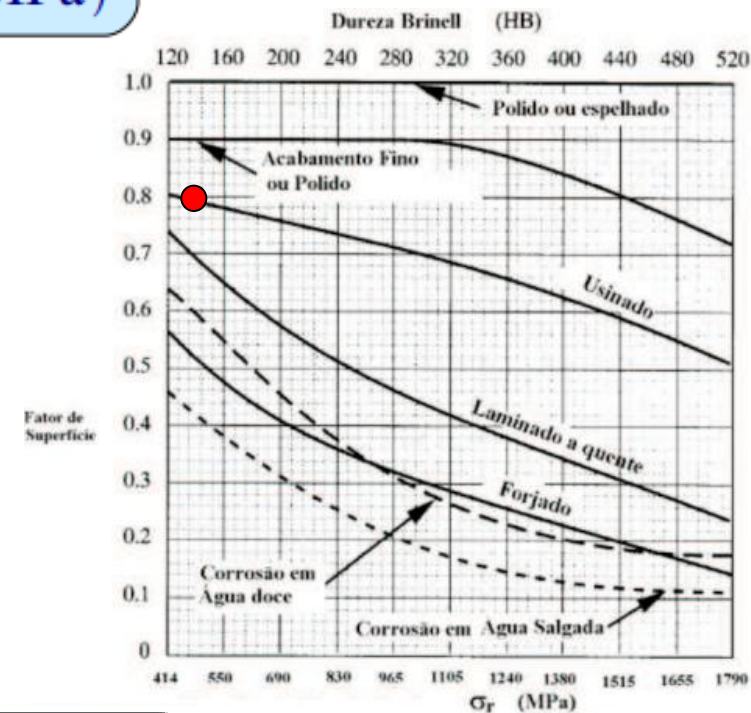
eixo é usinado

$$C_{superf} = 0.88$$

ou

$$C_{superf} = 0.80$$

Acabamento superficial	a	b
Retificado	1,58	-0,085
Usinado ou laminado a frio	4,51	-0,265
Laminado a quente	57,7	-0,718
Forjado	272	-0,995



$$C_{superf} \approx A \cdot (S_{ut})^b \quad \text{Se } C_{superf} > 1, \text{ utilizar } C_{superf} = 1$$

Eixos e árvores

Exemplo 1.4: Projeto de árvore por Soderberg

hipótese inicial de diâmetro entre 7,6 e 50 mm

C_{tamanho}	d
1	$d \leq 7,6\text{mm}$
0,85	$7,6 \leq d \leq 50\text{mm}$
0,75	$d \geq 50\text{mm}$

$$C_{\text{tamanho}} = 0.85$$

C_{carreg}	= 1	para flexão
C_{carreg}	= 1	para torção
C_{carreg}	= 0,7	para força normal

$$C_{\text{carreg}} = 1$$

limite de resistência à fadiga da peça

$$S_f = C_{\text{superf}} \cdot C_{\text{tamanho}} \cdot \cancel{C_{\text{conf}}} \cdot \cancel{C_{\text{temp}}} \cdot C_{\text{carreg}} \cdot \cancel{C_{\text{div}}} \cdot S'_f$$

$$S_f = 0,80 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 234,5 = 159,5 \text{ MPa}$$

Cálculo dos diâmetros

estabeleça o diâmetro em **A**, no trecho **DA**

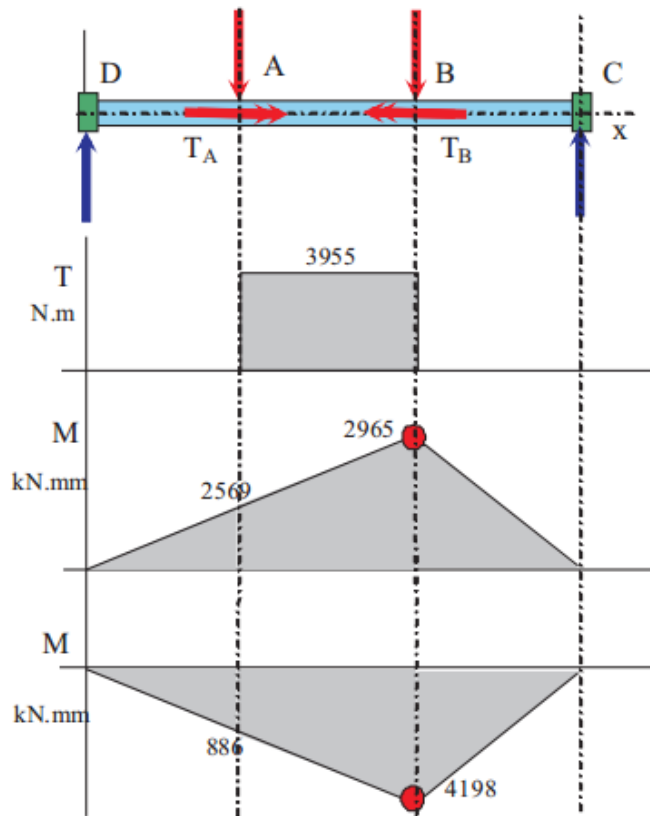


Diagrama de esforços

$$M = \sqrt{(2.965)^2 + (4.198)^2}$$

$$M = 5139 \text{ kNmm}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32n}{\pi} \cdot \sqrt{\left(K_{fs} \frac{T}{\sigma_e}\right)^2 + \left(K_f \frac{M}{S_f}\right)^2}}$$



$$d = \sqrt[3]{\frac{32n}{\pi} \cdot \sqrt{\left(\frac{T}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{M}{S_f}\right)^2}}$$



$$d = 83,45 \text{ mm}$$

Eixos e árvores

Exemplo 1.4: Projeto de árvore por Soderberg

hipótese inicial de diâmetro entre 7,6 e 50 mm

$$C_{\text{tamanho}} = 0.85$$

C_{tamanho}	d
1	$d \leq 7,6\text{mm}$
0,85	$7,6 \leq d \leq 50\text{mm}$
0,75	$d \geq 50\text{mm}$

Pré-dimensionamento

$$d = 83,45 \text{ mm} \Rightarrow C_{\text{tamanho}} = 0.75$$

Recalcular o limite de resistência à fadiga da peça

$$S_f = C_{\text{superf}} \cdot C_{\text{tamanho}} \cdot C_{\text{conf}} \cdot C_{\text{temp}} \cdot C_{\text{carreg}} \cdot C_{\text{div}} \cdot S'_f$$

$$S_f = 0,80 \cdot 0,75 \cdot 1 \cdot 234,5 = 140,7 \text{ MPa}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32n}{\pi} \cdot \sqrt{\left(\frac{T}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{M}{S_f}\right)^2}} \Rightarrow$$

Diâmetro em B, no trecho AB

$$d = 86,4 \text{ mm}$$

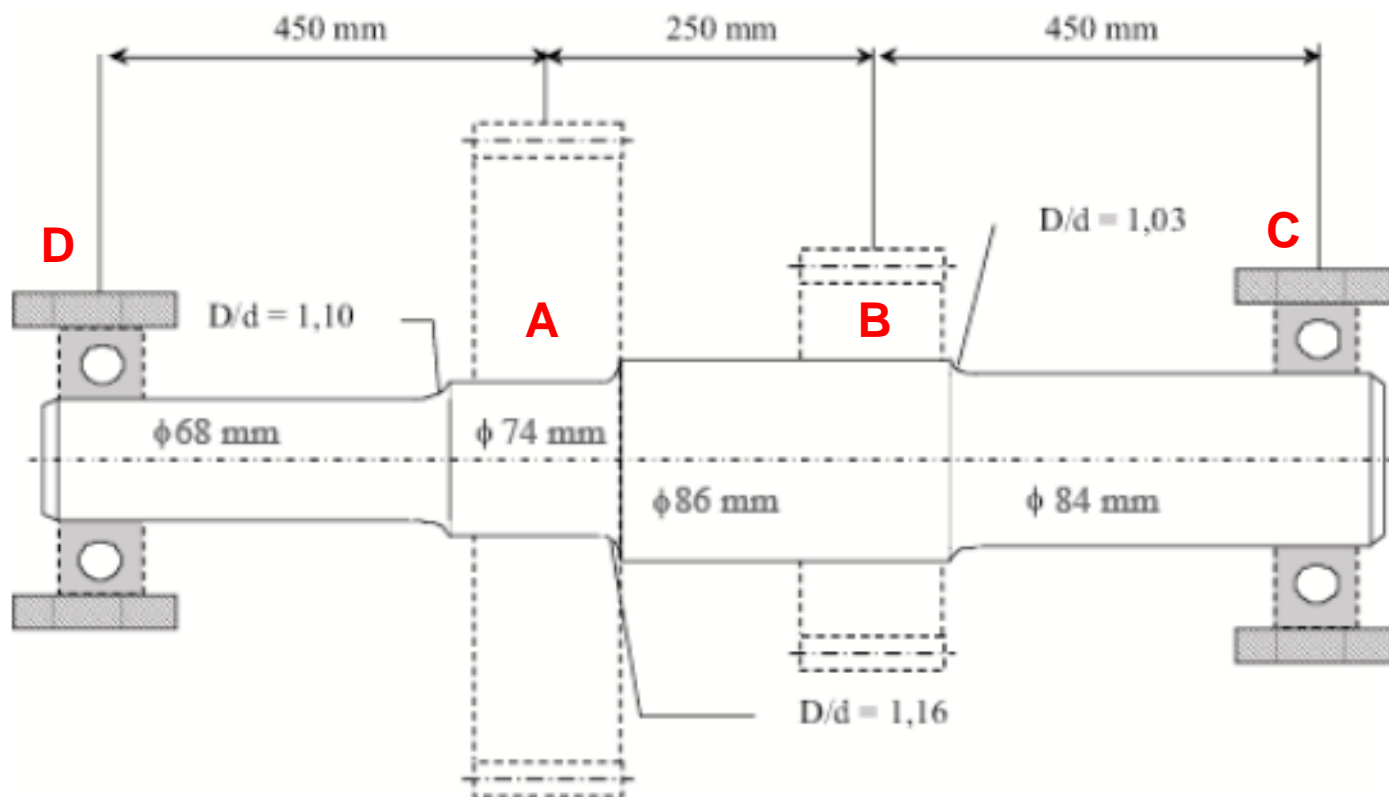
Eixos e árvores

Exemplo 1.4: Projeto de árvore por Soderberg

Determine o diâmetro em A no trecho AB

Determine o diâmetro no trecho DA

Determine o diâmetro no trecho BC





Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção sob carregamentos de fadiga