



# Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção fixa: critérios de falha

## Aula 2

### FLEXÃO PURA (CONTINUAÇÃO)

Então:

$$\sigma_m = M \cdot \frac{c}{I}$$



Para eixos com raio  $r$ :

$$\sigma_m = M \cdot \frac{r}{I}$$

### TORÇÃO PURA

De maneira análoga pode-se deduzir que:

$$\tau_m = T \cdot \frac{r}{J}$$

Existem várias teorias de falha. Entretanto, uma única teoria não deve ser aplicada a um material específico porque o material pode se comportar de forma dúctil ou frágil dependendo da (1) temperatura, (2) carregamento ou (3) eventuais reações químicas (mudam o material)

### **Materiais dúcteis**

- Teoria da máxima tensão de cisalhamento (Tresca)
- Teoria da máxima energia de distorção (von Mises)

### **Materiais frágeis**

- Teoria da máxima tensão normal
- Critério de falha de Mohr

Existem várias teorias de falha. Entretanto, uma única teoria não deve ser aplicada a um material específico porque o material pode se comportar de forma dúctil ou frágil dependendo da (1) temperatura, (2) carregamento ou (3) eventuais reações químicas (mudam o material)

### **Materiais dúcteis**

- Teoria da máxima tensão de cisalhamento (Tresca)
- Teoria da máxima energia de distorção (von Mises)

### **Materiais frágeis**

- Teoria da máxima tensão normal
- Critério de falha de Mohr

# Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção fixa: máxima tensão cisalhante

Estabelece que a tensão de falha é igual a tensão cisalhante máxima.

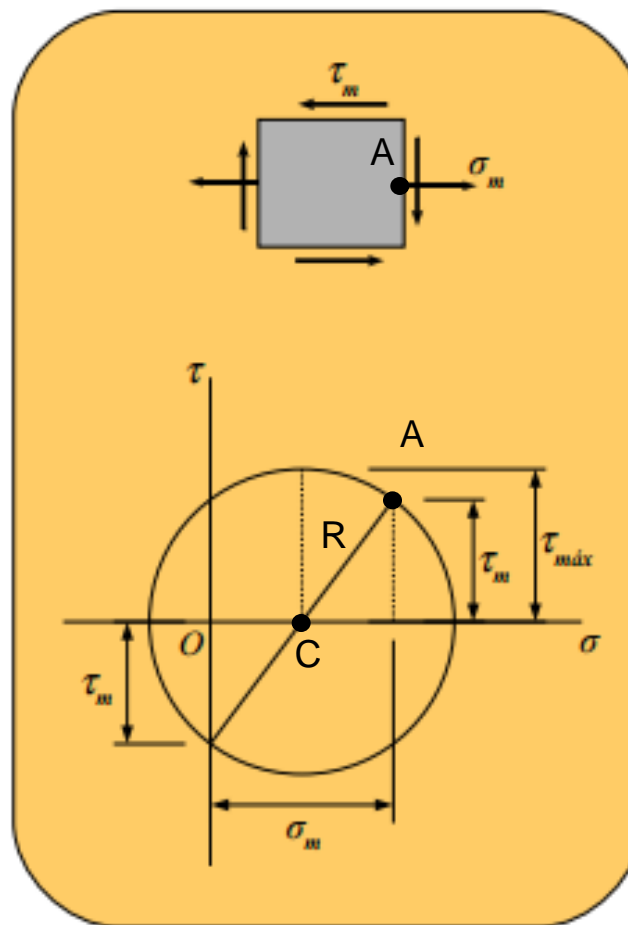
Pelo **circulo de Mohr** pode-se encontrar o valor de tensão de cisalhamento máxima:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2}$$

Substituindo  $\sigma_m$  e  $\tau_m$  pelas equações apresentadas anteriormente, tem-se:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{M \cdot r}{2 \cdot I}\right)^2 + \left(\frac{T \cdot r}{J}\right)^2}$$

Como, para seções transversais circulares ou anelares,  $2I = J$ :



Fonte: Berr e Johnston (1982)

# Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção fixa: máxima tensão cisalhante

$$\tau_{\max} = \frac{r}{J} \cdot \sqrt{M^2 + T^2}$$

ou

$$\frac{J}{r} = \frac{1}{\tau_{adm}} \cdot \left( \sqrt{M^2 + T^2} \right)_{\max}$$

Substituindo o momento  $M$  pelas componente  $M_y$  e  $M_z$ , então:

$$\frac{J}{r} = \frac{1}{\tau_{adm}} \cdot \left( \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \right)_{\max}$$

Para eixos maciços de raio  $r$ , tem-se:

$$\frac{J}{r} = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$$

Assim:



$$d = \left[ \frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{\tau_{adm}} \left( \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \right)_{\max} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Fonte: Berr e Johnston (1982)

# Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção fixa: máxima tensão cisalhante

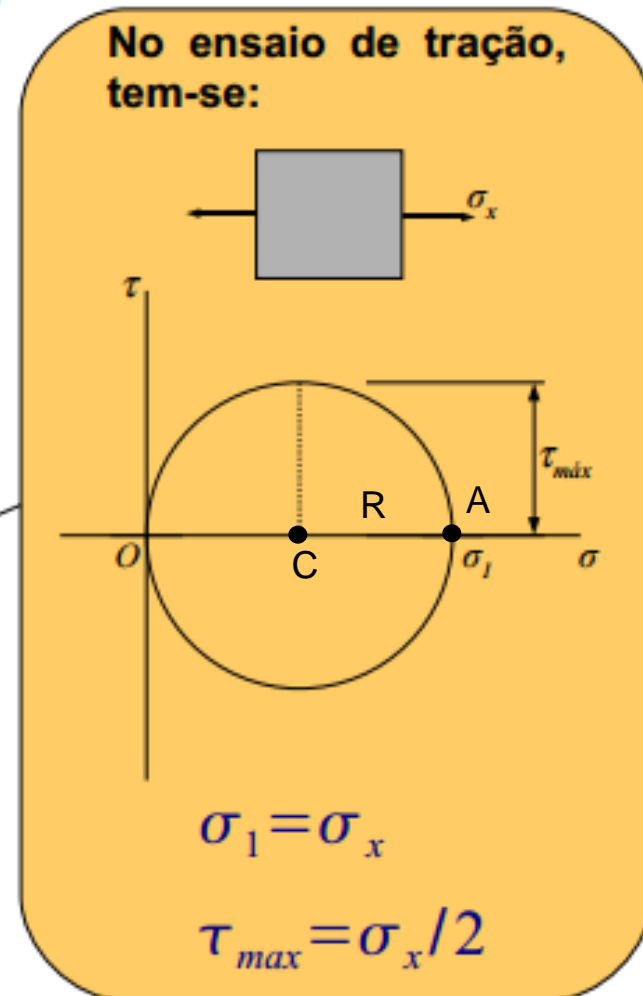
## CRITÉRIO PARA TENSÃO ADMISSÍVEL PELA TEORIA DA TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO (TRESCA)

A teoria afirma que a falha ocorre quando a **tensão máxima de cisalhamento** em uma região **excede** a **tensão máxima de cisalhamento de um corpo de prova sob tração em escoamento (metade da tensão normal de escoamento)**.

Fonte: Norton (2004)

Para tensão de escoamento:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{esc}}{2}$$



# Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção fixa: máxima tensão cisalhante

**Pela teoria da tensão máxima de cisalhamento (Tresca)**

$$d = \left[ \frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{\tau_{max}} \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_{esc}}{2N}$$

**Considerando um fator de segurança,  $N$ :**

$$N = \frac{\sigma_{esc}}{\sigma_{adm}} > 1$$

$$d = \left[ \frac{32}{\pi} \cdot \frac{N}{\sigma_{esc}} \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$



Existem várias teoria de falha. Entretanto, uma única teoria não deve ser aplicada a um material específico porque o material pode se comportar de forma dúctil ou frágil dependendo da (1) temperatura, (2) carregamento ou (3) eventuais reações químicas (mudam o material)

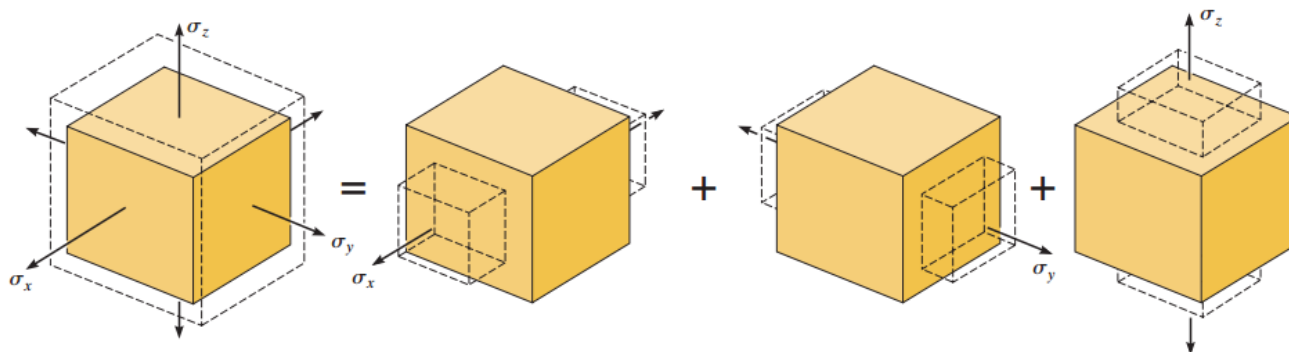
### **Materiais dúcteis**

- Teoria da máxima tensão de cisalhamento (Tresca)
- **Teoria da máxima energia de distorção (von Mises)**

### **Materiais frágeis**

- Teoria da máxima tensão normal
- Critério de falha de Mohr

Um material quando se deforma armazena energia internamente.



A tensão equivalente de von Mises ( $\sigma'$ ) é definida como a tensão de tração uniaxial que criaria a mesma energia de distorção que é criada pela combinação atual das tensões aplicadas.

Para o caso mais geral de tensões o critério de von Mises (ou teoria da máxima energia de distorção) é dado por:

$$\sigma_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

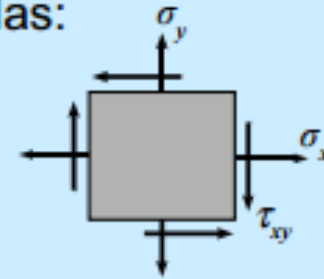
# Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção fixa: máxima energia de distorção

$$\sigma_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \cancel{\sigma_z})^2 + (\cancel{\sigma_z} - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \cancel{\tau_{yz}^2} + \cancel{\tau_{xz}^2})}$$

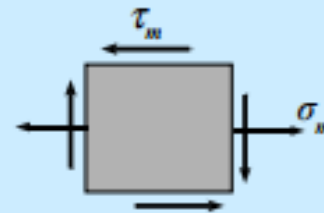
Pode ser expressa em termos das tensões aplicadas:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$



Para o caso em questão:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_m^2 + 3 \cdot \tau_m^2}$$



Fonte: Norton (2004)

# Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção fixa: máxima energia de distorção

Como:

$$\sigma_m = M \cdot \frac{r}{I}$$

e

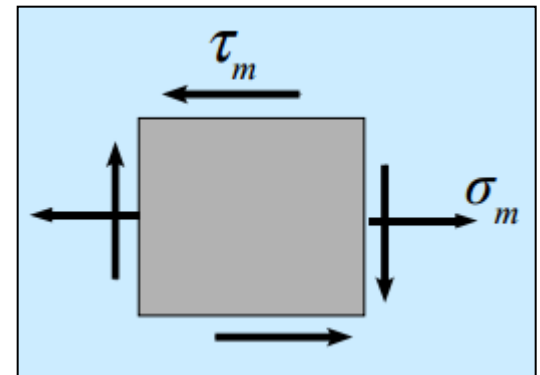
$$\tau_m = T \cdot \frac{r}{J}$$

Então:

$$\sigma' = \sqrt{\left(M \cdot \frac{r}{I}\right)^2 + 3 \cdot \left(T \cdot \frac{r}{J}\right)^2}$$

Como  $I = J/2$  :

$$\sigma' = \frac{r}{J} \cdot \sqrt{4 \cdot M^2 + 3 \cdot T^2}$$



# Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção fixa: máxima energia de distorção

Para eixos maciços de raio  $r$ , tem-se:

$$\frac{r}{J} = \frac{16}{\pi \cdot d^3}$$

Assim:

$$\sigma' = \frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{4 \cdot M^2 + 3 \cdot T^2} = \frac{32}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{M^2 + \frac{3}{4} \cdot T^2}$$

# Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção fixa: máxima energia de distorção

Para um coeficiente de segurança  $N$ , tem-se:

$$N = \frac{\sigma_{esc}}{\sigma_x}$$

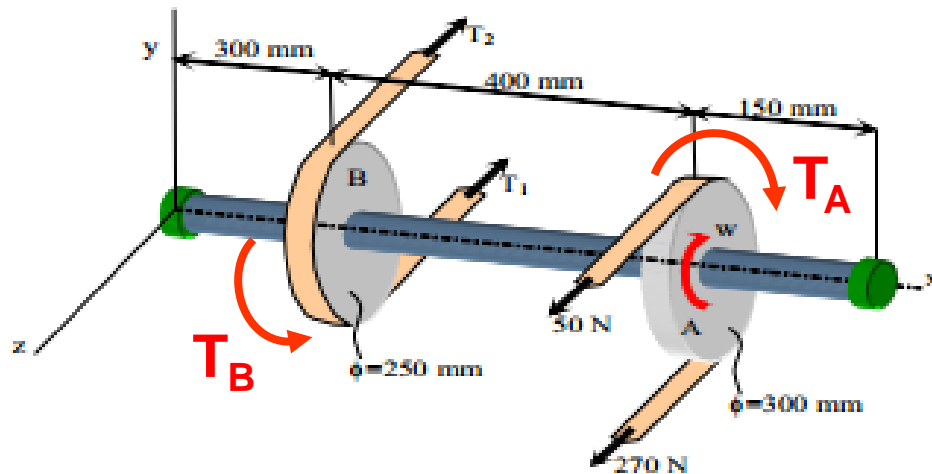
$$\frac{\sigma_{esc}}{N} = \frac{32}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{M^2 + \frac{3}{4} \cdot T^2}$$

Portanto:

$$d = \left[ \frac{32}{\pi} \cdot \frac{N}{\sigma_{esc}} \sqrt{M^2 + \frac{3}{4} \cdot T^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

### Exemplo 1.3

- Determinar o diâmetro necessário para a árvore da transmissão mostrada na figura:



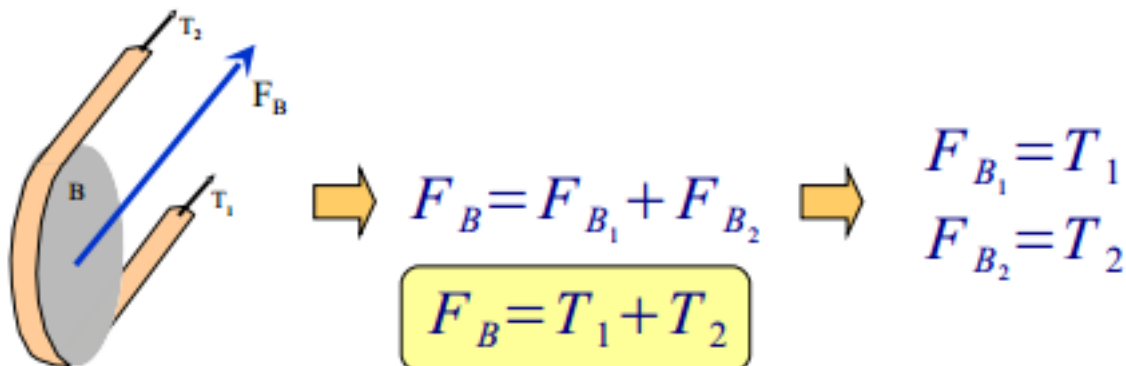
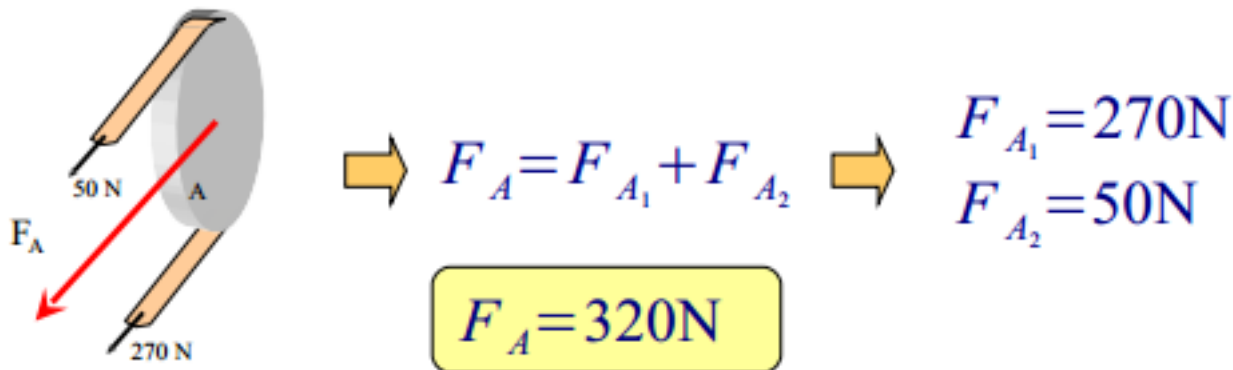
- Para a polia B, a força menor na correia é 15% da força maior
- Aço trabalhado a frio, UNS G10180
- Um fator de segurança de 1,9

**CUIDADO:** nesta resolução a redução da resistência pela fadiga (flexão alternada) não está sendo considerada.

### Exemplo 1.3 (continuação)

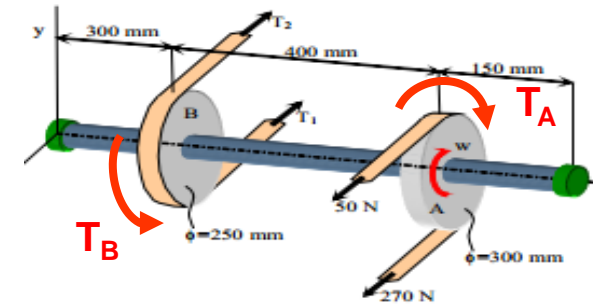
#### ANÁLISE DAS FORÇAS EXTERNAS ATUANTES

#### FORÇAS NA CORREIA

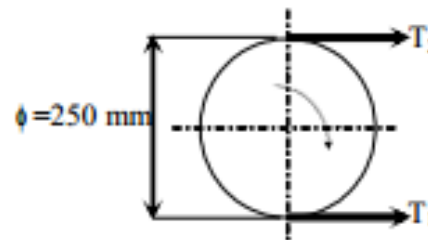
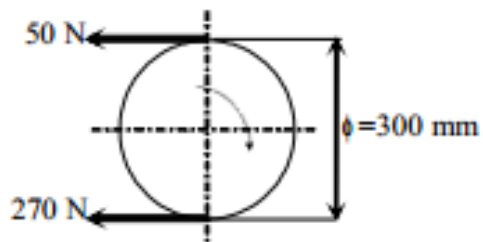
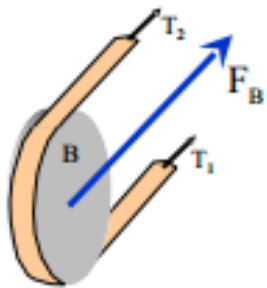




### Exemplo 1.3 (continuação)



### CÁLCULO DAS FORÇAS NAS CORREIAS DA POLIA B



CONDIÇÃO

$$T_2 = 0,15.T_1$$

$$T_A = T_B$$

EQUILÍBRIO

$$T_1 \cdot \frac{250}{2} - T_2 \cdot \frac{250}{2} = 270 \cdot \frac{300}{2} - 50 \cdot \frac{300}{2}$$

FORÇAS

$$T_1 \approx 310 \text{ N} \quad T_2 \approx 47 \text{ N}$$

RESULTANTE

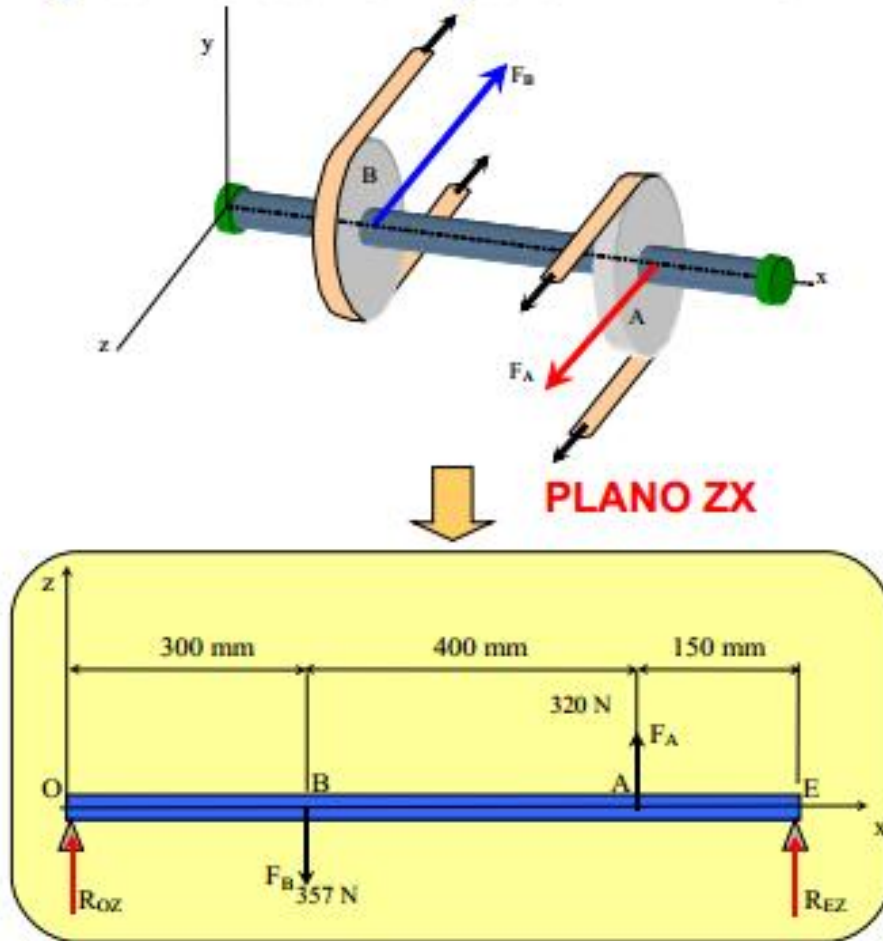
$$F_B = T_1 + T_2$$



$$F_B = 357 \text{ N}$$

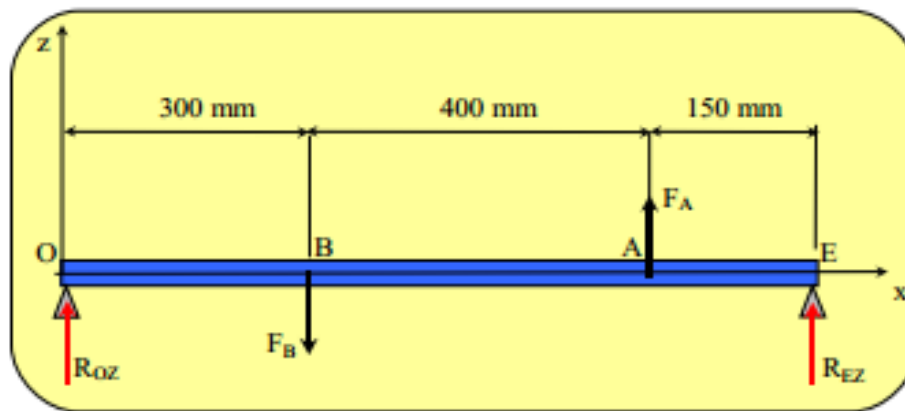
### Exemplo 1.3 (continuação)

#### DETERMINAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES INTERNAS



### Exemplo 1.3 (continuação)

#### DETERMINAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES INTERNAS



#### CÁLCULO DAS REAÇÕES

$$\sum M_0 = 0 \uparrow^+ \rightarrow F_B \cdot (300) - F_A \cdot (700) - R_{EZ} \cdot (850) = 0$$

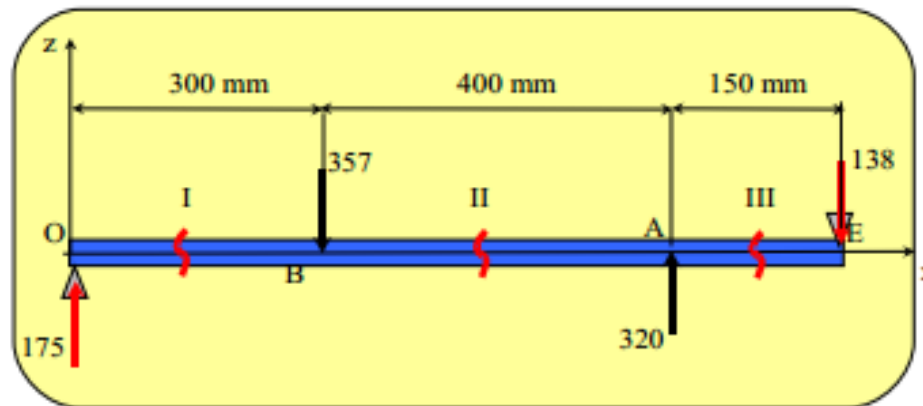
$$R_{EZ} \approx -138 \text{ N}$$

$$\sum F_z = 0 \uparrow^+ \rightarrow R_{OZ} - F_B + F_A + R_{EZ} = 0$$

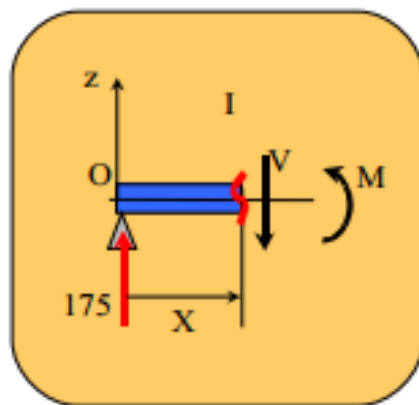
$$R_{OZ} \approx 175 \text{ N}$$

### Exemplo 1.3 (continuação)

#### MÉTODO DAS SEÇÕES



#### SEÇÃO I



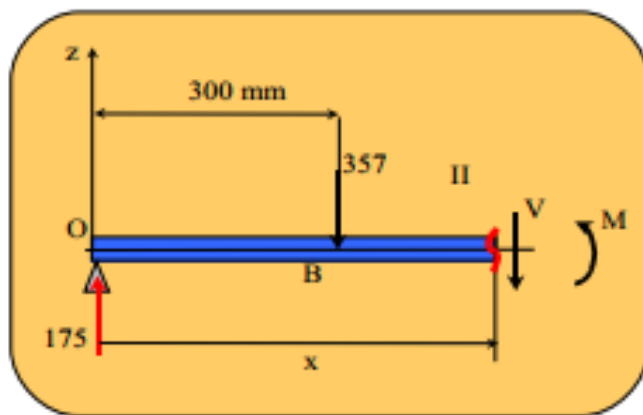
$$\sum F = 0 \uparrow + \rightarrow 175 - V = 0 \rightarrow V = 175 \text{ N}$$

$$\sum M = 0 \uparrow + \rightarrow M - 175.x = 0 \rightarrow M = 175.x$$

### Exemplo 1.3 (continuação)

#### MÉTODO DAS SEÇÕES

#### SEÇÃO II



$$\sum F = 0 \uparrow +$$

$$175 - 357 - V = 0$$

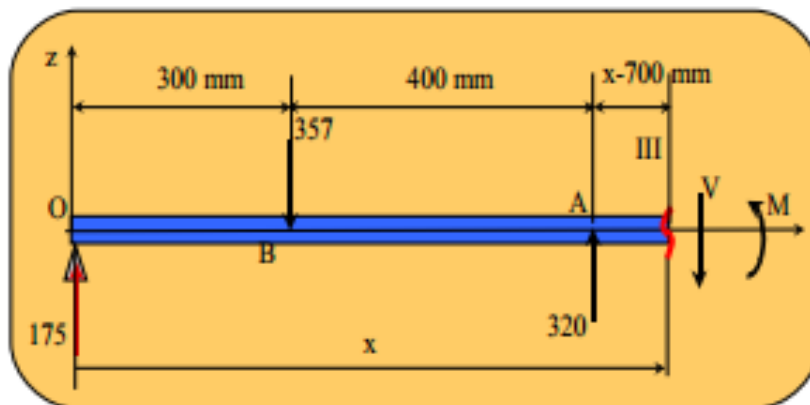
$$V = -182 \text{ N}$$

$$\sum M = 0 \uparrow +$$

$$M + 357 \cdot (x - 300) - 175 \cdot x = 0$$

$$M = -182 \cdot x + 107100$$

#### SEÇÃO III



$$\sum F = 0 \uparrow +$$

$$175 - 357 + 320 - V = 0$$

$$V = 138 \text{ N}$$

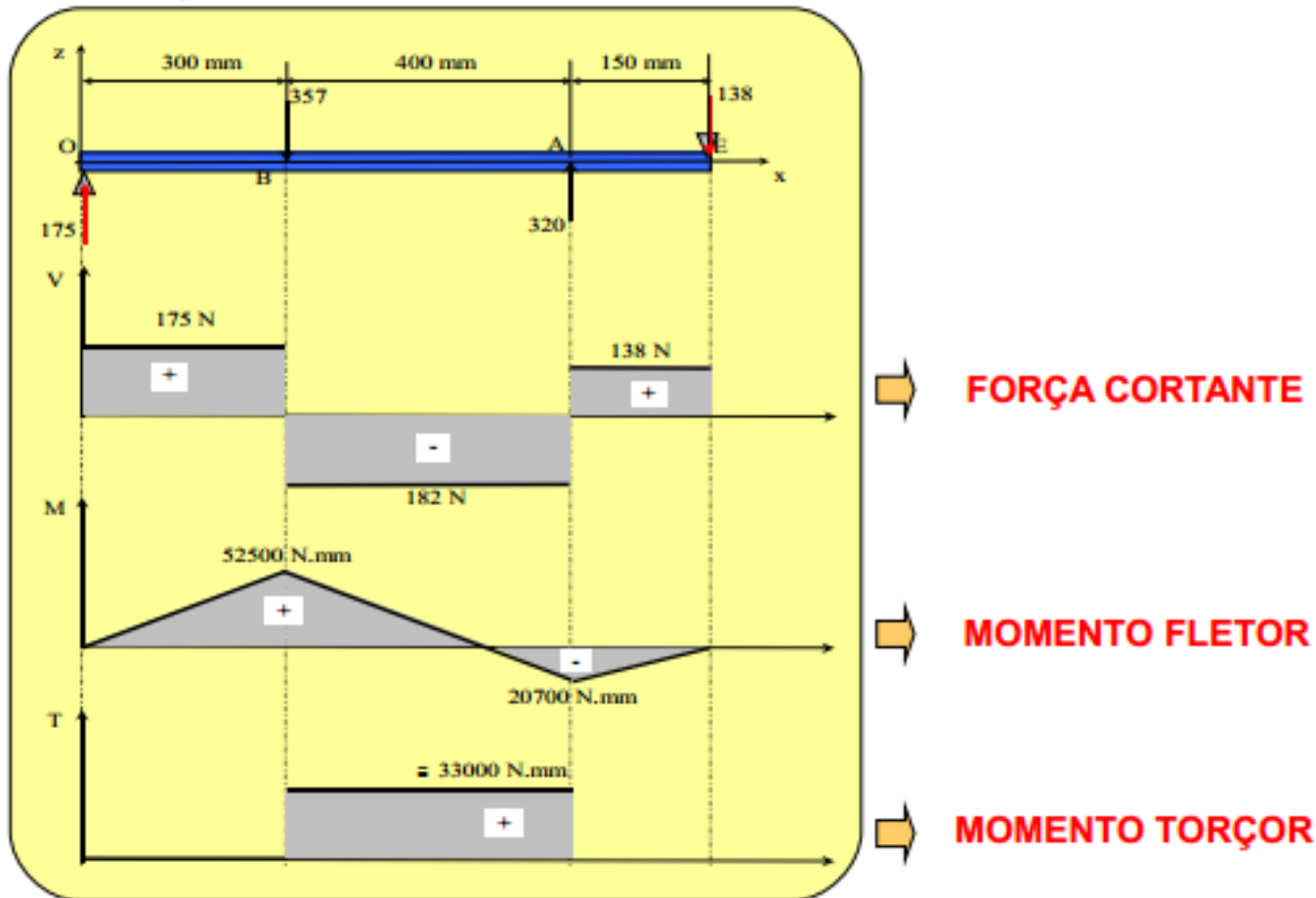
$$\sum M = 0 \uparrow +$$

$$M - 320 \cdot (x - 700) + 357 \cdot (x - 300) - 175 \cdot x = 0$$

$$M = 138 \cdot x - 117000$$

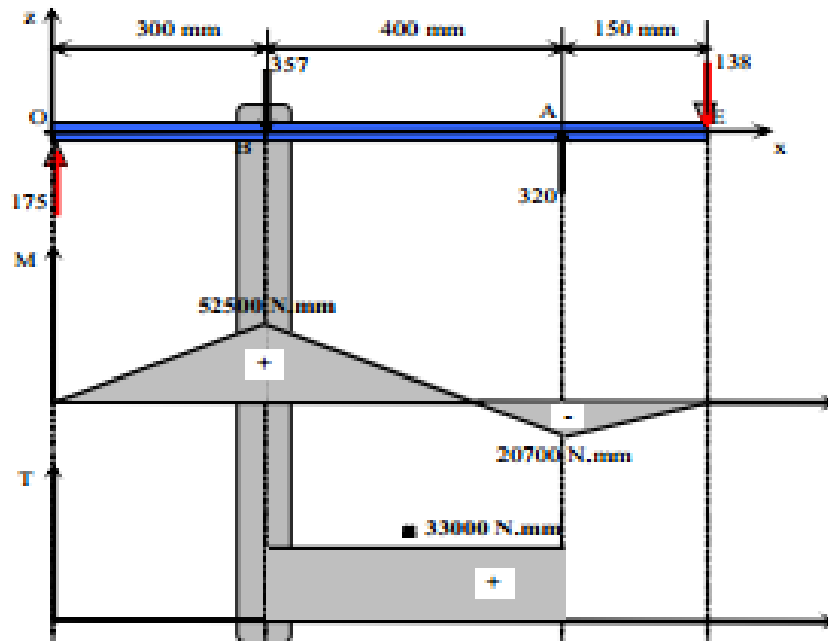
### Exemplo 1.3 (continuação)

#### SOLICITAÇÕES INTERNAS - DIAGRAMAS



### Exemplo 1.3 (continuação)

### DIMENSIONAMENTO DO EIXO



### REGIÃO MAIS SOLICITADA

#### PONTO B

$$M = 52,5 \text{ N.m}$$

$$T = 33,0 \text{ N.m}$$

#### DADOS DO MATERIAL (TABELA A.17 – Shigley)

**UNS G 10180**

$$\sigma_{esc} = 372 \text{ MPa}$$

### Exemplo 1.3 (continuação)

#### DIMENSIONAMENTO DO EIXO

Pela teoria da tensão máxima de cisalhamento (Tresca)

$$d = \left[ \frac{32}{\pi} \cdot \frac{N}{S_y} \sqrt{M^2 + T^2} \right]^{\frac{1}{3}} = \left[ \frac{32}{\pi} \cdot \frac{1,9}{372.000.000} \sqrt{52,5^2 + 33,0^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$d \approx 14,78\text{mm}$$

Pela teoria da tensão da energia de distorção (von Mises-Hencky)

$$d = \left[ \frac{32}{\pi} \cdot \frac{N}{S_y} \sqrt{M^2 + \frac{3}{4} \cdot T^2} \right]^{\frac{1}{3}} = \left[ \frac{32}{\pi} \cdot \frac{1,9}{372.000.000} \sqrt{52,5^2 + \frac{3}{4} \cdot 33,0^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$d \approx 14,59\text{mm}$$



Existem várias teoria de falha. Entretanto, uma única teoria não deve ser aplicada a um material específico porque o material pode se comportar de forma dúctil ou frágil dependendo da (1) temperatura, (2) carregamento ou (3) eventuais reações químicas (mudam o material)

### **Materiais dúcteis**

- Teoria da máxima tensão de cisalhamento (Tresca)
- Teoria da máxima energia de distorção (von Mises)

### **Materiais frágeis**

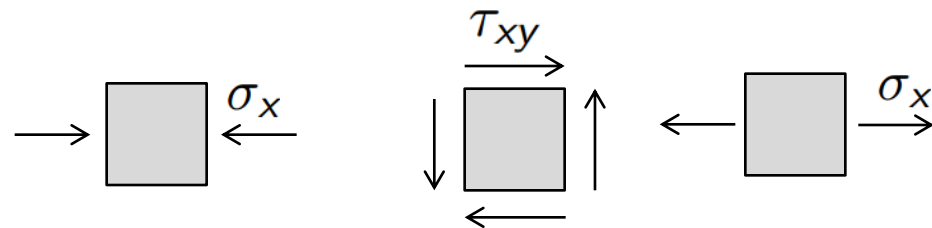
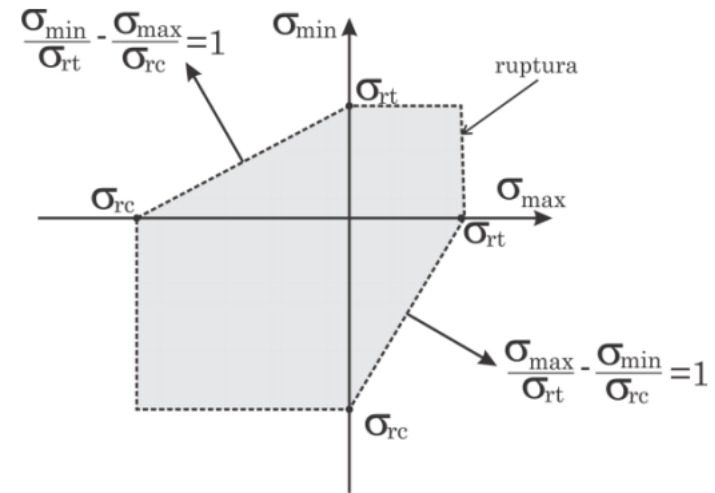
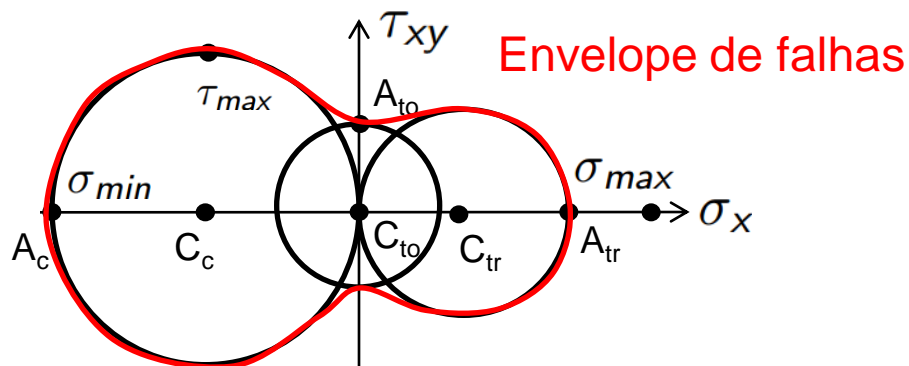
- **Critério de falha de Mohr**
- Teoria da máxima tensão normal

# Eixos e árvores

## Projeto para flexão e torção fixa: critérios de falha de Mohr

Aplicado a **materiais frágeis** onde as propriedades de tração e compressão são diferentes:

- ensaio de tração uniaxial,
- ensaio de compressão uniaxial;
- ensaio de torção.



$$C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) \quad A(\sigma_x, \tau_{xy})$$

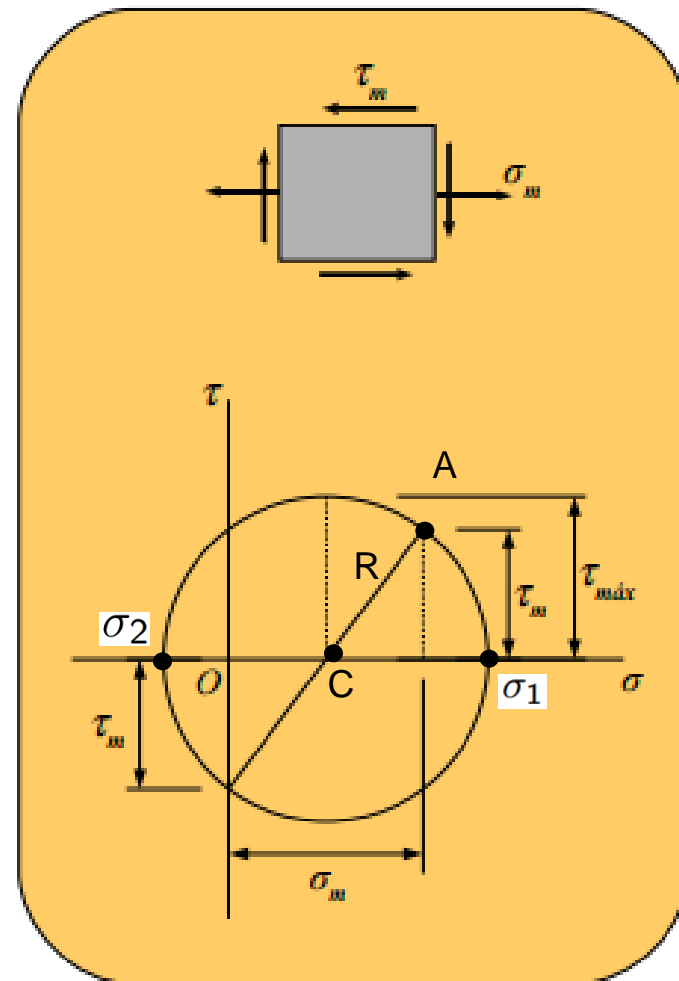
# Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção fixa: critérios de falha de Mohr

Pelo **circulo de Mohr** pode-se encontrar o valor de tensão de cisalhamento máxima:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_m}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_m}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2}$$

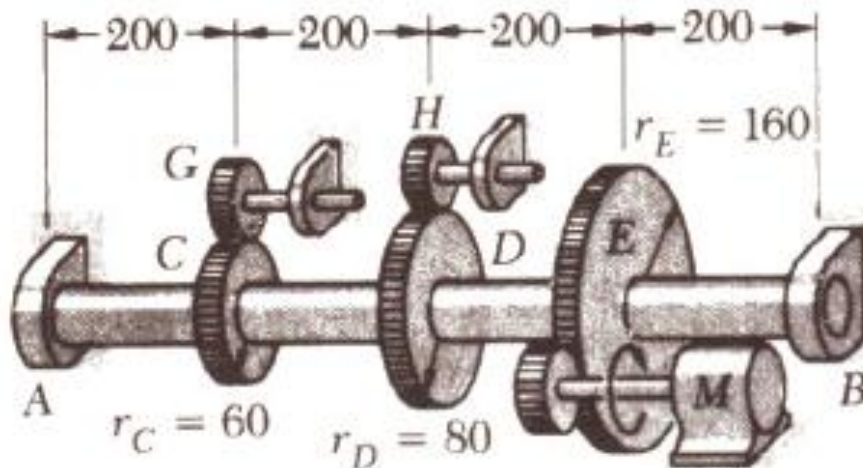


# Eixos e árvores

Projeto para flexão e torção fixa: critérios de falha

## Exemplo 1.4

Um eixo maciço  $AB$  gira a  $480\text{rpm}$ , transmitindo  $30\text{kW}$  do motor  $M$  às máquinas conectadas por engrenagens em  $G$  e  $H$ . Em  $G$  são transmitidos  $20\text{kW}$  e em  $H$   $10\text{kW}$ . Determinar o menor diâmetro permitido para  $AB$ , sendo  $\tau_{adm} = 50\text{MPa}$ .



Dados: Material dúctil

**Considere:**

- 1) as linhas de ação das forças tangenciais nas engrenagens entre (C e D) e E perpendiculares;
- 2) Dimensões em [mm]
- 3) Mancais sem atrito em A e B

Considere o critério da máxima tensão cisalhante

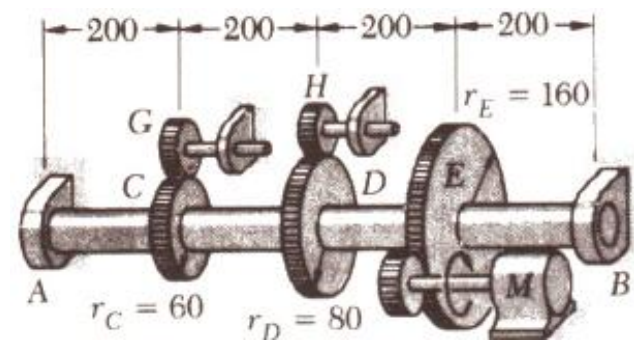
**CUIDADO:** nesta resolução a redução da resistência pela fadiga (flexão alternada) não está sendo considerada.

### Exemplo 1.4 (continuação)

Com a rotação, pode-se determinar o torque atuante em **G**:

$$f = 480 \text{rpm} = 8 \text{Hz}$$

$$T_E = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{30 \text{kW}}{2 \cdot \pi \cdot (8 \text{Hz})} = 597 \text{N.m}$$



Determina-se, então a força tangencial correspondente que atua na engrenagem:

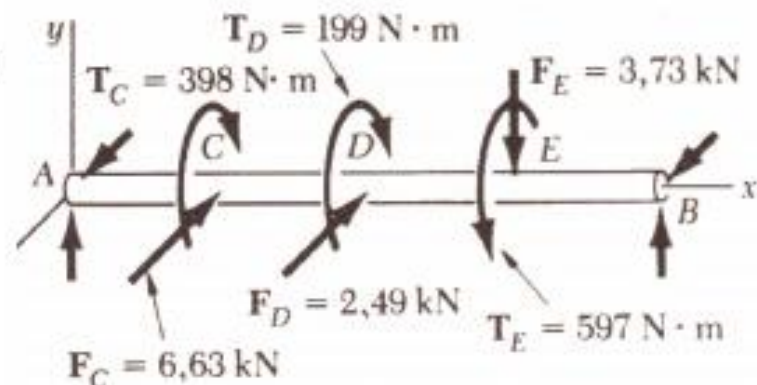
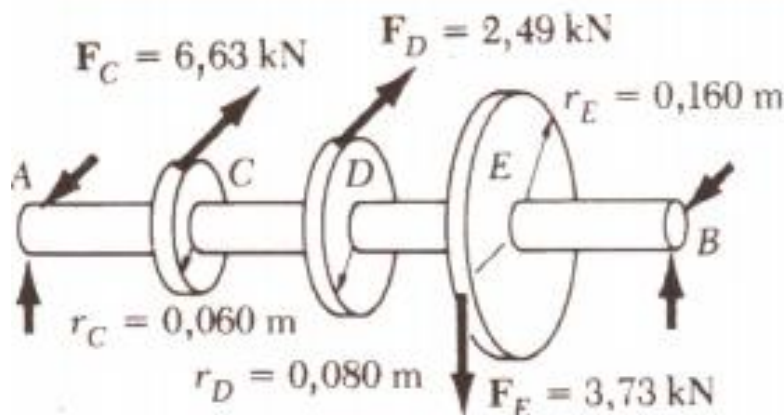
$$F_E = \frac{T_E}{r_E} = \frac{597 \text{N.m}}{0,16 \text{m}} = 3,73 \text{kN}$$

### Exemplo 1.4 (continuação)

Analogamente:

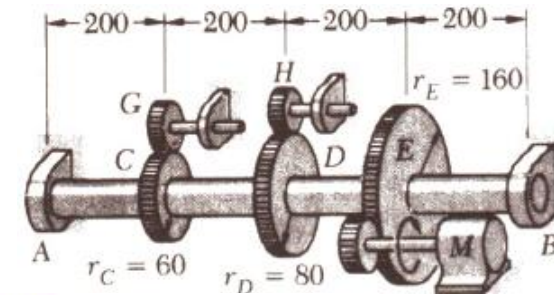
$$T_C = \frac{20 \text{ kW}}{2 \cdot \pi \cdot (8 \text{ Hz})} = 398 \text{ N}\cdot\text{m} \quad F_C = 6,63 \text{ kN}$$

$$T_D = \frac{10 \text{ kW}}{2 \cdot \pi \cdot (8 \text{ Hz})} = 199 \text{ N}\cdot\text{m} \quad F_D = 2,49 \text{ kN}$$

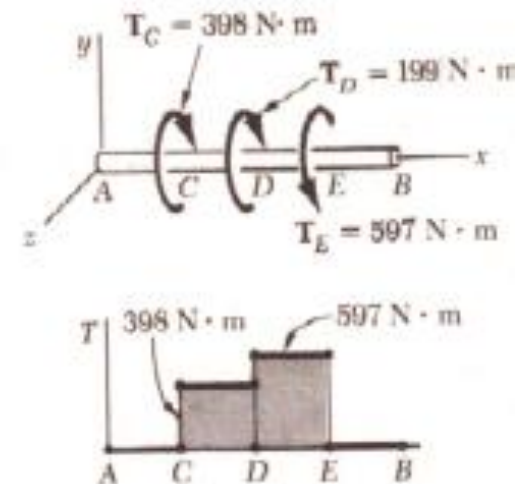
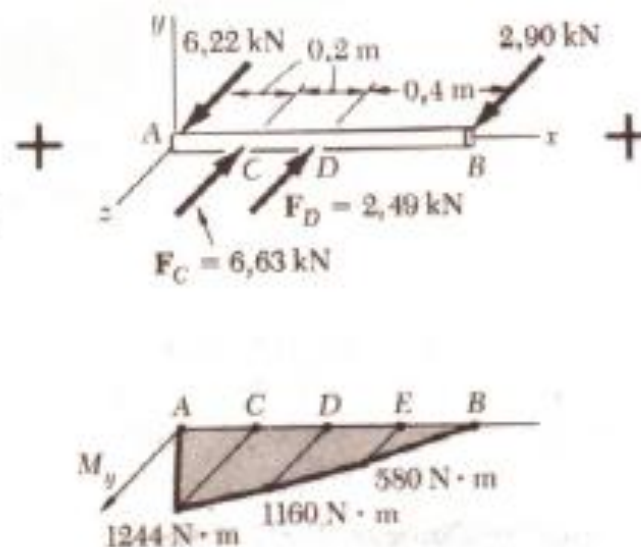
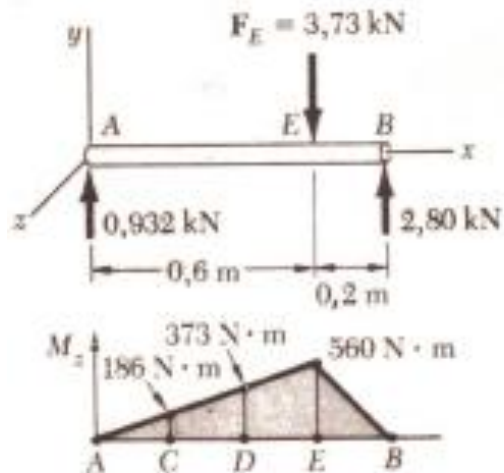




### Exemplo 1.4 (continuação)



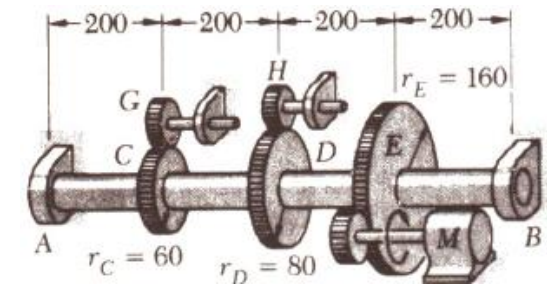
Pode-se, então calcular as reações nos mancais **A** e **B**, resultando nos seguintes diagramas de momentos fletores e de momentos torçores.



### Exemplo 1.4 (continuação)

Calculando, em todas as seções potencialmente críticas, o valor:

$$\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T^2}$$



$$\sqrt{186^2 + 1244^2 + 398^2} = 1319 \text{ N.m} \quad \text{Ponto } C$$

$$\sqrt{373^2 + 1160^2 + 597^2} = 1357 \text{ N.m} \quad \text{Ponto } D$$

$$\sqrt{560^2 + 580^2 + 597^2} = 1003 \text{ N.m} \quad \text{Ponto } E$$

Conclui-se que o valor máximo ocorre à direita do ponto *D*.



### Exemplo 1.4 (continuação)

Assim, o diâmetro mínimo do eixo para  $\tau_{adm} = 50\text{MPa}$ :

$$d = \left[ \frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{\tau_{adm}} \cdot \left( \sqrt{M_y^2 + M_z^2} + T \right)_{\text{máx}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$d = \left[ \frac{16}{\pi} \cdot \frac{1357\text{N.m}}{50.000.000\text{Pa}} \right]^{\frac{1}{3}} \approx 51,7\text{mm}$$