

# EIXOS

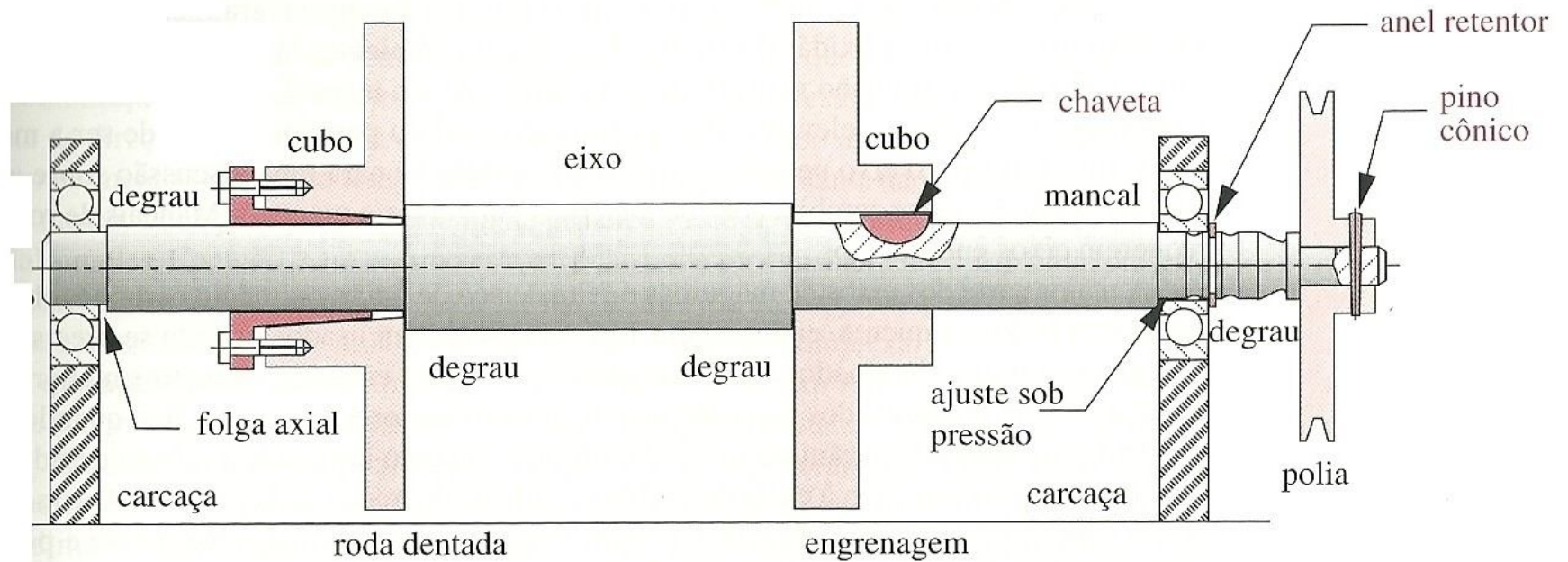
**Prof. Alexandre A. Pescador Sardá**



# Carga em eixos

- Torção devido ao torque transmitido;
- Flexão devido às cargas transversais em engrenagens/polias;
- Caso geral: torque variado e momento variado em combinação.

# Conexões e Concentração de tensões



# Conexões e Concentração de tensões

-Chavetas;

-Anéis retentores (usados para não permitir movimento axial do eixo contra o mancal);

-Pinos transversais;

Usados para segurar elementos fixados ao eixo a fim de transmitir o torque requerido ou prender a peça axialmente.

Contribuem na concentração de tensões.

# Materiais para eixos

-**Aço**: alto módulo de elasticidade, minimizando deflexões;

-**Ferro fundido**: engrenagens fundidas com o eixo;

-**Bronze e aço inoxidável**: ambientes marítimos ou corrosivos;

**Aço endurecido**: eixo se apóia em mancal de deslizamento;

**Aços liga**: alta resistência.

## Potência no eixo

$$P = T\omega \quad \omega[rd / s]$$

$$P_{med} = T_{med}\omega_{med} \quad \omega[rd / s]$$

# Projeto de Eixos

## Definições:

O termo EIXO normalmente se refere a um elemento relativamente longo, de secção circular, que gira e transmite potência.

Por outro lado, porém, um eixo pode possuir uma secção não circular e que não precisa, necessariamente, girar, sendo assim um elemento estacionário que serve para suportar um elemento girante (como os eixos de um automóvel, por exemplo).



# Projeto de Eixos

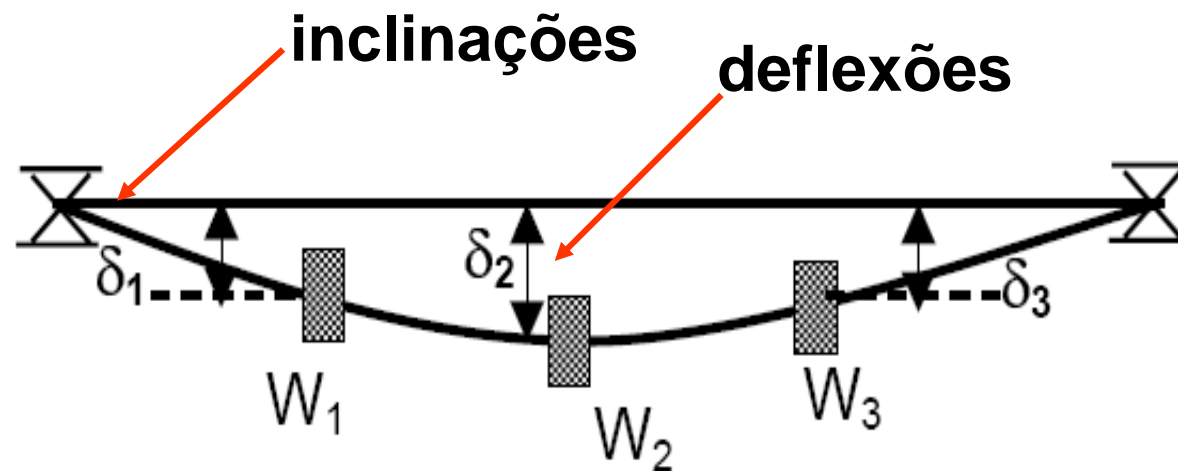
Preliminares:

*“o dimensionamento das engrenagens, polias, mancais e demais elementos deverão ter sido preliminarmente analisados, com definições acerca dos seus tamanhos e espaçamentos”*

*“tais parâmetros permitirão uma análise mediante os critérios de deflexão e rigidez, como também, de tensão e resistência”*

# Projeto de Eixos

Deflexões e inclinações – a geometria de um eixo corresponde geralmente a um cilindro escalonado, sendo que as análises referentes as deflexões e inclinações somente poderão ser realizadas após a definição completa da geometria do eixo!!



# Projeto de Eixos

## Exemplo



# Projeto de Eixos

## Tensões normais no eixo

$$\sigma_a = k_f \frac{M_a \cdot c}{I}$$

$$\sigma_m = k_{fm} \frac{M_m \cdot c}{I}$$

$k_f$ : fator de concentração de tensão de fadiga por flexão alternada;

$k_{fm}$ : fator de concentração de tensão de fadiga por flexão média;

# Projeto de Eixos

**Para eixo de dimensão sólida e circular:**

$$c = r = \frac{d}{2} \quad I = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\sigma_a = k_F \frac{32M_a}{\pi d^3}$$

$$\sigma_m = k_{Fm} \frac{32M_m}{\pi d^3}$$

# Projeto de Eixos

**As tensões torcionais de cisalhamento média e alternante são dadas por:**

$$\tau_a = k_{fs} \frac{T_a r}{J}$$

$$\tau_m = k_{fsm} \frac{T_m r}{J}$$

$k_{fs}$  e  $k_{fsm}$  são fatores de concentração de tensão torcional de fadiga para componentes médias e alternantes.

# Projeto de Eixos

**Para eixo de dimensão sólida e redonda (Pag. 920):**

$$c = r = \frac{d}{2} \quad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\tau_a = k_{fs} \frac{16T_a}{\pi d^3}$$

$$\tau_m = k_{fsm} \frac{16T_m}{\pi d^3}$$

# Projeto de Eixos

Para  $F_z$  estática (peso):

$$c = r = \frac{d}{2} \quad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\sigma_m = k_{Fm} \frac{F_z}{A} = k_{Fm} \frac{4F_z}{\pi d^2}$$



# Critérios de falhas em carregamento combinado

Combinação de torção e flexão em materiais dúcteis em fadiga segue a relação elíptica:

$$\left( \frac{\sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left( \frac{\tau_m}{S_{ys}} \right)^2 = 1$$

**Flexão alternada x torção estática**

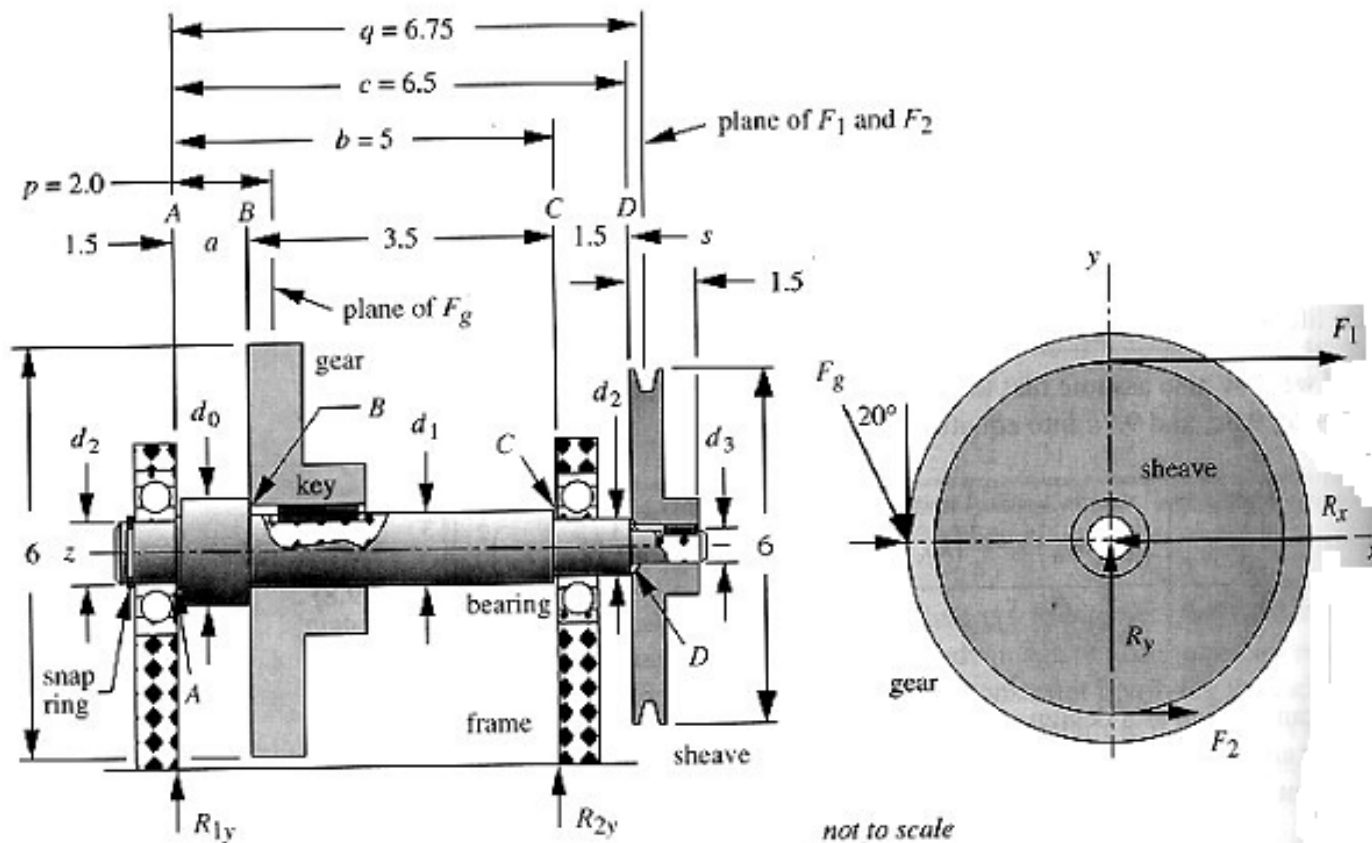
$\sigma_a$  : *tensão flexional*

$S_e$  : *limite de fadiga em flexão pura*

$\tau_m$  : *tensão estática torcional*

$S_{ys}$  : *resistência de escoamento à torção*

# Critérios de falhas em carregamento combinado



# Critérios de falhas em carregamento combinado

Combinação de torção e flexão em materiais dúcteis em fadiga segue a relação elíptica:

$$\left(\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{S_{es}}\right)^2 = 1 \quad \text{Flexão reversa x torção reversa}$$

$\sigma_a$  : *tensão flexional*

$S_e$  : *limite de fadiga em flexão pura*

$\tau_a$  : *tensão reversa torcional*

$S_{es}$  : *limite de fadiga em torção pura*

# Projeto do Eixo

Deflexão geralmente é o fator crítico, porque deflexões excessivas causarão desgaste rápido dos mancais dos eixos.

Engrenagens, correias ou correntes comandadas pelo eixo podem também sofrer por desalinhamento introduzido pelas deflexões dos eixos.

Projetado pela primeira vez usando considerações de tensão, e as deflexões são calculadas uma vez que a geometria esteja completamente definida.

# Projeto do Eixo

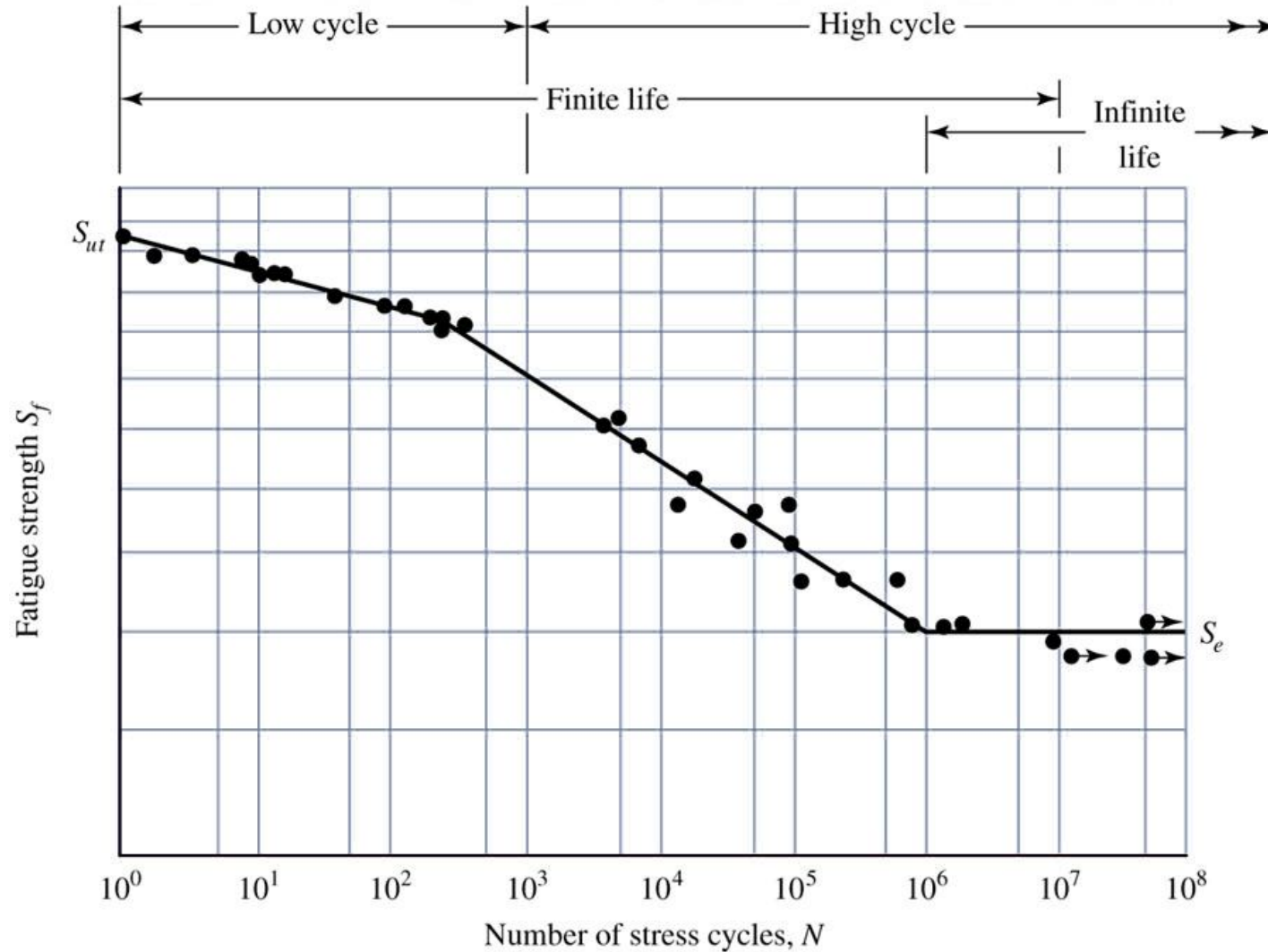
Freqüência natural do eixo deve ser diferente da freqüência de excitação, caso contrário vibrações, tensões elevadas e grandes deflexões devido à ressonância poderão ocorrer.

# Projeto do Eixo

Regras gerais para projetos de eixos:

- 1) L menor possível para minimizar tensões e deflexões;
- 2) Bi-apoiado ao invés de balanço;
- 3) Usar eixos vazados (melhor razão rigidez/massa);
- 4) Colocar concentradores de tensão longe das regiões de grandes momentos fletores; aliviar o efeito com alívio de tensões (R grandes).
- 5) Minimizar deflexões, usar aço baixo carbono (baixo custo);
- 6) Para cargas axiais de compressão, utilizar somente um mancal axial para evitar de sobrecarregar os mancais na expansão;
- 7) Freqüência natural do eixo deve ser maior do que 3 vezes a freqüência de excitação.

# Projeto do Eixo



Um diagrama S-N traçado a partir dos resultados de testes de fadiga axial completamente inversa. Material: aço UNS G41300, normalizado;  $S_{ut} = 116$  kpsi. (Shigley, pg.310)

# Projeto do Eixo

**Projeto para flexão alternada e torção fixa:**

$$\sigma_a \neq 0; \quad \tau_a = 0; \quad \sigma_m = 0; \quad \tau_m \neq 0;$$

Derivação da equação de eixo da ASME:

$$\left( \frac{\sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left( \frac{\tau_m}{S_{ys}} \right)^2 = 1$$

Fator de segurança  $N_f$ :

$$\left( N_f \frac{\sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left( N_f \frac{\tau_m}{S_{ys}} \right)^2 = 1$$



# Projeto do Eixo

Para cisalhamento puro:

Tensão equivalente de Von Mises: definida como a tensão de tração uniaxial que criaria a mesma energia de distorção criada pela combinação atual das tensões aplicadas.

Permite tratar casos de tensão multiaxial combinada a tensões de cisalhamento como se fossem devidos a um carregamento de tração pura.:

$$\sigma_1 = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0,577 S_y = \tau_{\max}$$

$$S_{ys} = \frac{S_y}{\sqrt{3}}$$

$S_{ys}$  : *resistência de escoamento à torção;*

$S_y$  : *tensão de escoamento.*

# Projeto do Eixo



$$\left( N_f \frac{\sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left( N_f \sqrt{3} \frac{\tau_m}{S_y} \right)^2 = 1$$

Substituindo-se as tensões:

$$\left[ \left( k_f \frac{32 M_a}{\pi d^3} \right) \left( \frac{N_f}{S_e} \right) \right]^2 + \left[ \left( k_{fsm} \frac{16 T_m}{\pi d^3} \right) \left( \frac{N_f \sqrt{3}}{S_y} \right) \right]^2 = 1$$

ou:

$$d = \left\{ \frac{32 N_f}{\pi} \left[ \left( k_f \frac{M_a}{S_e} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( k_{fsm} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

# Projeto do Eixo



Padronização ASME:  $k_{fsm}=1,0$

$$d = \left\{ \frac{32 N_f}{\pi} \left[ \left( k_f \frac{M_a}{S_e} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

# Projeto do Eixo

**Projeto para flexão alternada e torção alternada:**

$$d = \left\{ \frac{32 N_f}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{(k_f M_a)^2 + \frac{3}{4} (k_{fs} T_a)^2}}{S_f} + \frac{\sqrt{(k_{fm} M_m)^2 + \frac{3}{4} (k_{fs} T_m)^2}}{S_{ut}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

# Projeto do Eixo

Projete um eixo circular para suportar uma potência de 1000 W a 1800 rpm e submetido a um momento fletor alternado de 20 N.m. Utilizar um fator de segurança de pelo menos 3,0 e material aço 1020, com tensão limite de fadiga em flexão pura de 200 Mpa e tensão de escoamento em tração de 393 MPa ?

$$P = T\omega$$

$$1000W = T(2\pi)\frac{1800}{60}$$

$$T_m = 5,30N.m$$

$$M_a = 20,0N.m$$

# Projeto do Eixo

$$d = \left\{ \frac{32 N_f}{\pi} \left[ \left( k_f \frac{M_a}{S_e} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$S_y = 393 \text{ MPa}$$

$$S_e = 200 \text{ MPa}$$

$$d = \left\{ \frac{32(3)}{\pi} \left[ \left( 1 \frac{20000 \text{ N.mm}}{200} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{5300}{393} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d = 14,54 \text{ mm}$$

# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas



- Primeiro passo consiste em dimensionar as engrenagens e polias para a velocidade e a potência especificadas.
- O diâmetro de raiz dos dentes de engrenagem ou sulco de polia, somado ao espaço radial para um rasgo de chaveta, fixa uma restrição no tamanho do eixo.
- Com o tamanho de engrenagem e polia, as forças no sistema são fixadas.
- O segundo passo é selecionar mancais para prover vida adequada sob essas forças e velocidades. Após serem selecionados os mancais, a distância entre eles será definida.

# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

## Restrições geométricas x deformações limites

Slopes	
Tapered roller	0.0005–0.0012 rad
Cylindrical roller	0.0008–0.0012 rad
Deep-groove ball	0.001–0.003 rad
Spherical ball	0.026–0.052 rad
Self-align ball	0.026–0.052 rad
Uncrowned spur gear	< 0.0005 rad

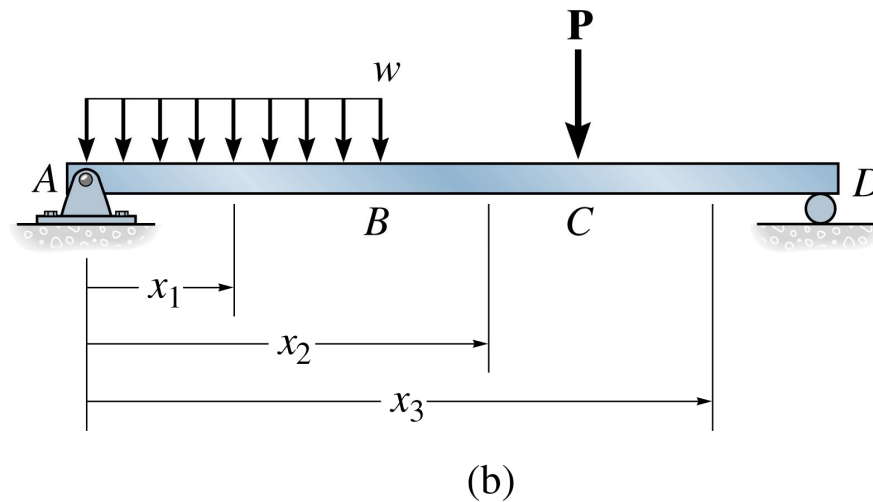
  

Transverse deflections	
Spur gears with $P < 10$ teeth/in	0.010 in
Spur gears with $11 < P < 19$	0.005 in
Spur gears with $20 < P < 50$	0.003 in

**Premissa** – definir um eixo de diâmetro uniforme que satisfaça todas as condições de distorção (condições contorno).



# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas



Eq.diferencial da linha elástica:

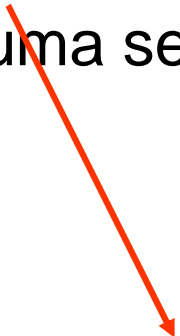
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

- cuja integração permite escrever:  $\frac{dy}{dx} = \theta = \frac{1}{EI} \int M$

- possibilitando-se obter um diâmetro preliminar para o eixo pela imposição das condições de contorno e pela substituição do momento de inércia de uma secção circular maciça, visto que:

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$



dados do problema!!

# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

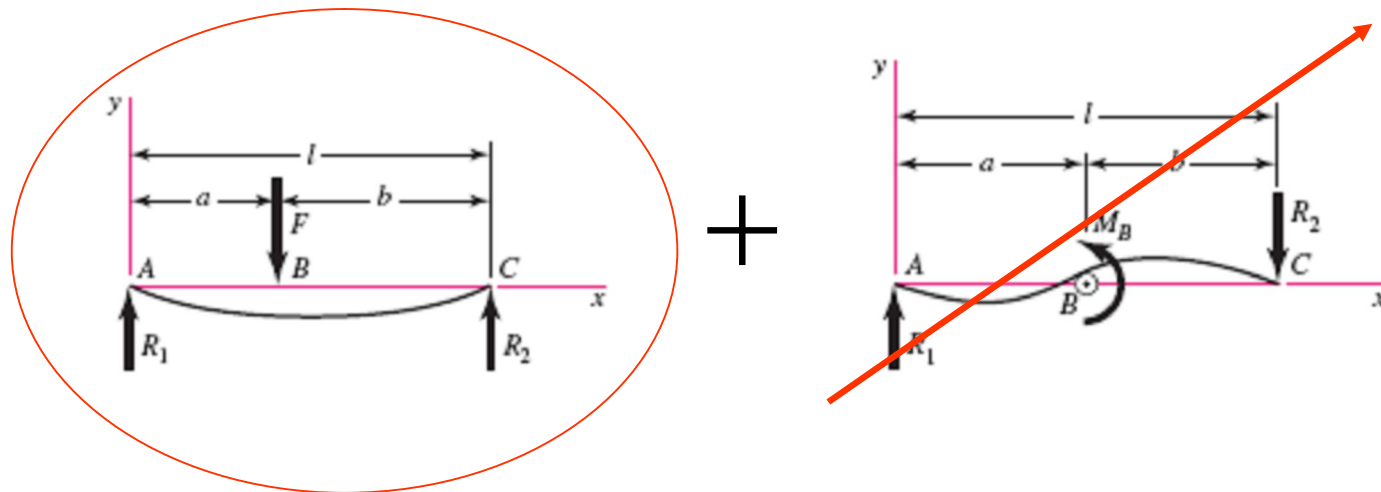


- uma segunda integração permite ainda escrever:

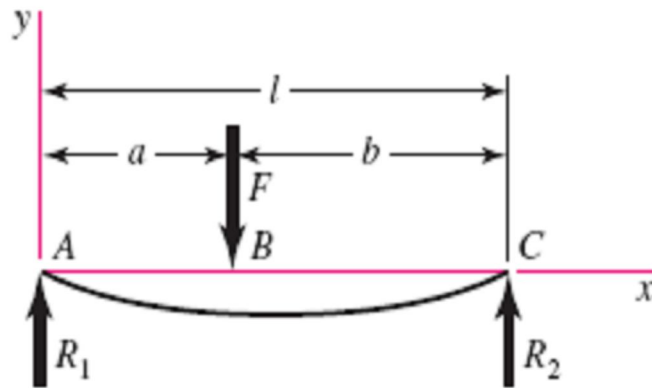
$$y = \frac{1}{EI} \iint M$$

# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

Caso mais geral de carregamento – eixo com **cargas concentradas** + momentos aplicados



# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas



$$R_1 = \frac{Fb}{l} \quad R_2 = \frac{Fa}{l}$$

$$V_{AB} = R_1 \quad V_{BC} = -R_2$$

$$M_{AB} = \frac{Fbx}{l} \quad M_{BC} = \frac{Fa}{l}(l - x)$$

$$y_{AB} = \frac{Fbx}{6EI} (x^2 + b^2 - l^2)$$

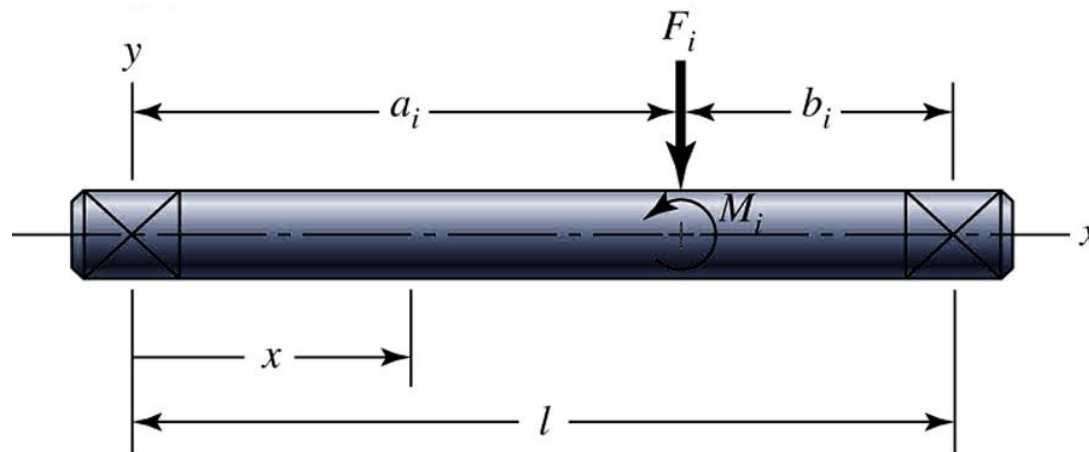
$$y_{BC} = \frac{Fa(l - x)}{6EI} (x^2 + a^2 - 2lx)$$

$$y_{AB} = \frac{F_i \cdot b_i \cdot x}{6EI \cdot l} (x^2 + b_i^2 - l^2)$$

Tabela A-9-6 (Apêndice, pg.909)

“i” = variável em função do número de cargas atuantes sobre o eixo (princípio da superposição efeitos)

# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas



$$y_{AB} = \frac{F_i \cdot b_i \cdot x}{6EI \cdot l} (x^2 + b_i^2 - l^2) + \frac{M_i \cdot x}{6EI \cdot l} (x^2 + 3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2)$$

Mancal esquerdo

“i” = variável em função do número de cargas atuantes sobre o eixo (princípio da superposição efeitos)

# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas



- diferenciando e impondo a condição -  $x = 0$  (mancal da esquerda), resulta em:

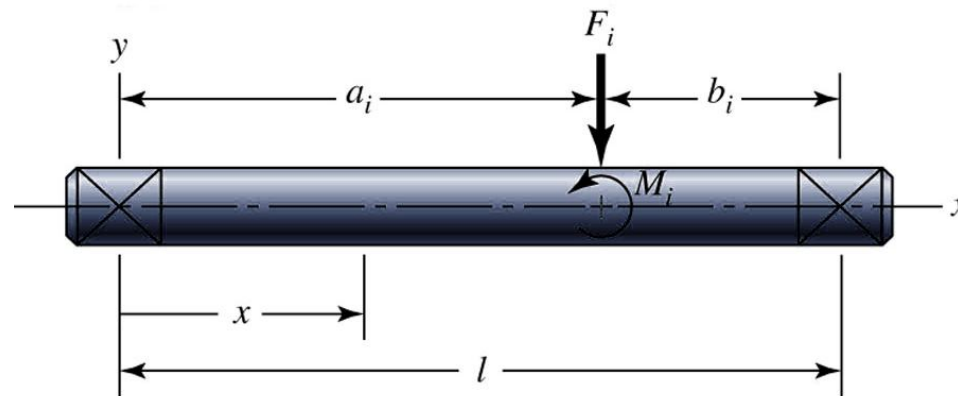
$$\theta_A = \frac{1}{6EI.L} \left[ F_i \cdot b_i (b_i^2 - l^2) + M_i (3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2) \right]$$

Para um número de forças concentradas e de momentos no plano xy, fazendo-se uso da sobreposição:

$$\theta_A = \frac{1}{6EI.L} \sum \left[ F_i \cdot b_i (b_i^2 - l^2) + M_i (3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2) \right]$$

# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

Considerando o plano xy como o plano vertical V e o plano xz como o plano horizontal H, para carregamentos em ambos os planos, os resultados podem ser adicionados como vetores:



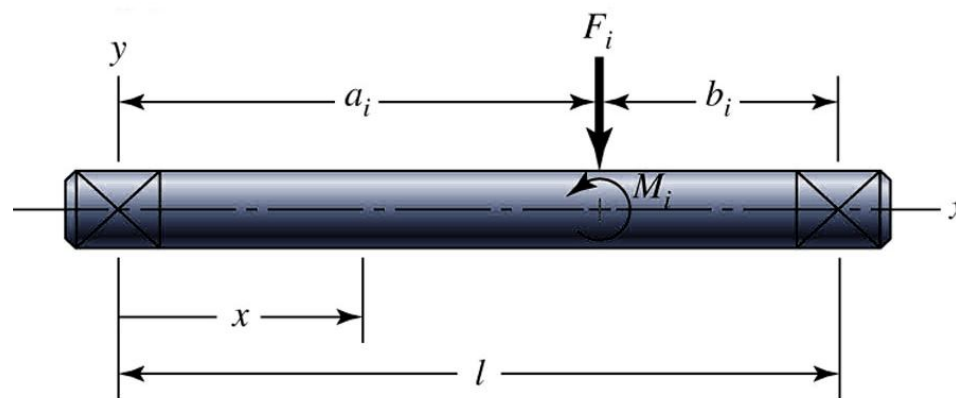
$$\theta_A = \frac{1}{6EIL} \left\{ \sum \left[ F_i \cdot b_i (b_i^2 - l^2) + M_i (3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2) \right]_H^2 + \sum \left[ F_i \cdot b_i (b_i^2 - l^2) + M_i (3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2) \right]_V^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$



# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

Considerando o plano  $xy$  como o plano vertical  $V$  e o plano  $xz$  como o plano horizontal  $H$ , para carregamento em ambos os planos, os resultados podem ser adicionados como vetores, de modo a prover:

$$\theta_A = \frac{1}{6EI} \left\{ \left[ \sum [F_i \cdot b_i (b_i^2 - l^2) + M_i (3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2)] \right]^2 + \left[ \sum [F_i \cdot b_i (b_i^2 - l^2) + M_i (3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2)] \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$



# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas



Para restrição de inclinação do mancal esquerdo:

$$d = \left( \frac{32.CS}{3E.l.\pi.\theta_{LIM}} \left\{ \left[ \sum F_i.b_i(b_i^2 - l^2) + \sum M_i(3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2) \right]_H^2 + \left[ \sum F_i.b_i(b_i^2 - l^2) + \sum M_i(3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2) \right]_V^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^{1/4}$$

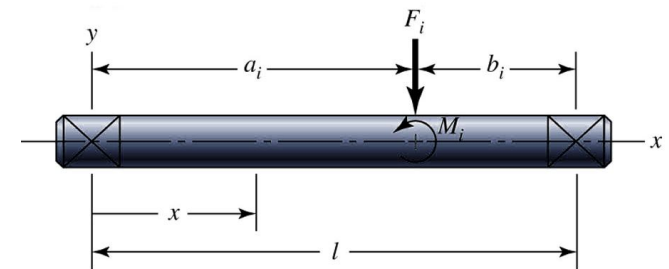
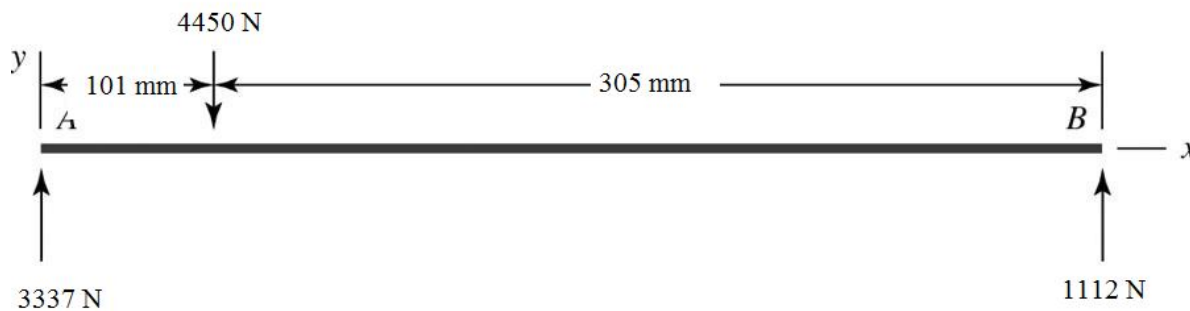
Para restrição de inclinação do mancal direito:

$$d = \left( \frac{32.CS}{3E.l.\pi.\theta_{LIM}} \left\{ \left[ \sum F_i.a_i(l^2 - a_i^2) + \sum M_i(3a_i^2 - l^2) \right]_H^2 + \left[ \sum F_i.a_i(l^2 - a_i^2) + \sum M_i(3a_i^2 - l^2) \right]_V^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^{1/4}$$

# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

## EXERCÍCIO 18-1

O eixo de aço ilustrado carrega duas engrenagens retas e dispõe de carregamento como mostrado. Os mancais localizados em A e B são mancais de rolos cilíndricos. A inclinação espacial de linha de centro nos mancais está limitada a 0,001 rad, com um fator de projeto de 1,5. Estime o diâmetro de um eixo uniforme que satisfaça às restrições de inclinação impostas pelos mancais.



### Slopes

Tapered roller	0.0005–0.0012 rad
Cylindrical roller	0.0008–0.0012 rad
Deep-groove ball	0.001–0.003 rad
Spherical ball	0.026–0.052 rad
Self-align ball	0.026–0.052 rad
Uncrowned spur gear	< 0.0005 rad

### Transverse deflections

Spur gears with $P < 10$ teeth/in	0.010 in
Spur gears with $11 < P < 19$	0.005 in
Spur gears with $20 < P < 50$	0.003 in

# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas



Para restrição de inclinação do mancal esquerdo:

$$d = \left( \frac{32.CS}{3E.l.\pi.\theta_{LIM}} \left\{ \left[ \sum F_i.b_i(b_i^2 - l^2) + \sum M_i(3a_i^2 - 6a_i.l + 2l^2) \right]_H^2 + \left[ \sum F_i.b_i(b_i^2 - l^2) + \sum M_i(3a_i^2 - 6a_i.l + 2l^2) \right]_V^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^{1/4}$$

$$d = \left( \frac{32.(1,5)}{3(210 \cdot 10^9 Pa)(0,406m).\pi.(0,001rd)} \left\{ \left[ \sum 1335.(0,152)(0,152^2 - 0,406^2) \right]_H^2 + \left[ \sum 4450.(0,305)(0,305^2 - 0,406^2) \right]_V^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^{1/4}$$

$$d = 0,0882 m = 88,2 mm$$

# Projeto de Eixos por Restrições Geométricas



Dados o diagrama de momento fletor e a geometria do eixo, a deflexão e a inclinação em vários pontos podem ser encontradas. Se, ao examinar as deflexões, qualquer valor encontrado for maior que a deflexão admissível  $y_{lim}$ , um novo diâmetro poderá ser determinado a partir de:

$$d_{new} = d_{old} \left[ \frac{CS \cdot y_{old}}{y_{lim}} \right]^{1/4}$$

Similarmente, se qualquer inclinação for maior do que a inclinação admissível  $\theta_{lim}$ , um novo diâmetro pode ser determinado a partir de:

$$d_{new} = d_{old} \left[ \frac{CS \cdot \theta_{old}}{\theta_{lim}} \right]^{1/4}$$

# Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

Preliminares:

- quando um eixo está girando, a excentricidade causa uma deflexão devido a força centrífuga, a qual é resistida pela rigidez  $EI$  do eixo;
- para deflexões pequenas, nenhum dano será ocasionado;
- porém, para determinadas velocidades o eixo torna-se instável com as deflexões podendo aumentar sem um limite superior;
- tal problema é designado por “**velocidades críticas**”.
- As primeiras velocidades críticas devem ser superiores a pelo menos duas vezes a velocidade operacional.

# Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

Premissas – na fase de projeto, buscar as primeiras velocidades críticas, as quais devem ser evitadas!!

- caso mais simples – eixo de diâmetro uniforme suportado por dois mancais extremos

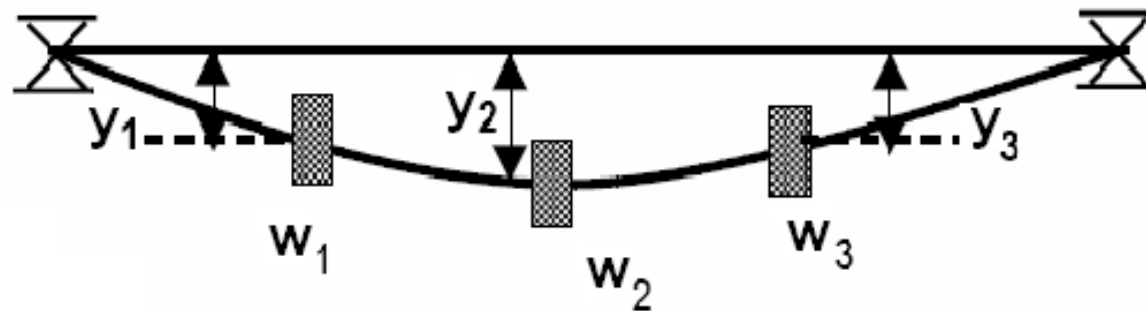


$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{1}\right)^2 \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}} = \left(\frac{\pi}{1}\right)^2 \sqrt{\frac{g E I}{A \gamma}} \text{ (rad/s)}$$

M é a massa por unidade de comprimento; A é a área da secção transversal; e  $\gamma$  o peso específico.

# Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

Eixo com um conjunto de acessórios - **Método de Rayleigh** para massas discretizadas:



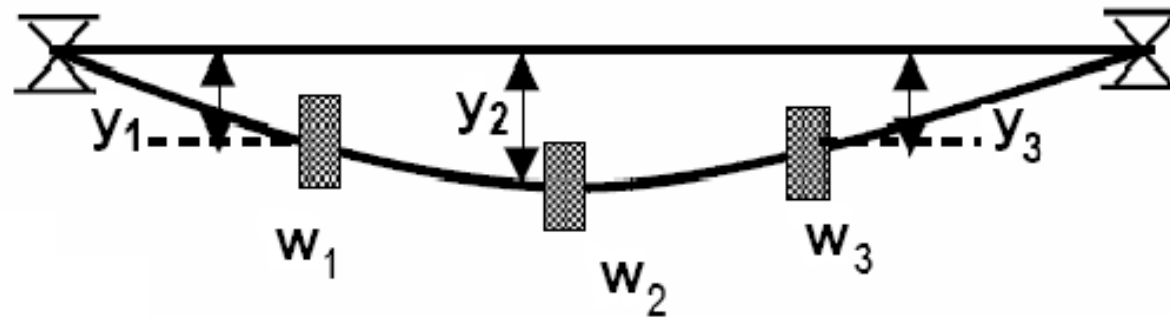
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \cdot \sum w_i \cdot y_i}{\sum w_i \cdot y_i^2}} \text{ (rad/s)}$$

Em que  $w_i$  é o peso na  $i$ -ésima localidade e  $y_i$ , a deflexão na  $i$ -ésima localidade do corpo.



# Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

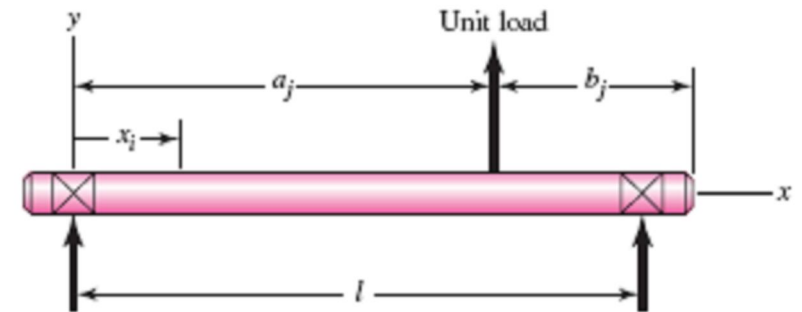
- Dificuldade matemática – definir as deflexões transversais em cada ponto considerado!!



- Solução prática – utilização dos chamados “coeficientes de influência”!

# Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

- coeficiente de influência = deflexão transversal na posição “i” devido a uma carga unitária na posição “j”. Para uma **viga apoiada** com uma carga unitária, tem-se:



$$\delta_{ij} = \begin{cases} \frac{b_j \cdot x_i}{6EIL} (L^2 - b_j^2 - x_i^2) \rightarrow x_i \leq a_j \\ \frac{a_j \cdot (L - x_i)}{6EIL} (2L \cdot x_i - a_j^2 - x_i^2) \rightarrow x_i > a_j \end{cases}$$

onde :  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$

# Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

da onde, os abaixamentos em cada ponto podem ser determinados por:

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1 \cdot \delta_{11} + F_2 \cdot \delta_{12} + F_3 \cdot \delta_{13} \\ y_2 &= F_1 \cdot \delta_{21} + F_2 \cdot \delta_{22} + F_3 \cdot \delta_{23} \\ y_3 &= F_1 \cdot \delta_{31} + F_2 \cdot \delta_{32} + F_3 \cdot \delta_{33} \end{aligned}$$

As Forças  $F_i$  podem surgir a partir dos pesos fixados  $w_i$  ou das forças centrífugas  $m_i \omega^2 y_i$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= (m_1 \omega^2 y_1) \cdot \delta_{11} + (m_2 \omega^2 y_2) \cdot \delta_{12} + (m_3 \omega^2 y_3) \cdot \delta_{13} \\ y_2 &= (m_1 \omega^2 y_1) \cdot \delta_{21} + (m_2 \omega^2 y_2) \cdot \delta_{22} + (m_3 \omega^2 y_3) \cdot \delta_{23} \\ y_3 &= (m_1 \omega^2 y_1) \cdot \delta_{31} + (m_2 \omega^2 y_2) \cdot \delta_{32} + (m_3 \omega^2 y_3) \cdot \delta_{33} \end{aligned}$$

# Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

Pode-se escrever:

$$\begin{array}{r}
 (m_1 \delta_{11} - 1/\omega^2)y_1 + (m_2 \delta_{12})y_2 + (m_3 \delta_{13})y_3 = 0 \\
 (m_2 \delta_{21})y_1 + (m_2 \delta_{22} - 1/\omega^2)y_2 + (m_3 \delta_{23})y_3 = 0 \\
 (m_1 \delta_{31})y_1 + (m_2 \delta_{32})y_2 + (m_3 \delta_{33} - 1/\omega^2)y_3 = 0
 \end{array}$$

Três equações simultâneas em termos de  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ . Para evitar a solução trivial  $y_1=y_2=y_3=0$ , o determinante deve ser zero (problema de autovalor).

$$\begin{vmatrix}
 (m_1 \delta_{11} - 1/\omega^2) & (m_2 \delta_{12}) & (m_3 \delta_{13}) \\
 (m_2 \delta_{21}) & (m_2 \delta_{22} - 1/\omega^2) & (m_3 \delta_{23}) \\
 (m_1 \delta_{31}) & (m_2 \delta_{32}) & (m_3 \delta_{33} - 1/\omega^2)
 \end{vmatrix} = 0$$

# Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

Expandindo o determinante, obtém-se:

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^3 - (m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22} + m_3\delta_{33})^2 \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 + \dots = 0$$

Três raízes:  $\frac{1}{\omega_1^2}, \frac{1}{\omega_2^2}, \frac{1}{\omega_3^2},$

$$\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_3^2}\right) = 0$$

ou:

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^3 - \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2}\right) \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 + \dots = 0$$

# Projeto de Eixos por Velocidades Críticas



Comparando, observa-se que:

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} = m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + m_3 \delta_{33}$$

Se tivéssemos uma única massa  $m_1$  sozinha, a velocidade crítica seria dada por:

$$\frac{1}{\omega^2} = m_1 \delta_{11} = \frac{1}{\omega_{11}^2}$$

Similarmente para  $m_2$  e  $m_3$  sozinhas:

$$\frac{1}{\omega_{22}^2} = m_2 \delta_{22}$$

$$\frac{1}{\omega_{33}^2} = m_3 \delta_{33}$$

e:

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \frac{1}{\omega_{33}^2}$$

# Projeto de Eixos por Velocidades Críticas



Se ordenarmos as velocidades críticas de tal forma que:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$$

então:

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \frac{1}{\omega_{33}^2}$$

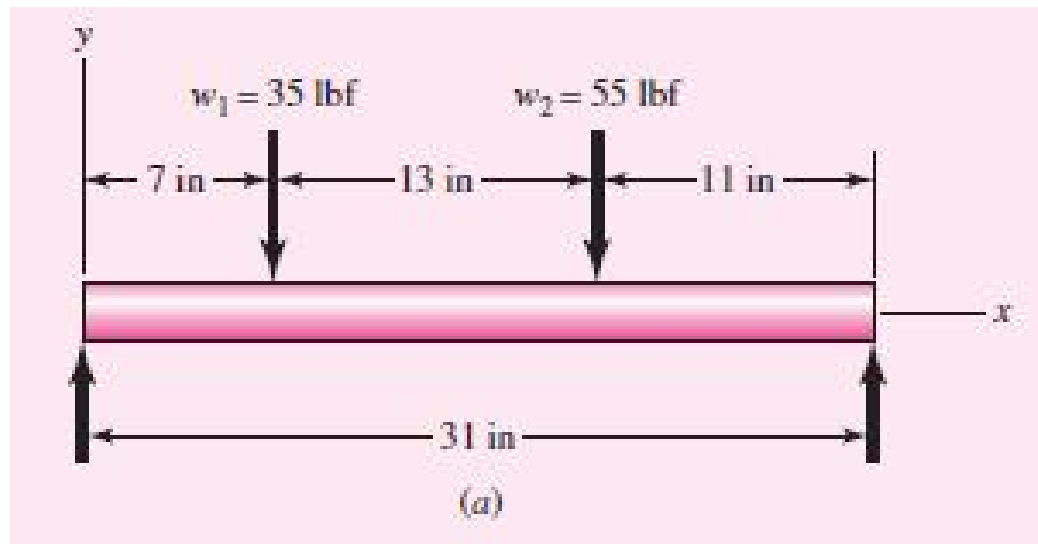
Para um eixo de n-corpos:

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{ii}^2}$$

# Exemplo 18.5

Considere um eixo de aço simplesmente apoiado, com diâmetro de 1 in e um vão de 31 in entre mancais, carregando duas engrenagens que pesam 35 lbf e 55 lbf.

- Encontre os coeficientes de influência;
- Encontre  $\Sigma w y$  e  $\Sigma w y^2$ , bem como a primeira velocidade crítica, utilizando a equação de Rayleigh (18-36).

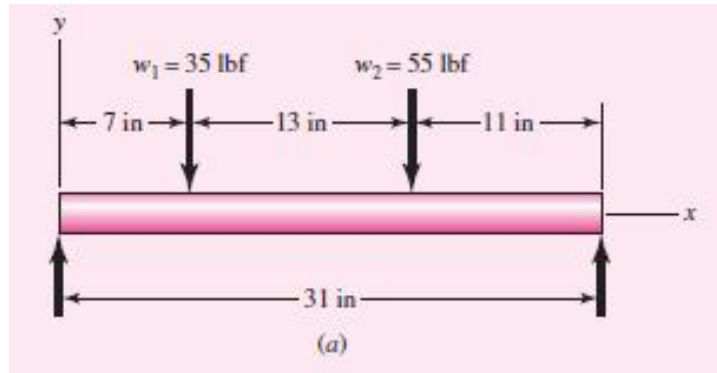


$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (1)^4}{64} = 0,04908 \text{ in}^4$$

$$6EI l = 6(30)10^6(0,04909)31 = 2,739 \cdot 10^8 \text{ lbf in}^3$$



# Exemplo 18.5



$$\delta_{ij} = \begin{cases} \frac{b_j \cdot x_i}{6EIL} (L^2 - b_j^2 - x_i^2) \rightarrow x_i \leq a_i \\ \frac{a_j \cdot (L - x_i)}{6EIL} (2L \cdot x_i - a_j^2 - x_i^2) \rightarrow x_i > a_i \end{cases}$$

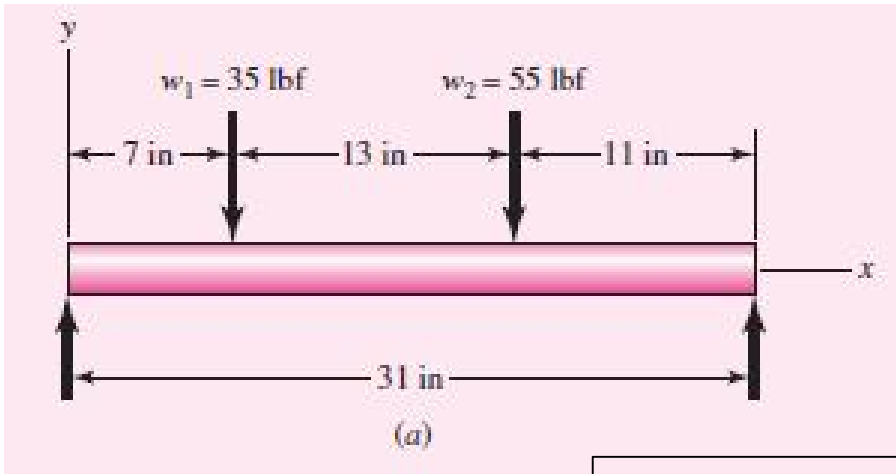
onde:  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$

$$\delta_{11} = \frac{24 \cdot (7)}{2,379 \cdot 10^8} (31^2 - 24^2 - 7^2) = 2,061 \cdot 10^{-4} \text{ in / lbf}$$

$$\delta_{22} = \frac{11 \cdot (20)}{2,379 \cdot 10^8} (31^2 - 11^2 - 20^2) = 3,534 \cdot 10^{-4} \text{ in / lbf}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{11 \cdot (7)}{2,379 \cdot 10^8} (31^2 - 11^2 - 7^2) = 2,224 \cdot 10^{-4} \text{ in / lbf}$$

# Exemplo 18.5



<i>i</i>	1	<i>i</i>	2
1	2.061(10 <sup>-4</sup> )		2.224(10 <sup>-4</sup> )
2	2.224(10 <sup>-4</sup> )		3.534(10 <sup>-4</sup> )

$$y_1 = F_1 \cdot \delta_{11} + F_2 \cdot \delta_{12} = 35(2,061)10^{-4} + 55(2,234)10^{-4} = 0,01950 \text{ in}$$

$$y_2 = F_1 \cdot \delta_{21} + F_2 \cdot \delta_{22} = 35(2,234)10^{-4} + 55(3,534)10^{-4} = 0,02726 \text{ in}$$

$$\sum \omega_i y_i = 35(0,01945234) + 55(0,02722534) = 2,178 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

$$\sum \omega_i y_i^2 = 35(0,01945234)^2 + 55(0,02722534)^2 = 0,05418 \text{ lbf} \cdot \text{in}^2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \cdot \sum \omega_i \cdot y_i}{\sum \omega_i \cdot y_i^2}} \text{ (rad/s)}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{386,1 \cdot (2,178)}{0,05418}} = 124,7 \text{ rad/s} = 1191 \text{ rpm}$$

## Exemplo 18.5

f) Velocidade crítica intrínseca do eixo:

$$\gamma = 0,282 \text{ lbf} / \text{in}^3$$

$$A = \pi(1)^2 / 4 = 0,7854 \text{ in}^2$$

$$E = 30 \cdot 10^6 \text{ psi}$$

$$\omega_s = \left( \frac{\pi}{1} \right)^2 \sqrt{\frac{gEI}{A\gamma}} = \left( \frac{\pi}{31} \right)^2 \sqrt{\frac{(386,1)(30 \cdot 10^6)(0,04909)}{0,7854(0,282)}} = 520,4 \text{ rad/s} = 4970 \text{ rpm}$$

# BIBLIOGRAFIA

- **SHIGLEY, MISCHKE e BUDYNAS – Projeto de Engenharia Mecânica, editora Bookman.**
- **HIBBELER, R.C. – Resistência dos Materiais – Prentice Hall.**