

# Máquinas hidráulicas

Capítulo 1 - Introdução

Capítulo 2 - Grandezas de funcionamento

Capítulo 3 - Perdas, potências e rendimentos

Capítulo 4 - Triângulos de velocidade e representação

Capítulo 5 - Equação fundamental

Capítulo 6 - Análise da equação fundamental

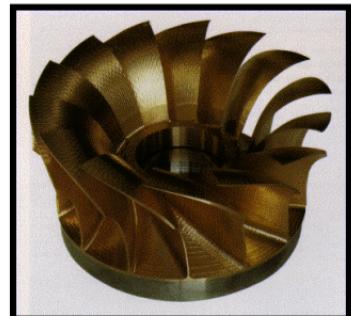
Capítulo 7 - Semelhança e coeficientes para máquinas hidráulicas

Capítulo 8 - Cavitação

Capítulo 9 - Estudo de bombas e ventiladores

Capítulo 10 - Empuxo axial e vedações

Capítulo 11 - Caixa espiral



Prof. Marcos Carvalho Campos

## Bibliografia :

- |     |                      |  |
|-----|----------------------|--|
| [1] | Bran, R. e Souza, Z. | Máquinas de Fluxo                          |
| [2] | Grivchenko, G.I.     | Hydraulic Machines - Turbines and Pumps    |
| [3] | Pfleiderer, C.       | Máquinas de Fluxo                          |
| [4] | Macintyre, A.J.      | Máquinas Motrizes Hidráulicas              |
| [5] | Macintyre, A.J.      | Bombas e Instalações de Bombeamento        |
| [6] | Eck, B.              | Fans                                       |
| [7] | Mataix, C.           | Mecânica de Fluidos e Máquinas Hidráulicas |

## Avaliação :

- |             |                           |
|-------------|---------------------------|
| Primeiro TE | Capítulo 1 ao Capítulo 6  |
| Segundo TE  | Capítulo 7 ao Capítulo 11 |

## **Capítulo 1 - Introdução**

Pode-se dizer que as máquinas de fluido são um dos pilares fundamentais da indústria e das centrais elétricas modernas.

Encontra-se máquinas deste tipo desde em aplicações de geração de energia até eletro-domésticos, passando por siderúrgicas, indústrias de papel e celulose, mineração, petro-química e outros inúmeros processos.

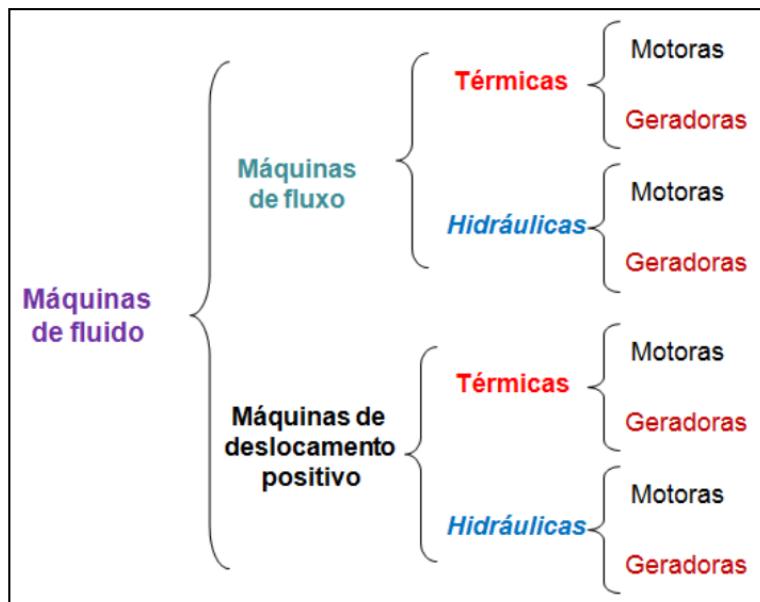
Quase sempre estas máquinas estão associadas a motores ou geradores elétricos de diversos tipos e características.

Devido a esta importância, sempre se busca uma melhor associação destes elementos, visando:

- Maior desempenho do conjunto;
- Menor consumo de energia ou maior geração de energia;
- Menores custos de operação e manutenção;
- e outros objetivos mais específicos.

## 1.1) Classificação das máquinas de fluidos

As máquinas de fluido, podem ser classificadas em dois tipos básicos: máquinas de fluxo e de deslocamento positivo.



Máquinas de fluxo: São assim designadas pois o fluido de trabalho passa de maneira contínua pelo elemento principal da máquina, o rotor.

Máquina de deslocamento positivo: São assim chamados porque o fluido realiza trabalho (ou consome trabalho) somente em uma fase do deslocamento do elemento principal (pistão, palheta etc.).

Máquina Térmica: É a máquina que trabalha com fluido considerado compressível, ex., gás ou vapor d'água.

Máquina Hidráulica: É a máquina que trabalha com fluido considerado incompressível dentro da faixa normal de pressão, ex., água ou óleos.

Máquina Motora: É assim designada a máquina que retira trabalho mecânico (torque x rotação) da energia contida no fluido.

Máquina Geradora: É assim designada a máquina que fornece energia para o escoamento do fluido.

## Exemplos:

Máquinas de Fluxo Hidráulicas:

Fluido -> Água e outros líquidos:

Máquina Motora:

Turbinas hidráulicas.

Máquina Geradora:

Bombas hidráulicas.

Fluido -> Ar e outros gases:

Máquina Motora:

Turbinas eólicas.

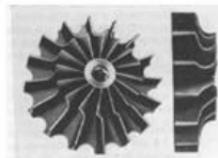
Máquina Geradora:

Ventiladores e exaustores

Máquinas de Fluxo Térmicas:

Motora: Turbina a vapor.

Geradora: Turbo-compressor.



Exemplos:

**Máquinas de Deslocamento Positivo Hidráulicas:**

Motora (poucas aplicações): Turbina de palhetas

Geradora: Bombas de engrenagens



**Máquinas de Deslocamento Positivo Térmicas:**

Motora: Motor de combustão interna.

Geradora: Compressores de ar.

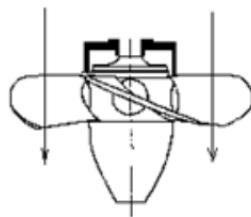
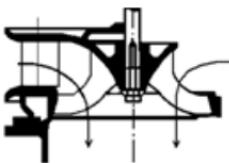
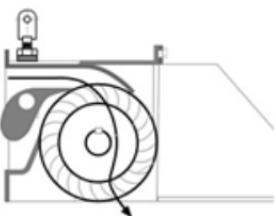
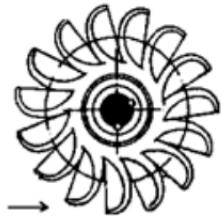


## 1.2) Classificação das máquinas hidráulicas quanto ao escoamento

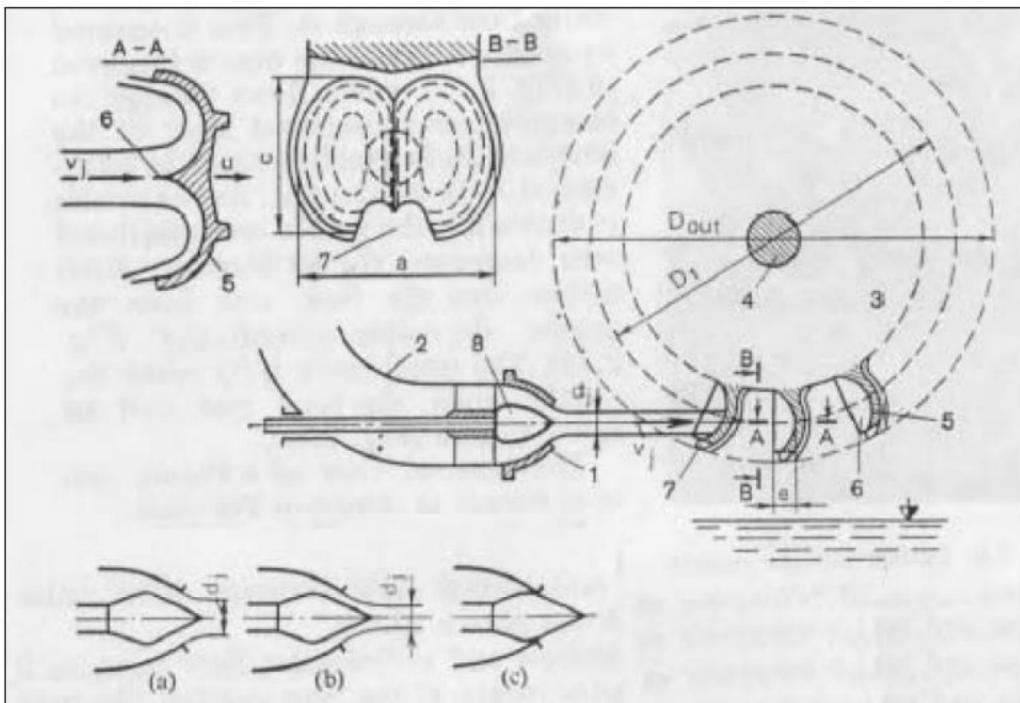
		Máquinas de fluxo hidráulicas			
Tipo	Tangenciais	Radiais	Diagonais	Axiais	
Motora	turbinas Pelton (ação)	turbinas Mitchel-Banki (ação) turbinas Francis lenta (reação)	turbinas Francis rápida (reação)	turbinas Hélice, Kaplan e Bulbo (reação)	
Geradora		bombas e ventiladores radiais (reação)	bombas e ventiladores diagonais (reação)	bombas e ventiladores axiais (reação)	

Figura 1.1 - Tipos de máquinas hidráulicas

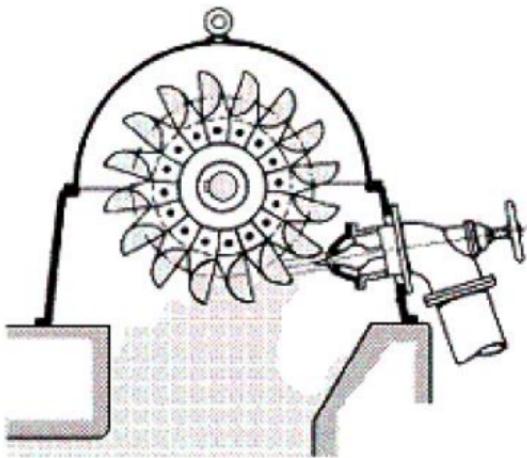
Tangenciaais	Radiais	Diagonais	Axiais
turbinas Pelton (ação)	turbinas Mitchel-Banki (ação)	turbinas Francis (reação)	turbinas Hélice (tubular), Kaplan e Bulbo (reação)



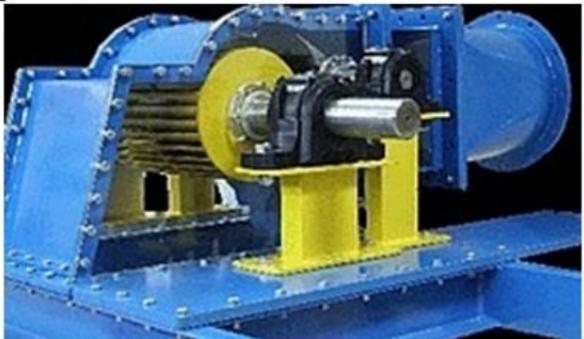
## Turbinas Pelton



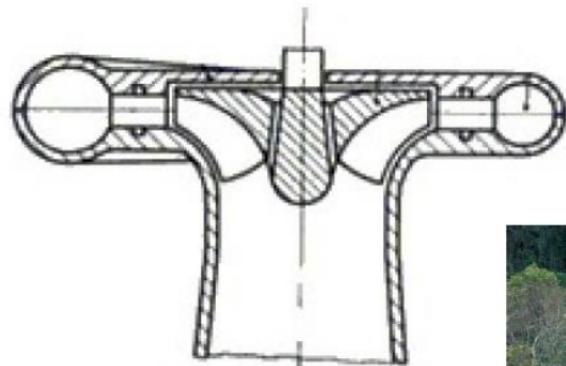
## Turbinas Pelton



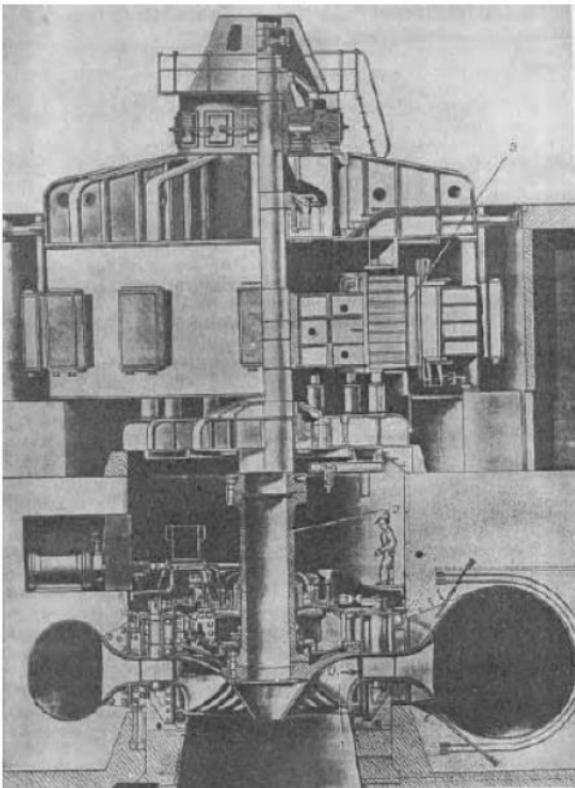
## Turbinas Mitchel-Banki



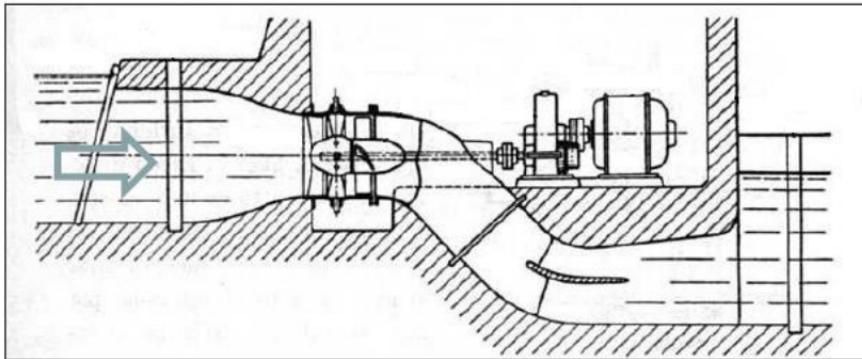
## Turbinas Francis



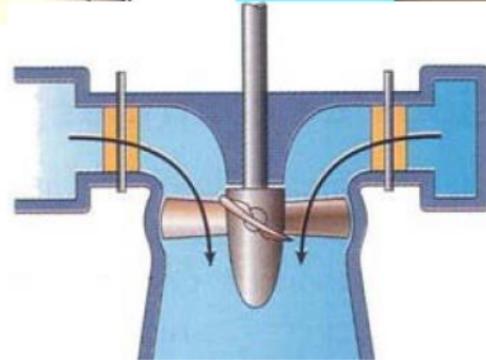
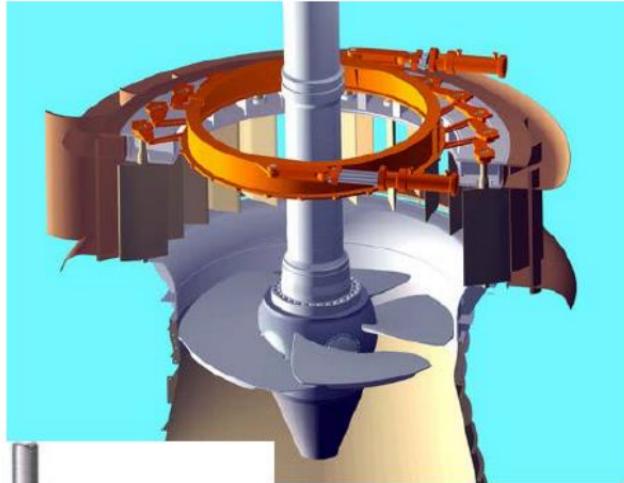
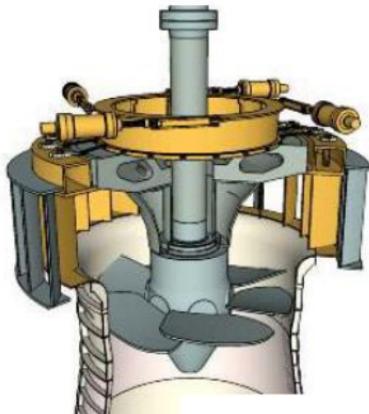
## Turbinas Francis



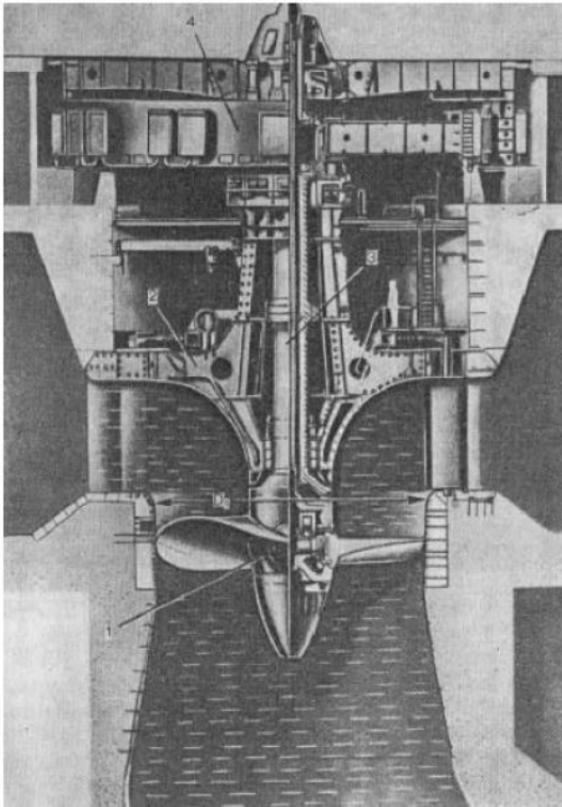
## Turbinas Hélice (turbina tubular)

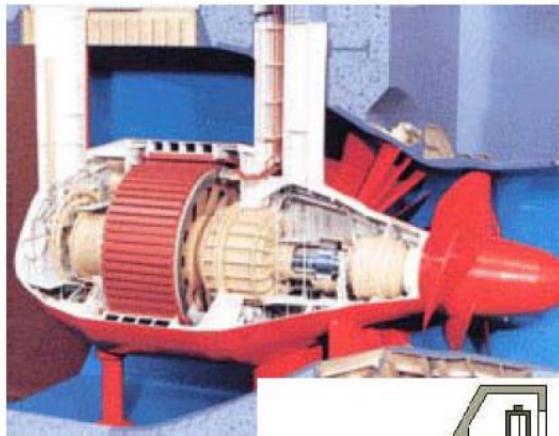


## Turbinas Kaplan

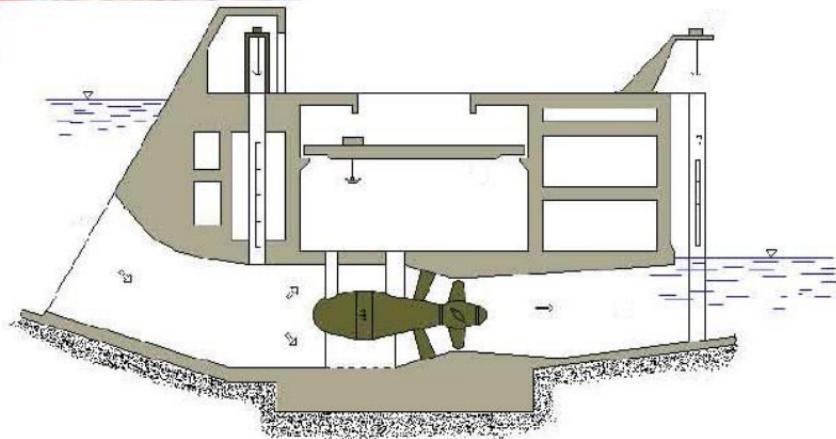


## Turbinas Kaplan

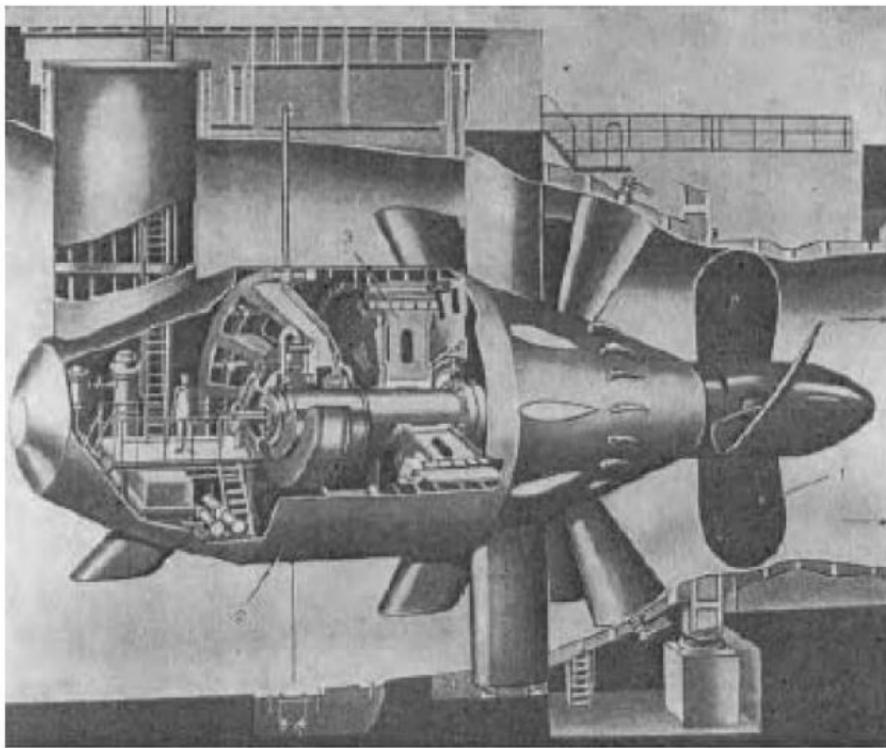




Turbinas Bulbo



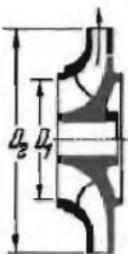
## Turbinas Bulbo



bombas radiais  
(reação)



bombas diagonais  
(reação)



bombas axiais  
(reação)

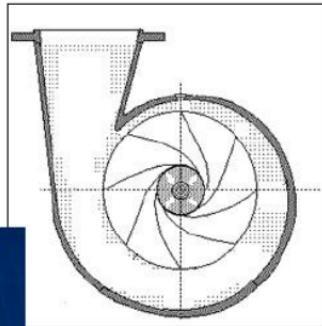


I

II

III

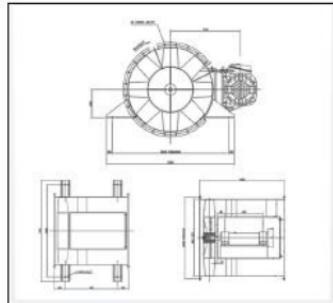
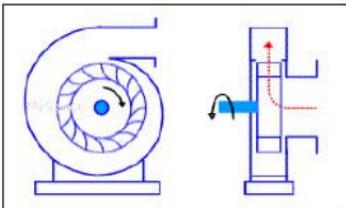
IV



ventiladores radiais  
(reação)

Ventiladores diagonais  
(reação)

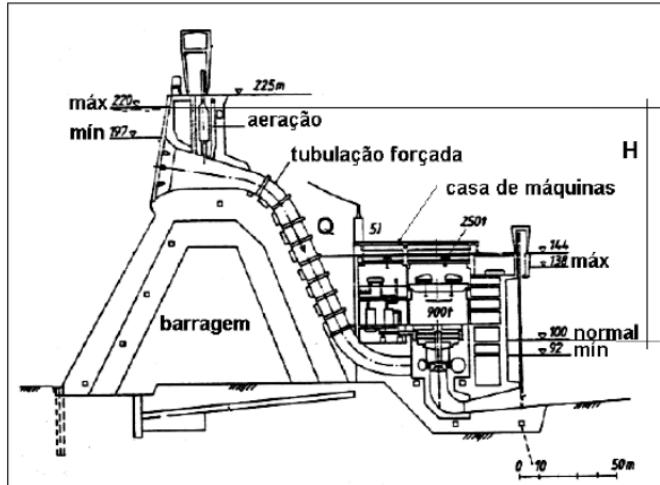
Ventiladores axiais  
(reação)



### 1.3 - Exemplos de máquinas hidráulicas

N	Local	Nº de turbinas	Pmáx total [kW]	Pun nom [kW]	Hnom [m]	Qun nom [m³/s]	n [RPM]	Tipo	Fabric.
1	Paulo Afonso III R. S. Francisco - BR	4	884.000	220.000	83,5	283	138,5	Francis Extra-Rápida - 15 pás	Vöith
2	Estreito Rio Grande - BR	6	1.152.000	182.000	60,8	320	112,5	Francis Extra-Rápida - 15 pás	Vöith
3	Rio Sungari			86.000	69	147	125	Francis Rápida 17 pás	Vöith 1939
4	Saucelle Rio Douro-Port/Esp	4		63.500	62	117	150	Francis Rápida 15 pás	Vöith
5	Ixtapantongo Rio Tilostoc - Méx.	1 2		55.800 -	311 -	20,35 -	500 -	Francis Lenta —	Vöith
6	Usina Suiça ES - BR	2		16.760	240	8	750	Francis Lenta	Vöith
7	Usina Graminha Rio Pardo - SP - BR	2		41.900	105	49	257	Francis Normal	Vöith
8	Macagua I Rio Caroni - Venez.	6	441.000	65.000	40	190	116	Francis Extra-Rápida - 15 pás	Vöith

## Usina hidrelétrica de Itaipú

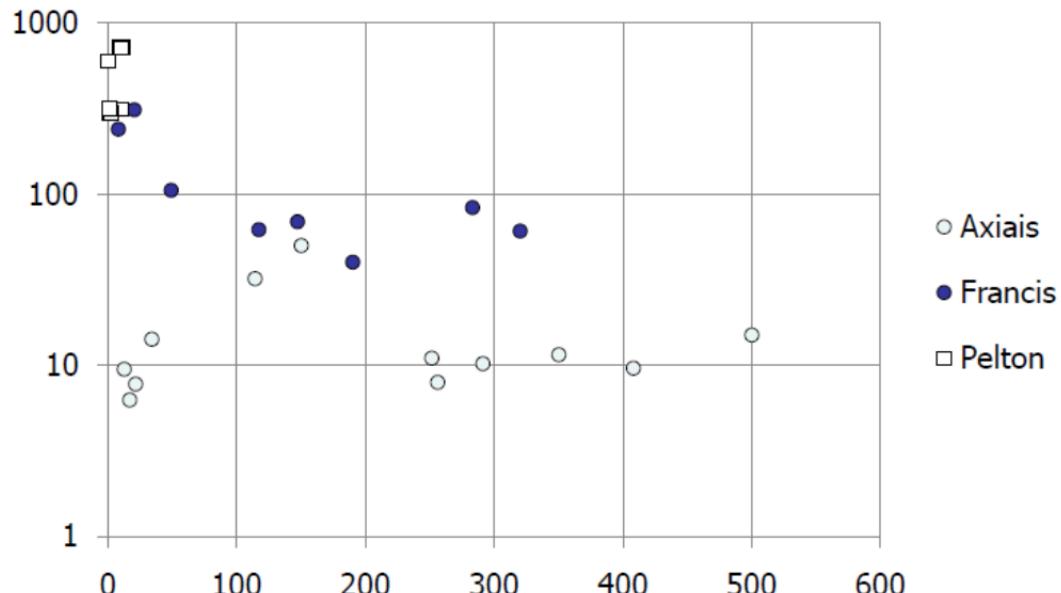


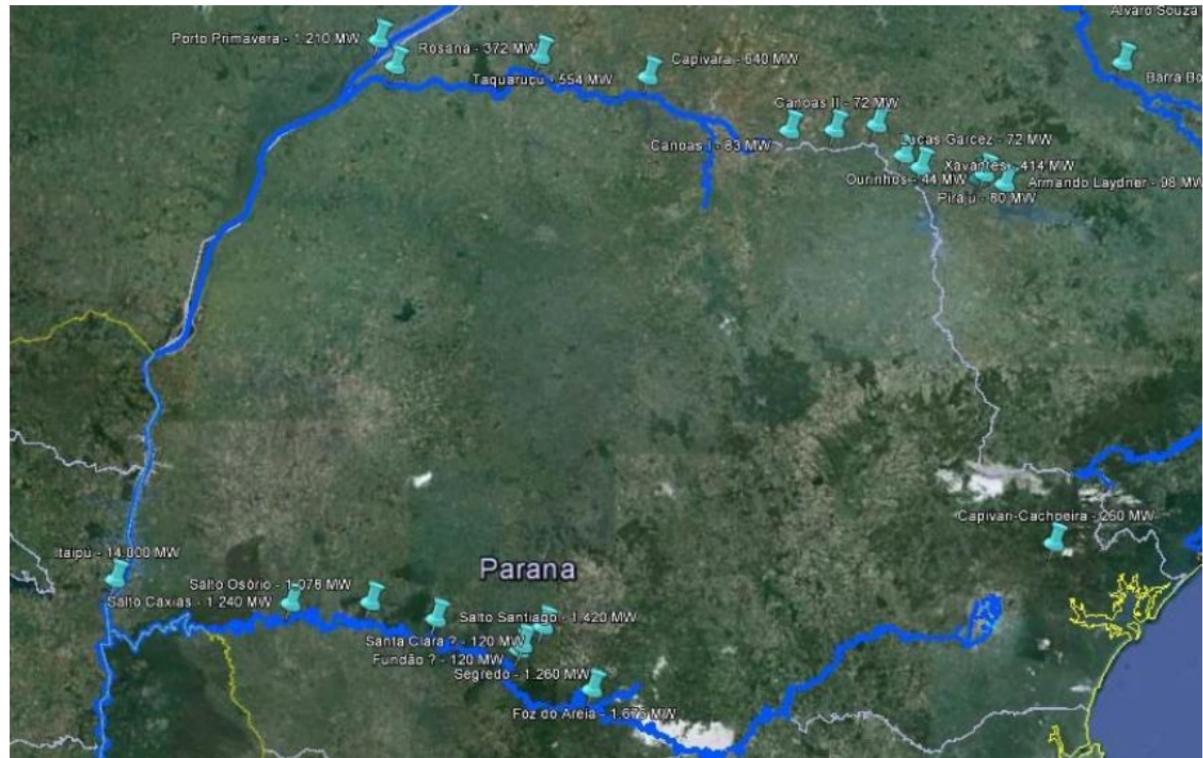
Tipo: Francis Rápida;  
Nº de Turbinas: 18 + 2 de reserva = 20;  
Potência Unitária Máxima: 740.000 [kW];  
Altura de Queda Nominal: 118,40 [m];  
Vazão máxima: 710 [ $m^3/s$ ];  
Rotação nominal: 91,6 [RPM];  
Fabricante: MEP - Mecânica Pesada -  
Taubaté - SP - Brasil

N	Local	Nº de turbinas	P <sub>máx total</sub> [kW]	P <sub>un nom</sub> [kW]	H <sub>nom</sub> [m]	Q <sub>un nom</sub> [m <sup>3</sup> /s]	n [RPM]	Tipo	Fabric.
1	Três Marias R. S. Francisco - BR	6	450.000	67.000	50	150	163,6	Kaplan - 8 pás Dupla Regulagem	Vöith 1958-67
2	Simbach-Branau Rio Inn - RFA/Aust.	4	102.300	24.000	11	251,5	83,4	Kaplan - 5 pás Dupla Regulagem	Vöith
3	Wallsee Rio Donau - Áustria			34.500	9,6	408	65	Kaplan - 4 pás Dupla Regulagem	Vöith
4	Säckingen Rio Rhein - RFA			18.600	7,95	256	60	Kaplan Dupla Regulagem	Vöith
5	Bad Wörishofen Rio Wertach	2		1.020	9,45	12,5	300	Kaplan - 5 pás Dupla Regulagem	Vöith
6	Ering (Run of River) Rio Inn	3* 1		25.300 1340	10,18 7,75	291 21,35	68,2 214	*Kaplan -5 pás Dupla Regulagem	Vöith
7	Ryborg - Schwoerstadt Alto Reno			29.400	11,5	350	75	Kaplan	Vöith 1929
8	Rincon del Bonete Rio Negro - Uruguai			33.525	32	114	136	Kaplan	Vöith
9	Aschach Rio Danúbio - Áust.			67.800	15	500	68,2	Kaplan - 5 pás Dupla Regulagem	Vöith 1964
10	Siebenbunn Áustria			819,5	6,26	16,7	250	Kaplan Dupla Regulagem	Vöith 1922
11	Salto Grande Iguazu - PR - BR	4		4.200	14,2	34	257	Kaplan Dupla Regulagem	Vöith

N	Local	Nº de turbinas	P <sub>máx total</sub> [kW]	P <sub>un nom</sub> [kW]	H <sub>nom</sub> [m]	Q <sub>un nom</sub> [m <sup>3</sup> /s]	n [RPM]	Tipo	Fabric.
1	Cubatão São Paulo - BR	3 3 3	336.000	45.517 67877 67877	719,5 719,5 719,5	9 12 12	360	Lenta/Normal Normal Normal	Charmilles Vöith Allis Chalmers
2	Parigot de Souza Rio Capivari - PR.	4	246.900	61725	714,3	10	514	Rápida	Charmilles
3	Canastrá Rio Santa Cruz - BR	2		24348	314,6	10,8	450	Extra-Rápida	Vevey
4	Poço Fundo Rio Machado - BR	2 1		2207 5590	300 300	1,0 2,2	720 600	Normal Rápida	Morgan Smith
5	Macabu Rio Macabu - BR	3 2		3295 3295	317 317	1,3 1,3	722 722	Rápida Rápida	Hitachi Charmilles
6	São Bernardo R. S. Bernardo - BR	3		1471	600	0,3	1200	Lenta/Normal	Escher Wyss

Característica  $H$  (mCA) x  $Q$  ( $m^3/s$ ) para turbinas





# **Capítulo 2 - Grandezas de funcionamento**

## **2.1) Introdução**

É de fundamental importância para o dimensionamento e estudo do comportamento das máquinas hidráulicas o conhecimento das grandezas que influenciam no seu funcionamento. Estas máquinas tem seu funcionamento definido através de três grandezas básicas distintas, consideradas como características fundamentais das máquinas hidráulicas:

**Q - Vazão** - [m<sup>3</sup>/s]

representa o fluxo de material líquido ou gasoso através da máquina.

**H - Altura de queda (turbinas)** - [mCA]

**H - Altura de elevação (bombas)** - [mCA]

**$\Delta p_{tot}$  - Diferença de pressão total (ventiladores)** - [N/m<sup>2</sup>]

representa a variação de energia específica do fluido através da máquina.

n - Rotação da máquina - [RPM]

representa a característica cinemática da máquina.

As duas primeiras grandezas tem sua conceituação definida a partir dos princípios da mecânica dos fluidos e a última é decorrente dos princípios da física (cinemática dos corpos rígidos) aplicada a máquinas hidráulicas.

Além das grandezas fundamentais são importantes as grandezas derivadas, como a potência hidráulica, potência mecânica (aqui denominada potência de eixo), torque, o rendimento total e outras como veremos neste capítulo.

## 2.2) Vazão

A mecânica dos fluidos define vazão como o volume de fluido que passa através de uma seção qualquer na unidade de tempo, e vazão em massa a quantidade de massa (kg) que passa na seção na unidade de tempo. Esta é determinada com base no princípio da conservação da massa:

$$\dot{m} = \int_{sc} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

Esta equação é simplificada se considerarmos uma velocidade média  $V$  uniforme e perpendicular a seção de área  $A$ , e escoamento incompressível (massa específica constante):

$$\dot{m} = \rho V A$$

A vazão em volume é a vazão em massa dividido pela massa específica.

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho} = VA$$

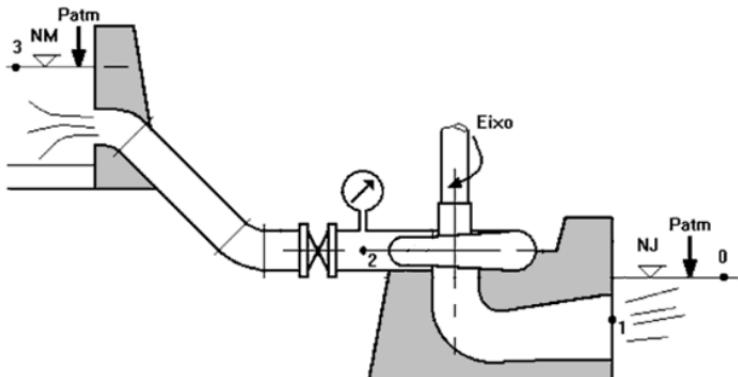
Esta equação é utilizada para se calcular a velocidade normal à seção de escoamento quando conhecemos a vazão (em volume) e a área, ou a vazão em função da velocidade média e da área perpendicular a esta velocidade.

## 2.3) Variação de energia específica

### 2.3.1) Altura de Queda (turbinas)

A conceituação da altura de queda de um aproveitamento hidroelétrico (fig 2.1), composto de uma turbina de reação e demais equipamentos complementares, é feita através do balanço de energia entre as seções de entrada e saída da máquina.

É importante notar que a seção de saída, ponto 1, foi considerada depois do tubo de sucção, fazendo com que este seja considerado parte integrante da máquina, uma vez que este elemento participa da transformação de energia.



A altura de queda é definida como a diferença de alturas, entre as seções de entrada 2 da máquina e de saída 1, convenientemente escolhidas. Aplicando a equação de Bernoulli para ambas as seções 1 e 2, e adotando como referência para as alturas de posições o nível de jusante, então obtém-se:

Para a seção 2 : 
$$H_2 = (p_2/\gamma + p_{atm}/\gamma) \pm a_2 + V_2^2/2g + Z_2$$

Para a seção 1 : 
$$H_1 = p_1/\gamma + V_1^2/2g + Z_1$$

onde:

$H_2, H_1$  - Altura (nível energético) na entrada e na saída da máquina .

$p_2/\gamma$  - Altura de pressão obtida no manômetro, na seção 2 (Relativa).

$p_1/\gamma$  - Altura de pressão na seção 1 (Absoluta).

$p_{atm}/\gamma$  - Altura de pressão equivalente a pressão atmosférica (Absoluta).

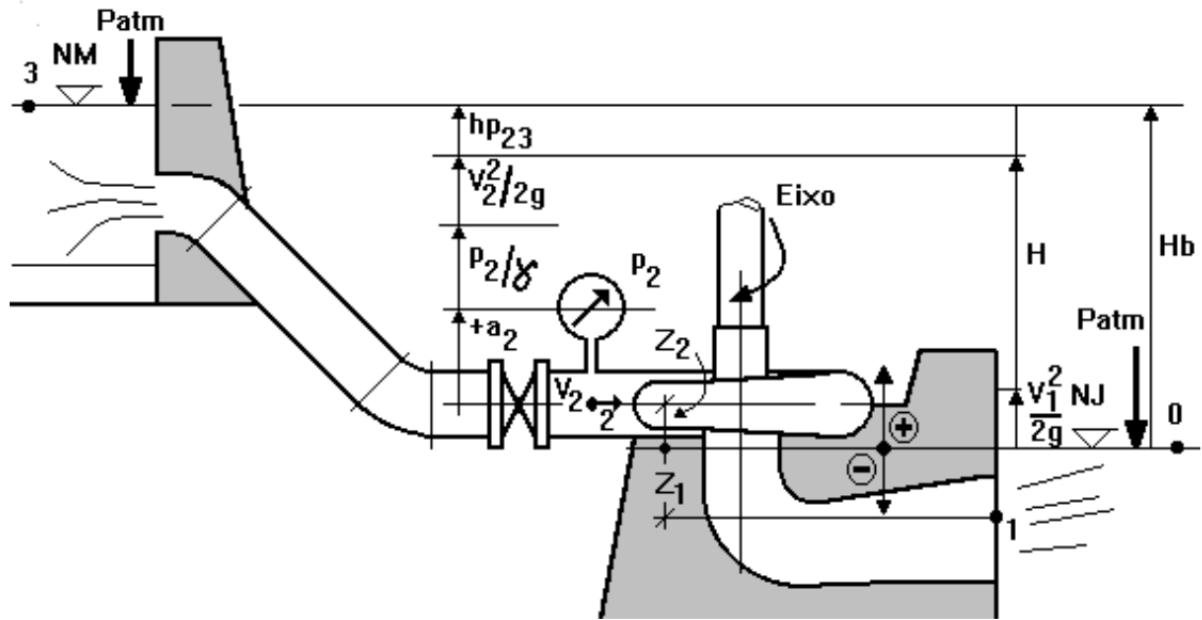


Fig 2.1 - Aproveitamento hidroelétrico com turbina de reação.

$V_2^2/2g$  - Altura equivalente a energia cinética na seção 2.

$V_1^2/2g$  - Altura equivalente a energia cinética na seção 1.

$\pm a_2$  - Correção da leitura do manômetro, relativa a altura da referência do instrumento ao centro da seção 2. O sinal da correção depende da posição do manômetro.

$Z_2, Z_1$  - Altura de posição das seções 2 e 1 relativas ao nível de referência.

A diferença  $H_2 - H_1$  é a altura de queda  $H$  para turbinas de reação (considerando o tubo de sucção como parte da turbina):

$$H = H_2 - H_1 = (p_2/\gamma + p_{atm}/\gamma) \pm a_2 + Z_2 + (V_2^2 - V_1^2)/2g - (p_1/\gamma + Z_1)$$

Como na seção 1 a pressão absoluta atuante é a pressão atmosférica mais a coluna de água (em termos absolutos)  $Z_1$  ao desprezarmos as perdas no escoamento da seção 1 até o nível de jusante - ponto 0, podemos então escrever de acordo com as convenções adotadas:

$$p_1/\gamma + Z_1 = p_{atm}/\gamma \quad (Z_1 < 0)$$

Logo, H pode ser reescrito como sendo:

$$H = p_2/\gamma \pm a_2 + (V_2^2 - V_1^2)/2g + Z_2$$

Essa maneira usada para determinar H é chamada de processo manométrico, o qual permite a obtenção da altura de queda de instalações em funcionamento. Conforme a instalação pode desprezar alguns termos desta equação.

De outra maneira, quando é necessário o conhecimento de H a partir da altura bruta, H<sub>b</sub>, o processo de determinação de H é chamado de processo analítico. Na fig 2.1 representamos graficamente a altura de queda, H, bem como todas as parcelas. Podemos então escrever:

$$H = H_b - h_{23} - V_1^2/2g$$

onde:

H<sub>b</sub> - Altura bruta ou desnível entre montante e jusante.

h<sub>23</sub> - Perda de carga total do nível de montante até a seção 2.

V<sub>1</sub><sup>2</sup>/2g - Altura equivalente a energia cinética na seção 1.

Da mesma maneira que obtivemos a altura de queda para máquina de reação, vamos determinar H para uma usina de alta queda equipada com turbina de ação (fig. 2.2).

Aplicando a equação de Bernoulli nas seções de entrada 2 e de saída 1, obtemos as alturas correspondentes:

$$\text{Para a seção 2 : } H_2 = p_2/\gamma + p_{\text{atm}}/\gamma \pm a_2 + V_2^2/2g + Z_2$$

$$\text{Para a seção 1 : } H_1 = p_1/\gamma + V_1^2/2g + Z_1$$

Neste caso a seção de saída 1 é considerada no ponto em que o jato (bipartido) - após transferir energia para o rotor - é desviado e por gravidade chega ao canal de fuga.

A diferença entre as energias nas seções 2 e 1 fornece a altura de queda:

$$H = H_2 - H_1 = (p_2 + p_{\text{atm}})/\gamma \pm a_2 + (V_2^2 - V_1^2)/2g + Z_2 - (p_1/\gamma + Z_1)$$

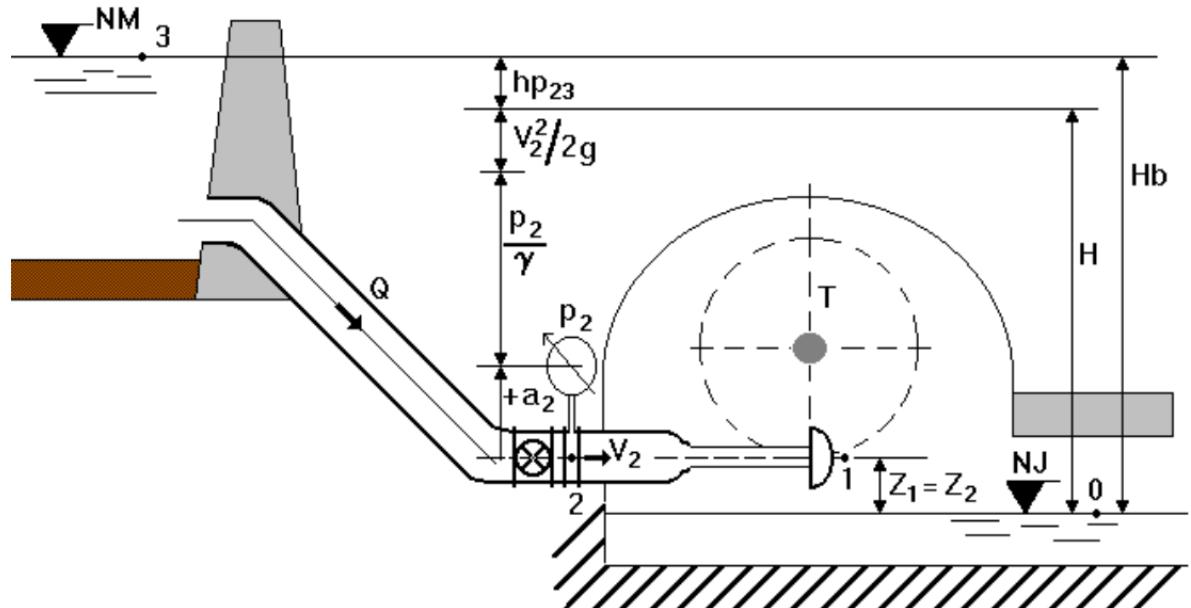


Fig 2.2 - Aproveitamento hidroelétrico com turbina de ação.

Analisando a equação para  $H$  e a fig.2.2, podemos dizer que:

$p_1/\gamma = p_{\text{atm}}/\gamma$  (o jato está em contato direto com a atmosfera).

$V_1^2/2g = 0$  (altura de velocidade desprezível relativamente a altura de pressão na entrada da turbina)

$Z_2 = Z_1$  (duas seções no mesmo plano).

Desta forma resulta a altura de queda:

$$H = p_2/\gamma \pm a_2 + V_2^2/2g$$

### 2.3.2) Altura de elevação (bombas)

Para estabelecer o conceito de altura de elevação, consideramos a instalação de bombeamento da fig. 2.3 . Nestas instalações a seção de saída 2 está localizada no flange de saída e a seção de entrada 1 no flange de entrada. Os reservatórios de montante e jusante podem estar pressurizados, sob vácuo ou abertos a atmosfera. Atuam nas superfícies do líquido nestes reservatórios as pressões absolutas  $p_M$  e  $p_J$  para os reservatórios de montante e jusante, respectivamente.

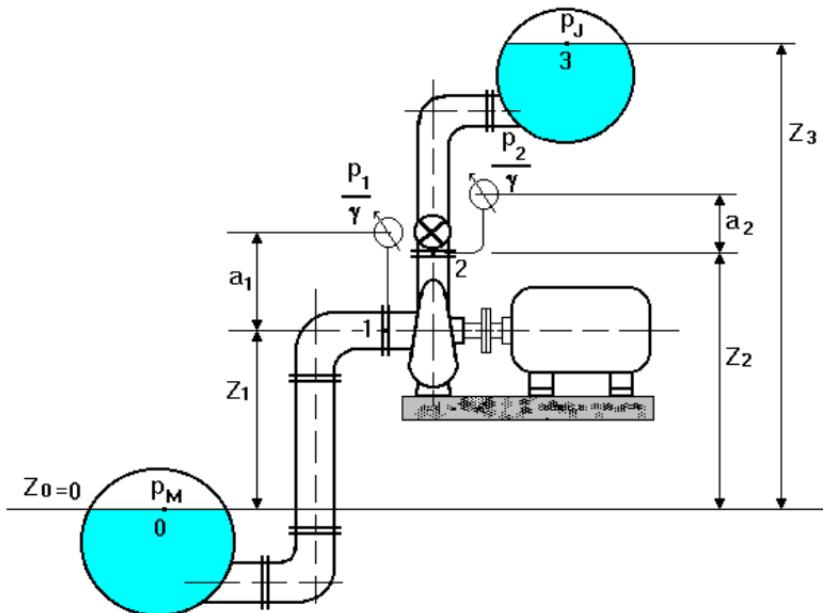


Fig 2.3 - Instalação com bomba hidráulica.

Aplicando a equação de Bernoulli obtemos:

$$H_3 = p_J/\gamma + V_3^2/2g + Z_3$$

$$H_2 = p_2/\gamma \pm a_2 + V_2^2/2g + Z_2$$

$$H_1 = p_1/\gamma \pm a_1 + V_1^2/2g + Z_1$$

$$H_0 = p_M/\gamma + V_0^2/2g + Z_0$$

A diferença  $H_2 - H_1$  é a altura de elevação para a bomba da instalação:

$$H_2 - H_1 = H = (p_2 - p_1)/\gamma + (V_2^2 - V_1^2)/2g + (Z_2 - Z_1) + (\pm a_2 \pm a_1)$$

Este também é chamado método manométrico, que permite a obtenção da altura de elevação de instalações em funcionamento. Também conforme a instalação pode-se desprezar alguns termos desta equação.

Pelo exposto, vimos que essas grandezas são determinadas através da medição na instalação em operação. Nos casos de especificação de bombas ou projeto de instalações a altura de elevação é obtida da altura estática ou bruta mais as perdas de carga nas tubulações de sucção e recalque. Este é o método analítico para determinação da altura de elevação:

$$H = H_{\text{est}} + h_{\text{ps}} + h_{\text{pr}}$$

$$H_{\text{est}} = H_3 - H_0 \quad \text{- Altura bruta de elevação}$$

$$h_{\text{ps}} \quad \text{- Perda de carga na sucção}$$

$$h_{\text{pr}} \quad \text{- Perda de carga no recalque}$$

A altura bruta de elevação será dependente da pressão existente nos reservatórios ,  $p_M$  e  $p_J$  . Se estes reservatório estiverem abertos a atmosfera (o que normalmente acontece) teremos  $p_M=p_J=p_a$ . Desprezando as velocidades  $V_3$  e  $V_0$  , teremos:

$$H_{\text{est}} = Z_3 - Z_0$$

logo:

$$H = Z_3 - Z_0 + h_{\text{ps}} + h_{\text{pr}}$$

### 2.3.3) Diferença de pressão (ventiladores)

O conceito de diferença de pressão é o equivalente a altura de elevação para ventiladores. Normalmente usa-se a equação de Bernoulli de outra forma.

Considerando o esquema de instalação com ventiladores da fig.2.4, onde as câmaras podem representar salas, câmaras frigoríficas, ou a própria atmosfera, apresentando uma determinada pressão absoluta. Então, aplicamos a equação de Bernoulli para as várias seções:

$$\begin{aligned}\gamma_0 H_0 &= p_0 + \frac{\rho_0 V_0^2}{2} + \gamma_0 Z_0 & , & \quad \gamma_1 H_1 = p_1 + \frac{\rho_1 V_1^2}{2} + \gamma_1 Z_1 \\ \gamma_2 H_2 &= p_2 + \frac{\rho_2 V_2^2}{2} + \gamma_2 Z_2 & , & \quad \gamma_3 H_3 = p_3 + \frac{\rho_3 V_3^2}{2} + \gamma_3 Z_3\end{aligned}$$

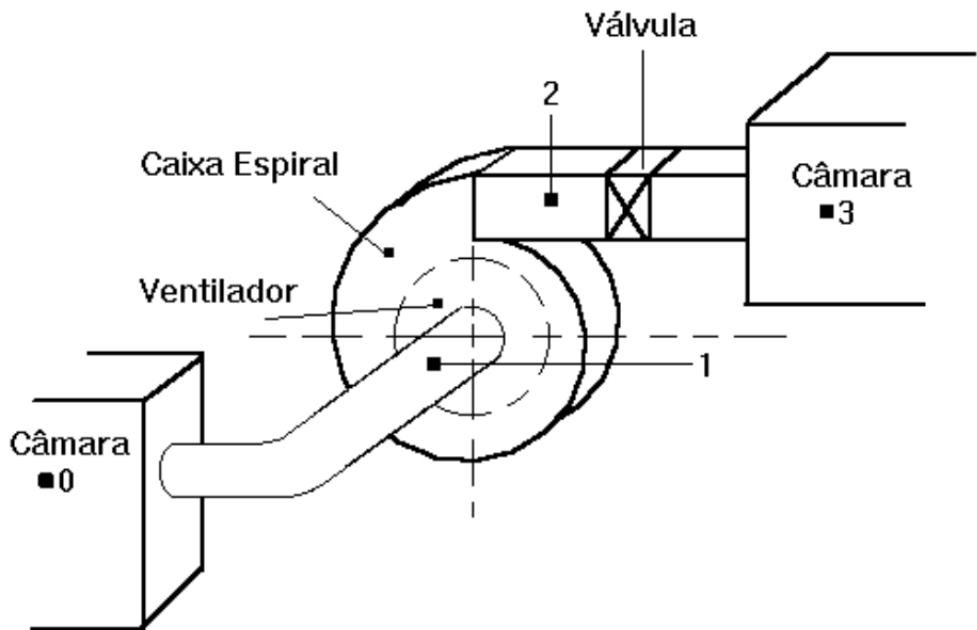


Fig.2.4 - Instalação com ventilador

A diferença de pressão total,  $\Delta p_{tot}$ , do ventilador pode ser determinada pelo método manométrico, e corresponde a diferença  $\gamma_2 H_2 - \gamma_1 H_1$ . Se desprezarmos a pressão devida as alturas  $\gamma Z$ , nas seções 2 e 1, simplificamos  $\Delta p_{tot}$  para:

$$\Delta p_{tot} = (p_2 - p_1) + \frac{\rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2}{2}$$

É importante observar que devido a compressibilidade dos fluidos com os quais os ventiladores trabalham, a massa específica pode variar de uma seção para outra. Os fatores que influenciam nesta variação são: a temperatura e a velocidade.

Com os devidos cuidados, pode-se considerar que o ar é incompressível para velocidades de no máximo 100 [m/s].

## 2.4) Rotação

Para máquinas motoras (turbinas), estas são correntemente acopladas a alternadores (geradores de CA) que devem trabalhar com rotações síncronas constantes. Essa rotação síncrona depende do número de pares de pólos do gerador e da frequência da rede elétrica a qual esta ligada a máquina.

$$n = \frac{f \cdot 60}{p}$$

onde:

f=frequência da rede (Brasil - 60 Hz);

p=pares de pólos;

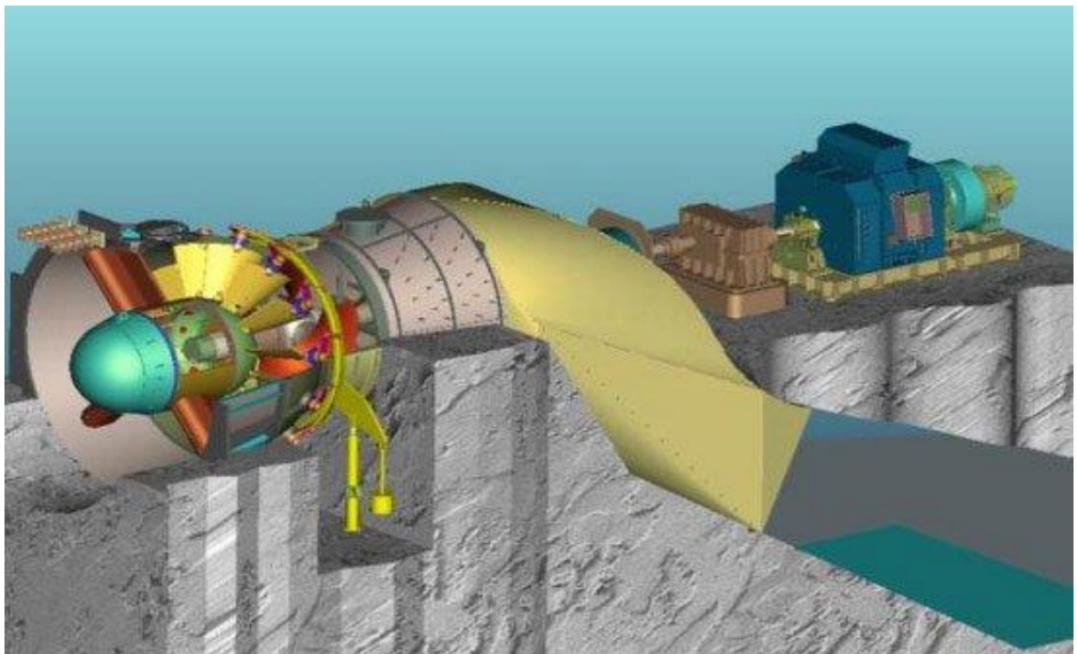
n=rotação síncrona.

Para pequenas máquinas motoras (turbinas instaladas em pequenas centrais hidrelétricas), trabalha-se normalmente com 1800 ou 1200 [RPM] utilizando alternadores de 2 ou 3 pares de pólos, que são mais baratos.



**Conjunto Gerador / Turbina Francis**

Neste caso, para adequar a rotação da turbina ao gerador, utiliza-se sistemas de transmissão com correia ou, com maior eficiência, através de engrenagens.



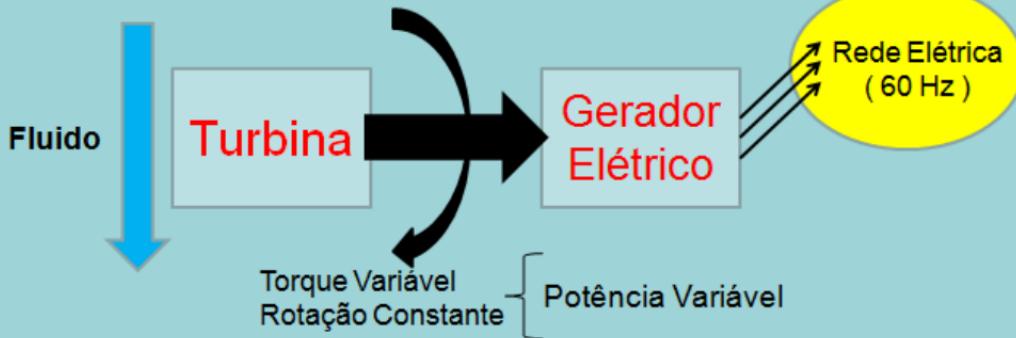
Para máquinas geradoras (bombas e ventiladores) a rotação é fornecida pelo motor de acionamento, o qual se for elétrico de CA, opera com rotações praticamente constantes.

A rotação síncrona do motor dependerá do número de pares de pólos (normalmente 3600 ou 1800 [RPM]), dada pela mesma equação anterior mostrada para geradores.

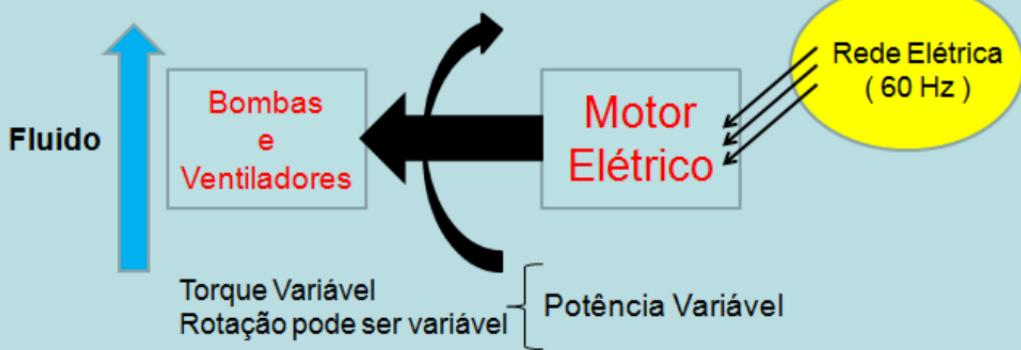
Com o objetivo de se ter uma rotação na máquina diferente da rotação do motor, utiliza-se transmissão por correias (arranjo comum em ventiladores), por engrenagens ou outro tipo de redutor ou amplificador de rotação.



## Máquinas motoras (turbinas)



## Máquinas Geradoras (bombas e ventiladores)



## **2.5) Potências e rendimento**

A potência é efetivamente a grandeza mais importante em termos de custos envolvidos em uma instalação. Esta grandeza define a quantidade de energia por unidade de tempo gerada por máquinas motoras (turbinas) ou consumida por máquinas geradoras (bombas e ventiladores).

### **2.5.1) Potência hidráulica**

Aplicando a lei da conservação da energia, definimos a potência hidráulica como sendo o produto do peso de fluido que passa através da máquina, por unidade de tempo, pela altura de queda ou elevação. Este conceito é utilizado para bombas e turbinas hidráulicas da seguinte forma:

$$P_h = \gamma Q H = \rho g Q H \quad [\text{N.m/s}] \text{ ou } [\text{W}]$$

Então, potência hidráulica é a potência (energia hidráulica por unidade de tempo) entregue a turbina, ou a energia hidráulica por unidade de tempo entregue ao fluxo pela bomba hidráulica.

Para ventiladores, a potência hidráulica é definida da mesma maneira, e é expressa como sendo o produto da vazão pela diferença de pressão total:

$$P_h = Q \Delta p_t$$

#### 2.5.2) Potência de eixo e rendimento total

A potência de eixo,  $P_e$ , é definida como sendo a potência entregue pela turbina ao gerador ou a potência consumida pela bomba ou ventilador entregue pelo motor. A potência de eixo relaciona-se com a potência hidráulica através do rendimento total da instalação (menor que 1).

Para instalações com máquinas geradoras (**bombas e ventiladores**):

$$\eta_t = \frac{P_h}{P_e}$$

Para instalações com máquinas motoras (**turbinas**):

$$\eta_t = \frac{P_e}{P_h}$$

## 2.6) Abertura do distribuidor (Sistema diretor)

As turbinas hidráulicas normalmente trabalham com reguladores de velocidade, cujo objetivo é manter a rotação constante. Estes reguladores atuam no chamado distribuidor, regulando a vazão que passa pelo rotor.

Portanto, a abertura do distribuidor (ou posição do sistema diretor) é também uma grandeza de funcionamento.

Normalmente tem como nomenclatura a letra grega  $\alpha$ .

Outra grandeza de funcionamento é a posição das pás em turbinas Kaplan de pás móveis, denotada por  $\beta$ .

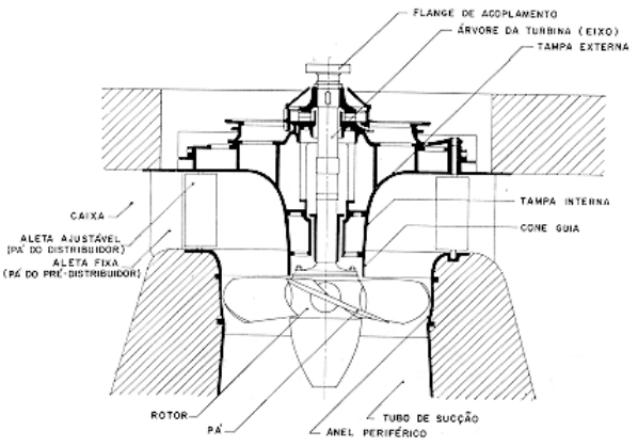
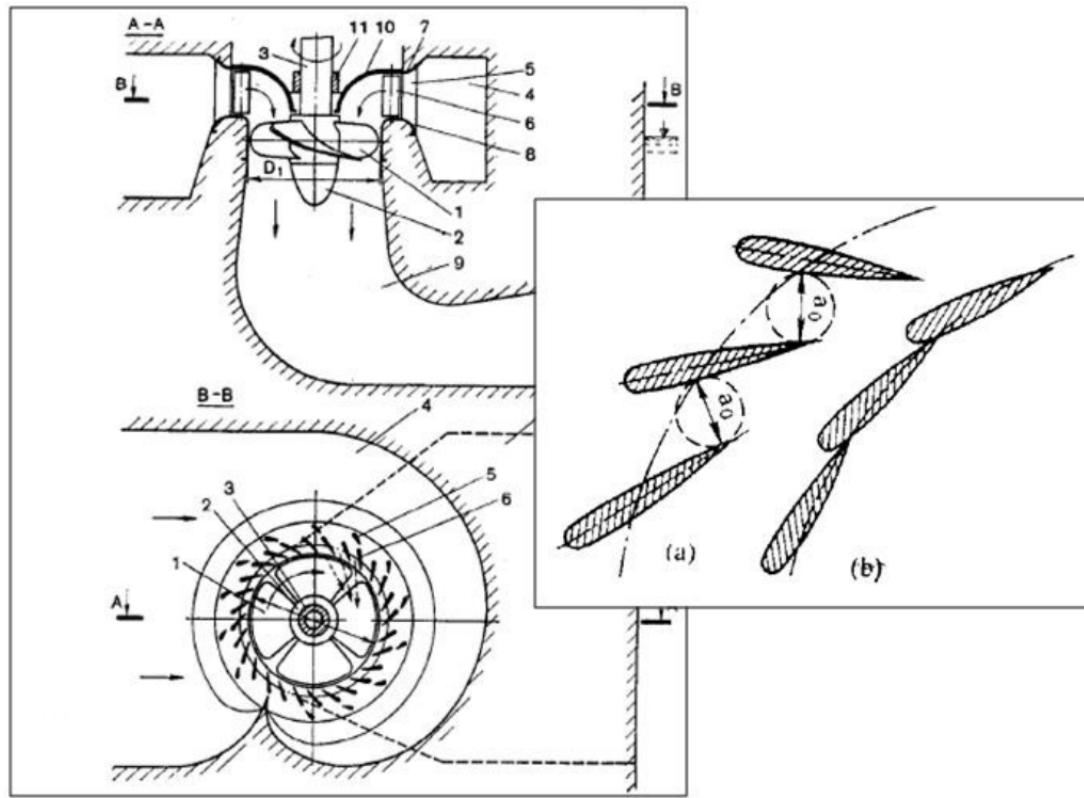
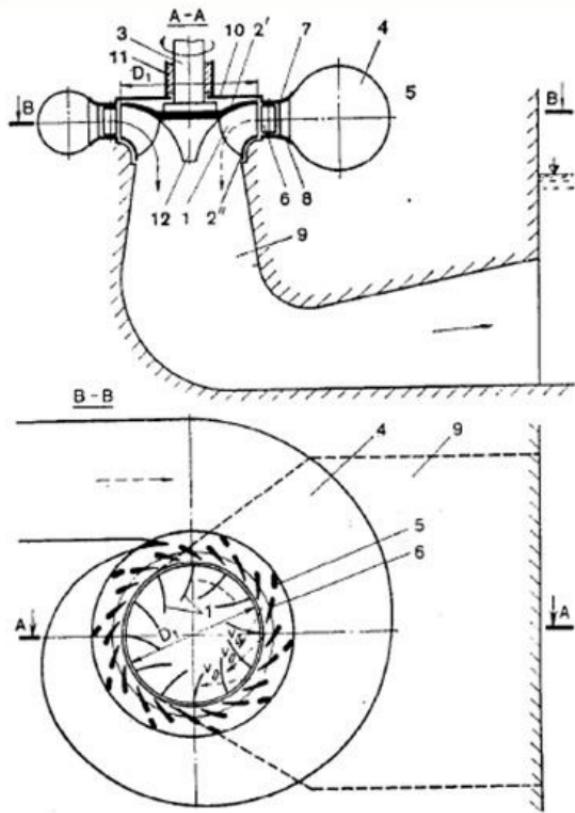


Fig. 3.13 Corte longitudinal de uma turbina Kaplan.





## **2.7) Curvas características de turbinas hidráulicas**

### **2.7.1) Campo básico de funcionamento**

Para uma determinada turbina pode-se obter em ensaio o chamado "diagrama de colina", fig.2.5 , onde mantendo a rotação constante varia-se a altura de queda e a abertura do distribuidor, medindo-se a vazão correspondente.

### **2.7.2) Curvas de operação ou de recepção**

São curvas obtidas no ensaio de recepção (normalmente contratual) da máquina instalada. Estas curvas são obtida com  $H$  constante e nominal e  $n$  (rotação) constante nominal, fig.2.6, variando-se a abertura do distribuidor e medindo potência e vazão e calculando-se o rendimento total (neste caso adota-se o rendimento do gerador e o rendimento seria o rendimento total da instalação).

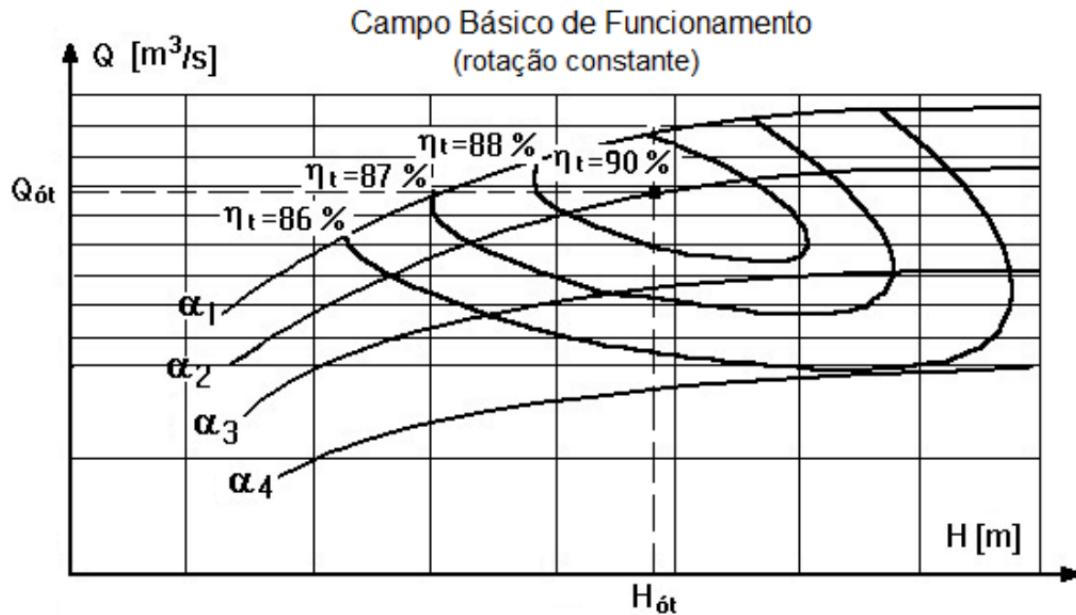


Fig.2.5 - Campo básico de funcionamento-turbina

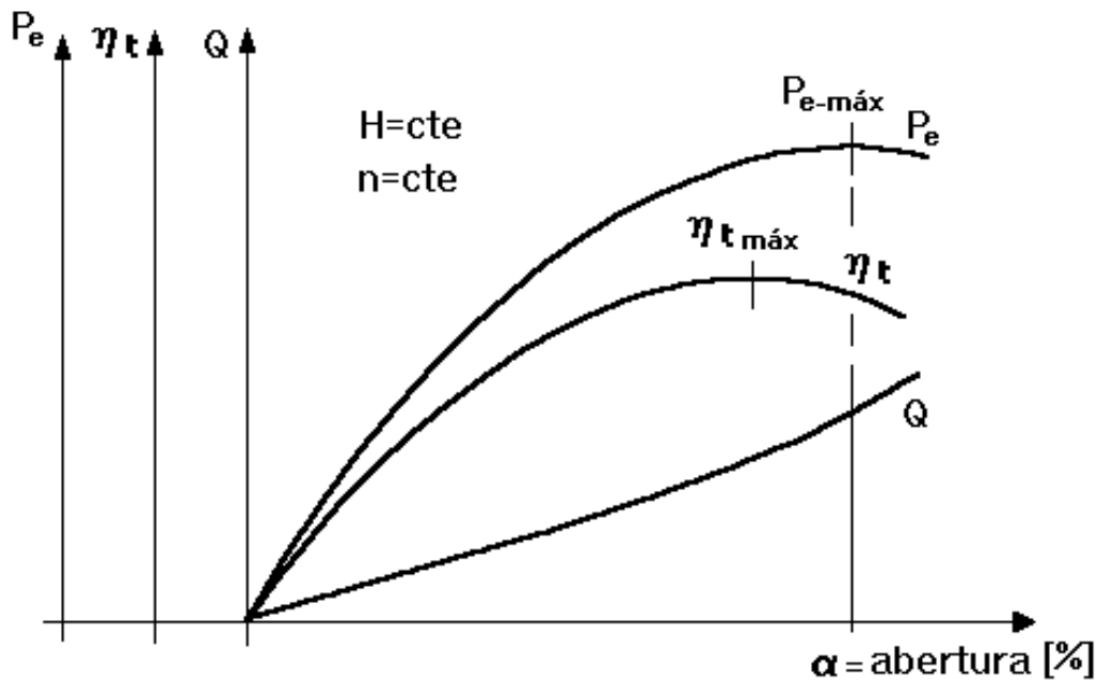


Fig.2.6 - Curva do ensaio de recepção

## **2.8) Curvas características para bombas e ventiladores**

### **2.8.1) Campo básico de funcionamento**

Para MHG, que normalmente não possuem sistema diretor (em construções especiais possuem aletas direcionais na entrada), a variação da vazão depende do sistema no qual a máquina está instalada, pois este sistema possui uma característica de instalação definida.

Para estes tipos de máquinas é necessário também realizar a variação da rotação para se obter o campo básico de funcionamento, como na fig.2.7.

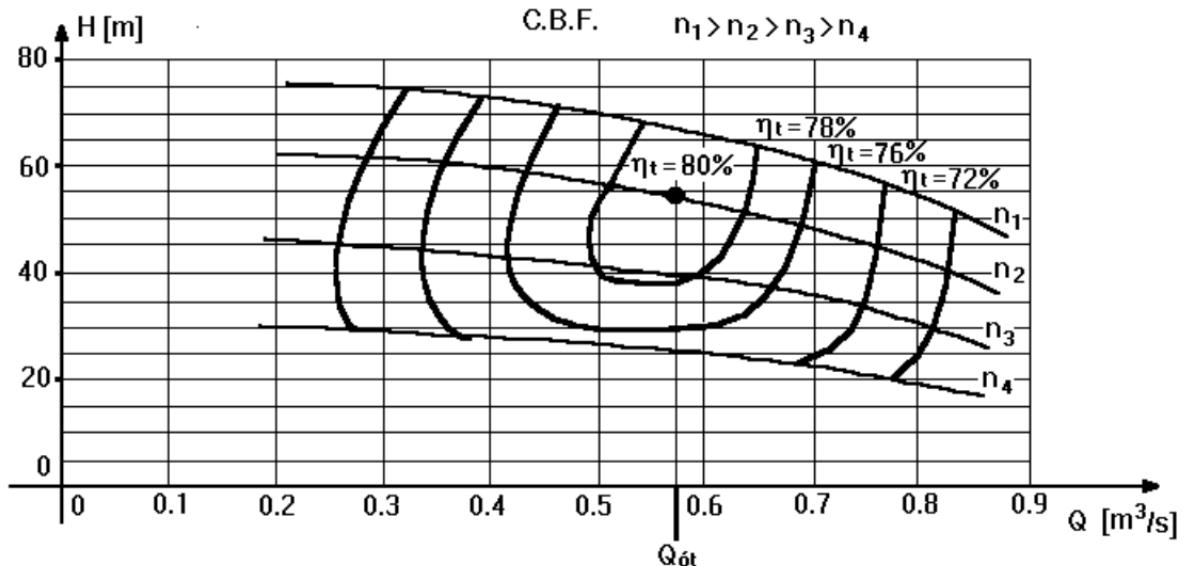


Fig.2.7 - Campo básico de funcionamento - bomba

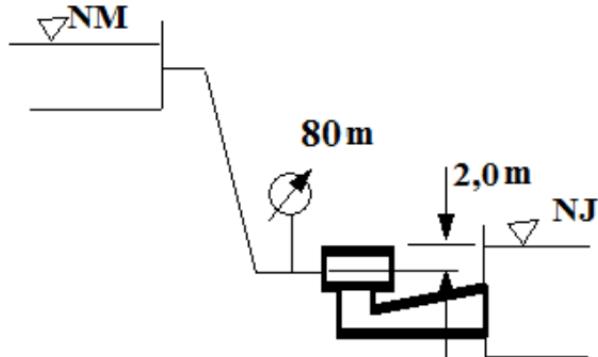
## 2.8.2) Curva de operação ou de recepção:

São curvas que se obtém com rotação constante, tem o aspecto semelhante a equivalente para turbinas. Podem ser obtidas tanto com ensaio da máquina instalada quanto pode ser obtido do campo básico de funcionamento.

## 2.9) Exemplos de cálculos

### 2.9.1) Turbina de reação

**Exemplo 2.1** - Calcule a altura de queda sobre a turbina e a potência de eixo (potência mecânica) do aproveitamento hidrelétrico esquematizado ao lado, sendo o rendimento total igual a 90%, conhecendo-se os seguintes dados: i)  $Q = 0,3 \text{ [m}^3/\text{s}]$  , ii) diâmetro na tubulação de entrada = 250 [mm] , iii) largura do tubo de sucção na saída = 650 [mm] , iv) altura do tubo de sucção na saída = 250 [mm].



Solução:

$$p_2/\gamma = 80 \text{ [m]} \text{ (pressão manométrica)}$$

$$V_2 = Q / A_2 = 4Q / \pi D_2^2 = 4 \times 0,3 / (\pi \times 0,25^2) = 6,1 \text{ [m/s]}$$

$$V_1 = Q / A_1 = Q / LB = 0,3 / (0,65 \times 0,25) = 1,85 \text{ [m/s]}$$

$$Z_2 = -2 \text{ [m]} \quad \text{e} \quad a_2 = 0$$

$$H = p_2/\gamma \pm a_2 + (V_2^2 - V_1^2)/2g + Z_2 = 80 + 0 + 1,72 - 2$$

$$H = 79,7 \text{ [m]}$$

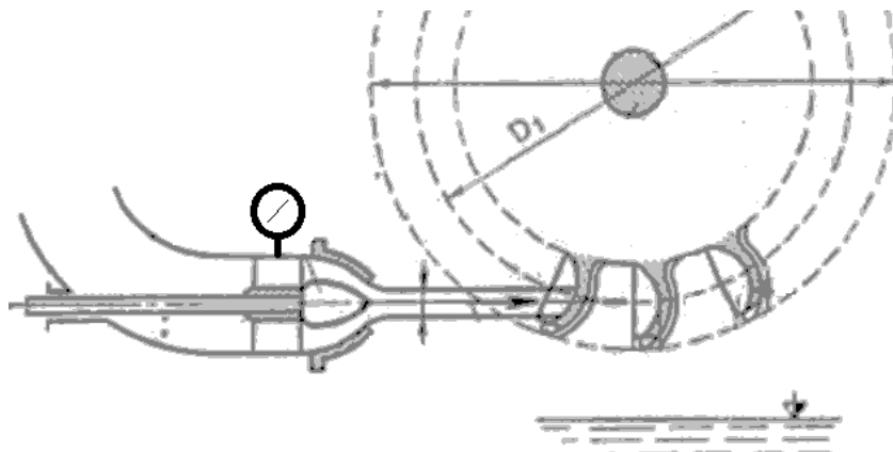
$$P_e = \eta_t \cdot \rho g \cdot Q H$$

$$P_e = 0,9 \times 9.780 \times 0,3 \times 79,7 = 210.519 \text{ [W]}$$

$$P_e = 210,5 \text{ [kW]}$$

## 2.9.2) Turbina de ação

**Exemplo 2.2** - Determinar a potência hidráulica e a potência de eixo em [CV] de uma turbina Pelton com as seguintes características: i) vazão: 80 [l/s] ii) pressão no manômetro da entrada: 750 [m], iii) diâmetro externo do injetor na seção de medida de pressão: 15 [cm], iv) diâmetro interno do injetor na seção de medida de pressão: 8 [cm], v) correção de instalação do manômetro: 0,25 [m] e vi) rendimento total: 88%



Solução:

$$p_2/\gamma = 750 \text{ [m]} \text{ (pressão manométrica)}$$

$$V_2 = Q / A_2 = 4Q / \pi(D_{\text{ext}}^2 - D_{\text{int}}^2) = 4 \times 0,08 / \pi(0,15^2 - 0,08^2) = 6,3 \text{ [m/s]}$$

$$a_2 = 0,25 \text{ [m]}$$

$$H = p_2/\gamma \pm a_2 + V_2^2 / 2g \quad H = 750 + 0,25 + 2,04 = 752,3 \text{ [m]}$$

$$P_h = \rho g \cdot QH = 9.780 \times 0,08 \times 752,3 = 588.599 \text{ [W]}$$

$$\boxed{P_h = 588,6 \text{ [kW]}}$$

$$P_e = \eta_t \cdot P_h$$

$$P_e = 0,88 \cdot 588.599 = 517.967 \text{ [W]}$$

$$P_e = 517.967 \text{ [W]} \times 1 \text{ [CV]/735 [W]}$$

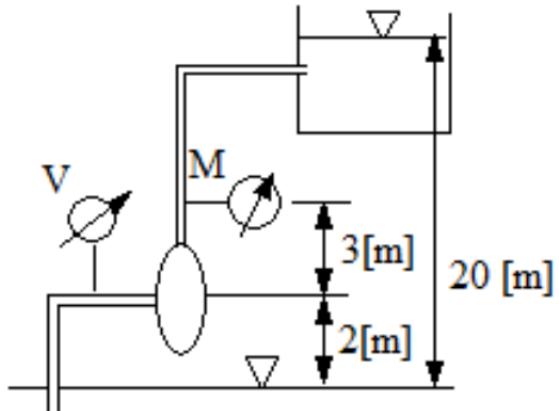
$$\boxed{P_e = 704,7 \text{ [CV]}}$$

### 2.9.3) Bomba hidráulica

**Exemplo 2.3** - Em uma instalação de bombeamento, conforme esquema apresentado, são conhecidos os seguintes dados: i) vazão: 0,4 [m<sup>3</sup>/s], ii) diâmetro da tubulação de sucção: 20 [in], iii) diâmetro da tubulação no recalque: 15 [in], iv) perda de carga na succão: 1,8 [m], v) perda de carga no recalque: 10 [m], vi) rendimento total: 80 %. Pede-se determinar: a) a potênciia hidráulica fornecida pela bomba, b) a potênciia de eixo (mecânica) da bomba (em CV) e c) a pressão que indicará um manômetro instalado na tubulação de recalque, na posição indicada na figura.

método analítico :

$$H = H_{est} + h_{ps} + h_{pr}$$



$$H = 20 + 1,8 + 10 = 31,8 \text{ [m]}$$

$$P_h = \rho g \cdot Q H$$

$$P_h = 9.780 \times 0,4 \times 31,8$$

$$P_h = 124.401 \text{ [W]} = 124 \text{ [kW]}$$

$$P_e = P_h / \eta_t$$

$$P_e = 124.401 / 0,80 = 155.501 \text{ [W]}$$

$$P_e = 155.501 \text{ [W]} \times 1 \text{ [CV]} / 735 \text{ [W]}$$

$$P_e = 213 \text{ [CV]}$$

método manométrico :

$$H_2 - H_1 = H = (p_2 - p_1) / \gamma + (V_2^2 - V_1^2) / 2g + (Z_2 - Z_1) + (\pm a_2 \pm a_1)$$

$$V_2 = Q/A_2 = 4Q / \pi D_2^2 = 4 \times 0,4 / [\pi \times (15 \times 0,0254)^2] = 3,5 \text{ [m/s]} \text{ (saída)}$$

$$V_1 = Q/A_1 = 4Q / \pi D_1^2 = 4 \times 0,4 / [\pi \times (20 \times 0,0254)^2] = 2,0 \text{ [m/s]} \text{ (entrada)}$$

$$Z_2 = 5 \text{ [m]} \quad e \quad Z_1 = 2 \text{ [m]}$$

$$a_2 = 0 \quad e \quad a_1 = 0$$

$$H = 31,8 = (p_2/\gamma - p_1/\gamma) + (3,5^2 - 2,0^2)/(2 \times 9,8) + (5 - 2) + 0$$

$$H = 31,8 = (p_2/\gamma - p_1/\gamma) + 0,42 + 3$$

$$(p_2/\gamma - p_1/\gamma) = 28,4 \text{ [m]}$$

$$H_0 = H_1 + h_{ps} = p_1/\gamma + V_1^2/2g + Z_1 + h_{ps} = 0$$

$$0 = p_1/\gamma + 2,0^2/(2 \times 9,8) + 2 + 1,8 = p_1/\gamma + 4,0$$

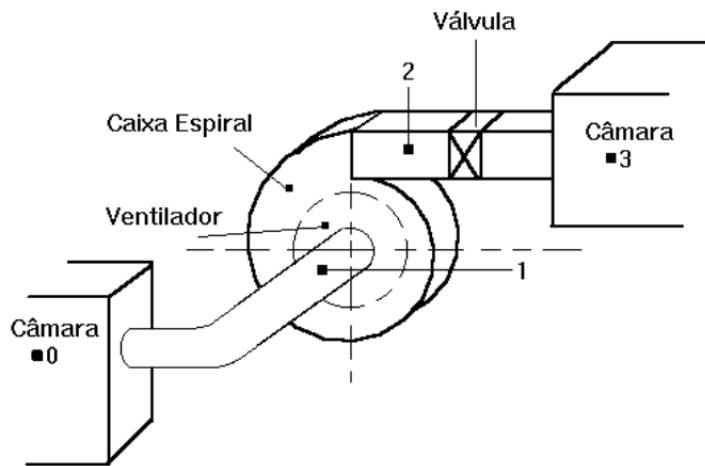
$$p_1/\gamma = -4 \text{ [m]}$$

$$p_2/\gamma = 28,4 + p_1/\gamma = 28,38 - 4$$

$$\boxed{p_2/\gamma = 24,4 \text{ [m]}}$$

## 2.9.4) Ventilador

**Exemplo 2.4** - Um ventilador trabalha com uma vazão de  $500 \text{ [m}^3/\text{h}]$  de ar, desenvolvendo uma diferença de pressão total equivalente a  $10 \text{ [mCA]}$ . Considerando o rendimento total igual a 65% e que os dutos de entrada e saída possuem, respectivamente diâmetros iguais a  $188 \text{ [mm]}$  e  $132 \text{ [mm]}$ , calcule a) diferença de pressão estática em  $\text{[N/m}^2]$ , b) a potência hidráulica desenvolvida e c) a potência mecânica de eixo em  $\text{[CV]}$ .



Solução :

$$\frac{\Delta p_{\text{tot}}}{\gamma} = 10 \text{ [mCA]} \Rightarrow \Delta p_{\text{tot}} = \gamma \cdot 10 \text{ [mCA]} = 9.780 \times 10$$
$$\boxed{\Delta p_{\text{tot}} = 97.800 \text{ [N/m}^2\text{]}}$$

$$V_2 = Q/A_2 = 4Q/\pi D_2^2 = 4x(500/3.600) / [\pi \times 0,132^2] = 10,1 \text{ [m/s]} \text{ (saída)}$$

$$V_1 = Q/A_1 = 4Q/\pi D_1^2 = 4x(500/3.600) / [\pi \times 0,188^2] = 5,0 \text{ [m/s]} \text{ (entrada)}$$

$$\Delta p_{\text{tot}} = (p_2 - p_1) + \frac{\rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2}{2} \quad \text{então } 97.800 = (p_2 - p_1) + 46,206$$
$$\boxed{(p_2 - p_1) = 97.753 \text{ [N/m}^2\text{]}}$$

$$P_h = \rho g Q H = Q \cdot \Delta p_{\text{tot}} = (500/3.600) \times 97.800 \quad \boxed{P_h = 13.583 \text{ [W]}}$$

$$P_e = P_h / \eta_t \quad P_e = 13.583 / 0,65 = 20.897 \text{ [W]} \quad \boxed{P_e = 28,5 \text{ [CV]}}$$

## **Capítulo 3 - Perdas, potências e rendimentos**

### **3.1) Perdas**

TURBINAS HIDRÁULICAS: Energia hidráulica → Trabalho + Perdas

BOMBAS E VENTILADORES: Trabalho → Energia hidráulica + Perdas

As perdas em máquinas hidráulicas podem ser subdivididas nos seguintes tipos:

- Perdas hidráulicas;
- Perdas volumétricas;
- Perdas mecânicas.

### 3.1.1) Perdas hidráulicas:

#### A) Atrito viscoso

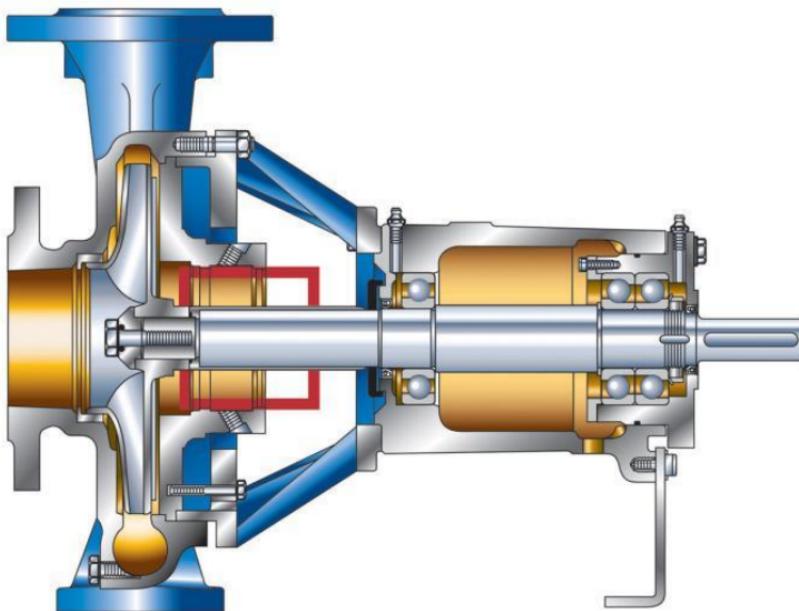
São perdas devido ao atrito viscoso do fluido em escoamento no rotor, no distribuidor, na caixa espiral e no tubo de sucção. Denotadas por  $h_h$ , ocasionam uma perda de pressão no escoamento.

Para turbinas a altura de queda  $H_{pá}$ , absorvida pela máquina e em parte transformada em energia mecânica, é:  $H_{pá} = H - h_h$

Para bombas a altura de elevação  $H_{pá}$ , fornecida pela máquina e em parte transformada em potência hidráulica, é:  $H = H_{pá} - h_h$

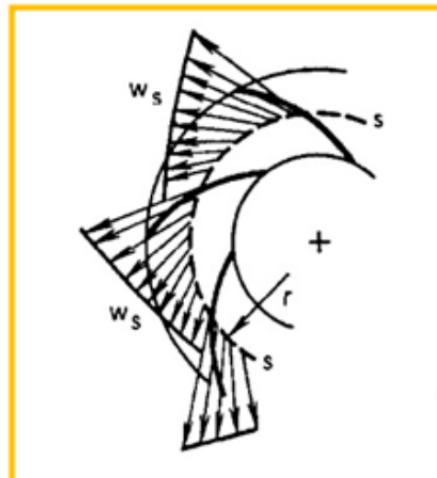
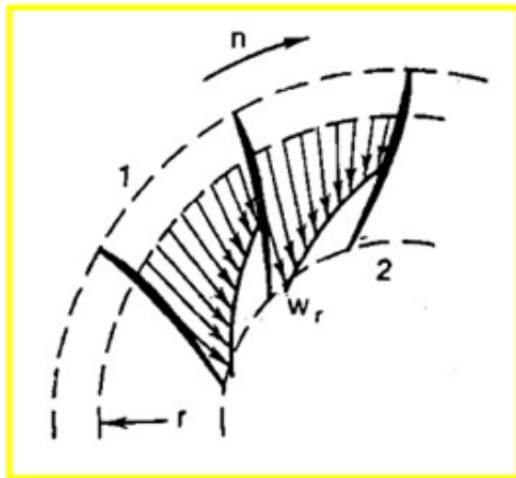
B) Atrito lateral:

Ocorre perda de potência devido ao atrito viscoso entre o rotor e a parcela de fluido que escoa entre o rotor e a carcaça. Denotada por  $P_a$ .



### C) Perdas por refluxo:

Perdas que ocorrem devido a variação de seção dos canais entre as pás. Perdas por refluxo ocorrem notadamente em bombas devido ao escoamento desacelerado nos canais. Denotada por  $P_d$ .



### 3.1.2) Perdas volumétricas:

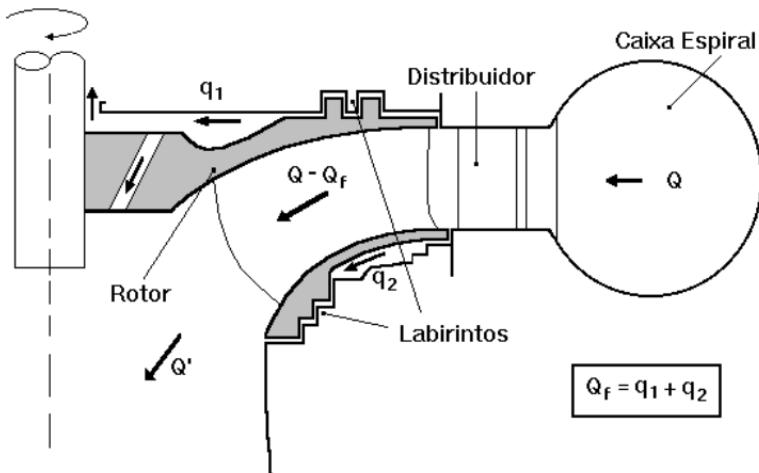
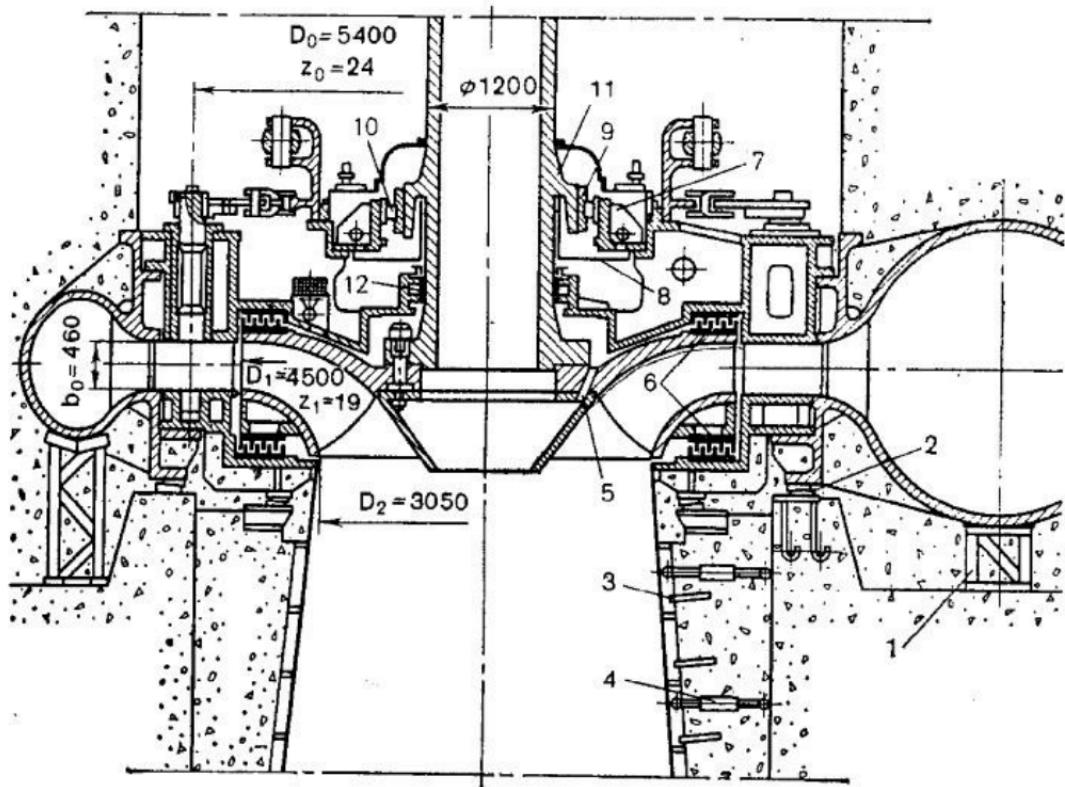


Fig.3.1 - Perdas volumétricas - turbinas

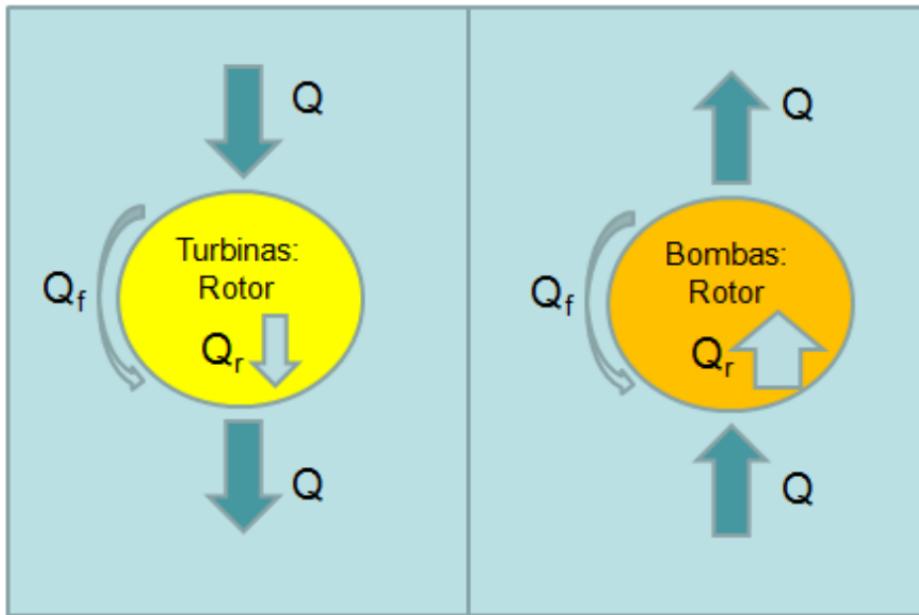
São perdas por fuga que ocorrem nos labirintos, perdas de fluido na gaxeta, e em algumas construções perdas de fluido para compensação do empuxo axial. A vazão total de fuga é  $Q_f$ .



A vazão que flui através do rotor é

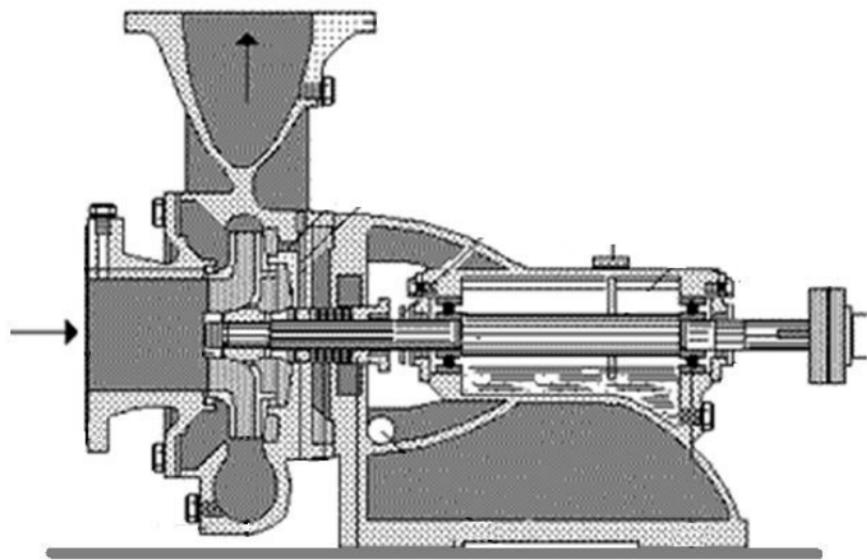
$$Q_r = Q - Q_f, \text{ no caso de turbinas e,}$$

$$Q_r = Q + Q_f, \text{ no caso de bombas e ventiladores.}$$



### 3.1.3) Perdas mecânicas

As perdas citadas são chamadas perdas internas em seu conjunto (hidráulicas e volumétricas). Além destas ocorrem também perdas mecânicas devido ao atrito nos mancais e vedações.



## 3.2) Potências

### 3.2.1) Potência interna:

Para turbinas a potência interna obtida com a altura de queda  $H$  disponível será:

$$P_i = \rho g(Q - Q_f)(H - h_h) - P_a = \rho g Q H_i$$

$$P_i < P_h \quad H_i < H$$

Para bombas e ventiladores a potência interna fornecida ao fluido será:

$$P_i = \rho g(Q + Q_f)(H + h_h) + P_a + P_d = \rho g Q H_i$$

$$P_i > P_h \quad H_i > H$$

### 3.2.2) Potência total ou eficaz (Potência de eixo)

Ao considerar as perdas externas ou mecânicas,  $P_m$ , determina-se a potência no eixo:

Para turbinas :  $P_e = P_i - P_m$

Para bombas :  $P_e = P_i + P_m$

### 3.2.3) Potência perdida

O somatório das perdas internas e externas são relacionadas pela potência perdida:

Para turbinas :  $P_p = P_h - P_e$

Para bombas :  $P_p = P_e - P_h$

### 3.3) Rendimentos

3.3.1) Rendimento hidráulico: Caracteriza as perdas de pressão.

Para turbinas:

$$\eta_h = \frac{H_{pá}}{H} = \frac{H_t}{H} = \frac{H - h_h}{H}$$

Para bombas:

$$\eta_h = \frac{H}{H_{pá}} = \frac{H}{H_t} = \frac{H}{H + h_h}$$

3.3.2) Rendimento volumétrico: Caracteriza as perdas volumétricas.

Turbinas:  $\eta_v = \frac{Q - Q_f}{Q}$  = Vazão que passa no rotor / Vazão que entra

Bombas:  $\eta_v = \frac{Q}{Q + Q_f}$  = Vazão que entra / Vazão que passa no rotor

### 3.3.3) Rendimento interno:

Caracteriza todas as perdas internas.

Turbinas:

$$\eta_i = \frac{P_i}{P_h}$$

Bombas e ventiladores:

$$\eta_i = \frac{P_h}{P_i}$$

Se desprezarmos a perda por atrito lateral e as perdas por refluxo, obtemos para bombas e turbinas:  $\eta_i = \eta_h \cdot \eta_v$

### 3.3.4) Rendimento mecânico:

Caracteriza somente perdas mecânicas.

Turbinas:

$$\eta_m = \frac{P_e}{P_i} = \frac{P_i - P_m}{P_i}$$

Bombas:

$$\eta_m = \frac{P_i}{P_e} = \frac{P_i}{P_i + P_m}$$

### 3.3.5) Rendimento total:

Caracteriza todas as perdas da máquina.

Para turbinas:

$$\eta_t = \frac{P_e}{P_h} = \frac{P_e}{\rho g Q H} = \eta_i \cdot \eta_m$$

Para bombas:

$$\eta_t = \frac{P_h}{P_e} = \frac{\rho g Q H}{P_e} = \eta_i \cdot \eta_m$$

Substituindo as expressões para os rendimentos obtem-se:

$$\eta_t = \eta_h \cdot \eta_v \cdot \eta_m$$

É usual adotarmos para dimensionamentos  $\eta_v = 1$ , hipótese que conduz a expressão simplificada para o rendimento total:  $\boxed{\eta_t = \eta_h \cdot \eta_m}$

Os valores normais para o rendimento total de turbinas são:

turbinas	Dimensão	$\eta_t$ [%]	$\eta_h$ [%]	$\eta_v$ [%]	$\eta_m$ [%]
Reação	Pequenas	81	90	95	95
	Médias	87	92	97	97
	Grandes	93	96	99	98
Ação	Pequenas	80	85		94
	Médias	86	88		97
	Grandes	92	94		98

Tab. 3.1 - Rendimentos típicos para turbinas hidráulicas

### 3.4) Esquema das perdas

A fig 3.2 mostra as perdas que ocorrem em turbinas (MHM) e em bombas e ventiladores (MHG).

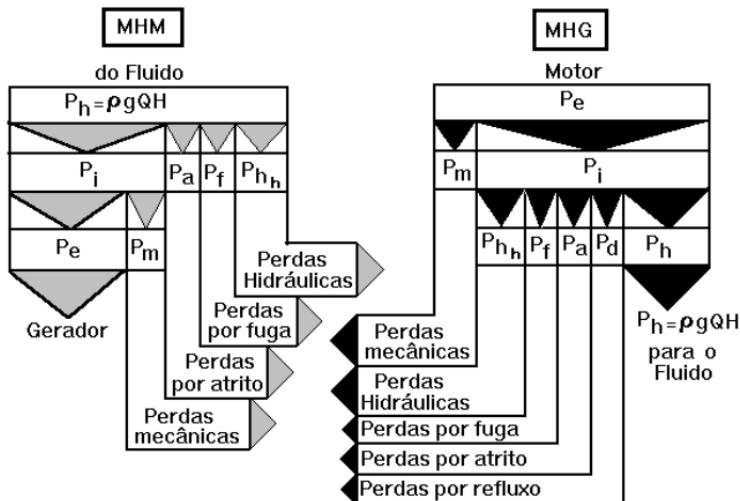


Fig. 3.2 - Esquema de perdas em turbinas hidráulicas (MHM)  
e em bombas e ventiladores (MHG)

### 3.5) Exemplos de cálculos

#### 3.5.1) Turbinas de reação

**Exemplo 3.1** - As 6 turbinas tipo Francis da usina de Estreito - Rio Grande - SP/MG, apresentam as seguintes características: i) vazão: 320 [m<sup>3</sup>/s] , ii) Altura de queda: 60,8 [m], iii) Potência de eixo unitária máxima: 182 [MW]. Calcular as várias perdas e potências, adotando os rendimentos da tab. 3.1 (turbina de reação de grandes dimensões)

$$P_h = \rho g Q H = 9.780 \times 320 \times 60,8 \times 10^{-6} [\text{MW}] = 190,3 [\text{MW}]$$

$$P_e = \eta_t P_h = 0,93 \times 190,3 = 177 [\text{MW}] \quad (\text{ponto de máxima eficiência})$$

$$P_i = \eta_i P_h = \eta_h \cdot \eta_v \cdot P_h = 0,96 \times 0,99 \times 190,3 = 0,95 \times 190,3 = 180,9 [\text{MW}]$$

$$P_m = P_i - P_e = 180,9 - 177 = 3,9 [\text{MW}]$$

$$P_i = \rho g (Q - Q_f)(H - h_h) \quad (P_a = 0)$$

$$\eta_h = (H - h_h)/H \quad \Rightarrow h_h = H(1 - \eta_h) = 60,8 \times (1 - 0,96) = 2,4 [\text{m}]$$

$$\eta_v = (Q - Q_f)/Q \quad \Rightarrow Q_f = Q(1 - \eta_v) = 320 \times (1 - 0,99) = 3,2 [\text{m}^3/\text{s}]$$

$$P_f = \rho g Q_f H = 9.780 \times 3,2 \times 60,8 [W]$$

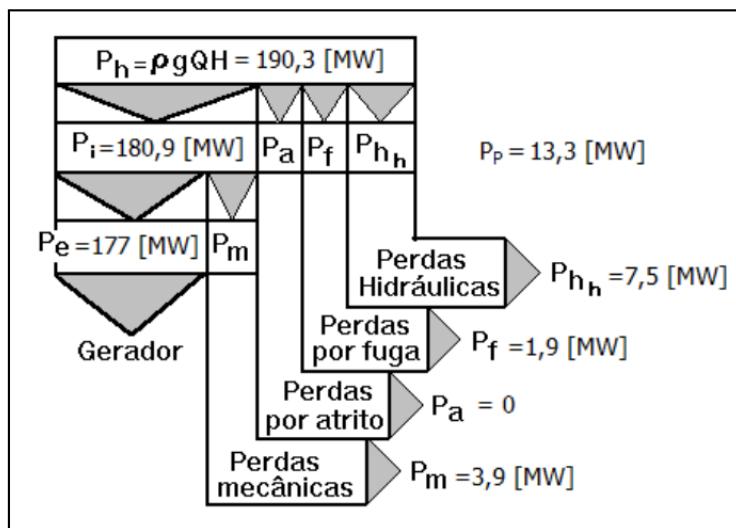
$$P_f = 1,9 [MW]$$

$$P_{hh} = \rho g Q_h h_h = 9.780 \times 320 \times 2,4 [W]$$

$$P_{hh} = 7,5 [MW]$$

$$P_{fh} = \rho g Q_f h_h = 9.780 \times 3,2 \times 2,4 [W] = 0,075 [MW] \text{ (0,04% de } P_i)$$

$$P_p = P_h - P_e = 190,3 - 177 = 13,3 [MW]$$



### 3.5.2) Bomba hidráulica

**Exemplo 3.2** - Uma bomba hidráulica apresenta as seguintes características:  
i) vazão: 3 [m<sup>3</sup>/s] e ii) Altura de elevação: 30 [m]. Calcular as várias perdas e potências, adotando os rendimentos hidráulico, volumético e mecânico respectivamente iguais a 70, 95 e 97 %.

$$P_h = \rho g Q H = 9.780 \times 3 \times 30 [W] = 880,2 [kW]$$

$$\eta_t = \eta_h \cdot \eta_v \cdot \eta_m = 0,7 \times 0,95 \times 0,97 = 64,5\%$$

$$\eta_i = \eta_h \cdot \eta_v = 0,7 \times 0,95 = 66,5\%$$

$$P_e = P_h / \eta_t = 880,2 / 0,645 = 1.364,6 [kW]$$

$$P_i = P_h / \eta_i = 880,2 / 0,665 = 1.323,6 [kW]$$

$$P_m = P_e - P_i = 1.364,6 - 1.323,6 = 41 [kW]$$

$$P_i = \rho g (Q + Q_f) (H + h_h) \quad (P_a \text{ e } P_d \text{ iguais a 0})$$

$$\eta_h = H / (H + h_h) \Rightarrow h_h = H (1/\eta_h - 1) \quad h_h = 30 \times (1/0,70 - 1) = 12,86 [m]$$

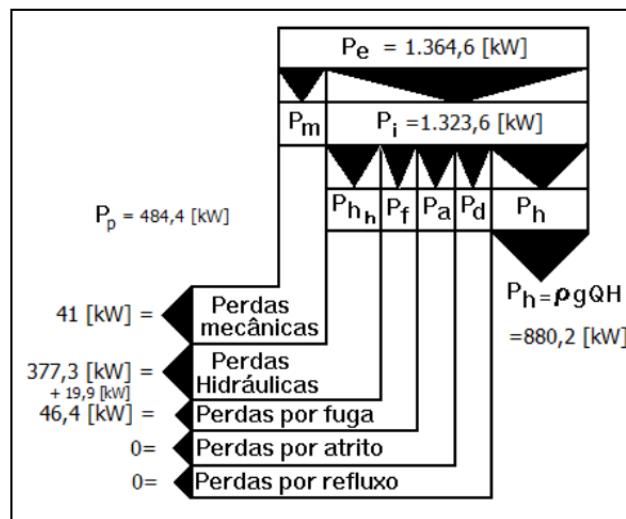
$$\eta_v = Q / (Q + Q_f) \Rightarrow Q_f = Q (1/\eta_v - 1) \quad Q_f = 3 \times (1/0,95 - 1) = 0,158 [m^3/s]$$

$$P_f = \rho g Q_f H = 9.780 \times 0,158 \times 30 [W] = 46,4 [kW]$$

$$P_{hh} = \rho g Q_h h_h = 9.780 \times 3 \times 12,86 [W] = 377,3 [kW]$$

$$P_{fh} = \rho g Q_f h_h = 9.780 \times 0,158 \times 12,86 [W] = 19,9 [kW] \text{ (1,5% de } P_i)$$

$$P_p = P_e - P_h = 1.364,6 - 880,2 = 484,4 [kW]$$



## **Capítulo 4 - Representação e Triângulos de velocidades**

### **4.1) Composição**

As turbinas bem como as bombas hidráulicas e ventiladores são compostos de duas partes básicas: uma fixa e outra móvel.

A parte fixa é composta por elementos tais como: espiral, pré-distribuidor, sistema diretor de aletas ajustáveis e tubo de sucção no caso de turbinas de reação, e injetores no caso de turbinas de ação. No caso de bombas e ventiladores, a parte fixa é composta basicamente da voluta na saída e de pequeno tubo na entrada, para as máquinas mais simples.

Nestas partes fixas, devido ao seu formato - injetor ou difusor - poderá ocorrer a transformação de energia de pressão em energia de velocidade ou energia de velocidade em energia de pressão.

A parte móvel da máquina é formada apenas pelo rotor, o qual é composto de pás, cubo (e coroa dependendo do tipo). Este é o principal órgão da turbina, responsável pela transformação de energia hidráulica em energia mecânica ou o contrário no caso de bombas.

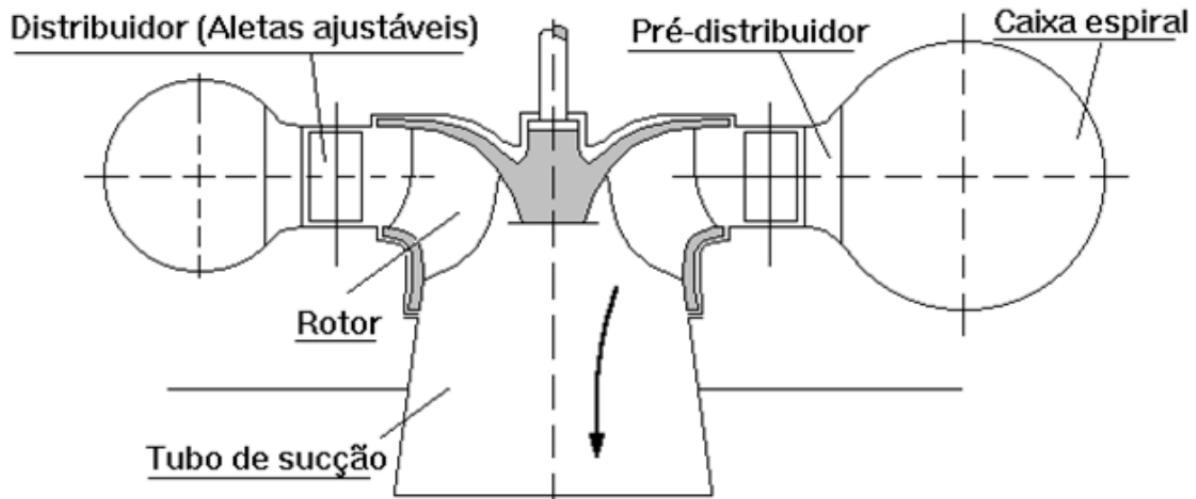
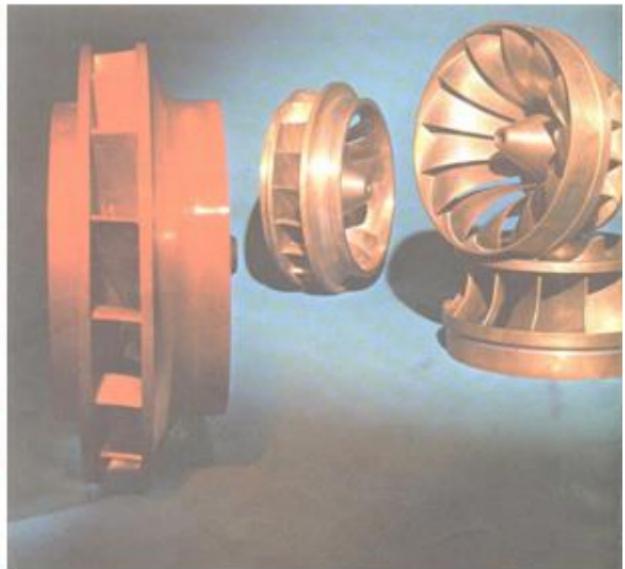


Fig. 4.1 - Arranjo típico de turbina hidráulica tipo Francis

## Fotografías de rotores de turbinas



Kaplan



Francis



Turbina Francis de Belo Monte

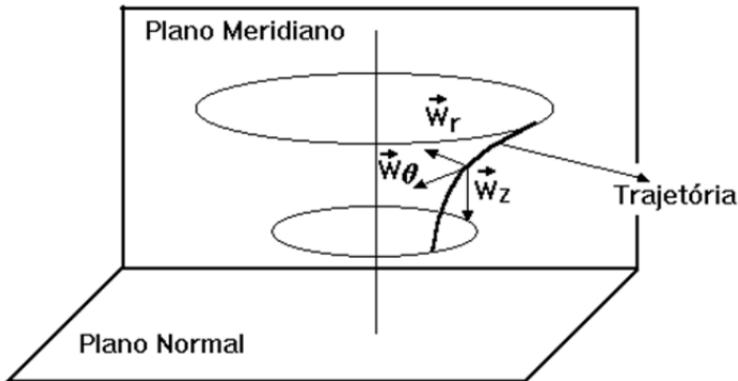
$H=87 \text{ [m]}$  e  $Q = 775 \text{ [m}^3/\text{s]}$

$18 \times 611 \text{ MW (P}_{\text{el}}\text{)}$

## 4.2) Representação

Considera-se, de maneira geral, que o escoamento em turbinas e bombas hidráulicas se processa em superfícies de revolução superpostas. A velocidade do fluido em cada ponto do escoamento possui então componentes tangencial ao eixo, componente radial e componente axial.

Portanto, as pás (em simples ou em dupla curvatura) e outras partes do rotor, que são desenhadas conforme o escoamento desejado do fluido no rotor, serão perfeitamente definidas a partir da sua projeção nos dois planos mostrados: o plano meridional e o plano normal.



#### 4.2.1) Plano meridional

O plano meridional é um plano paralelo ao eixo da máquina.

A representação neste plano é feita pelo rebatimento dos pontos principais da pá sobre o plano, mantendo-se a mesma distância do ponto ao eixo no rebatimento.

Assim, cada ponto do rotor fica representado no plano utilizando a circunferência que ele descreveria se dotado de rotação em torno do eixo.

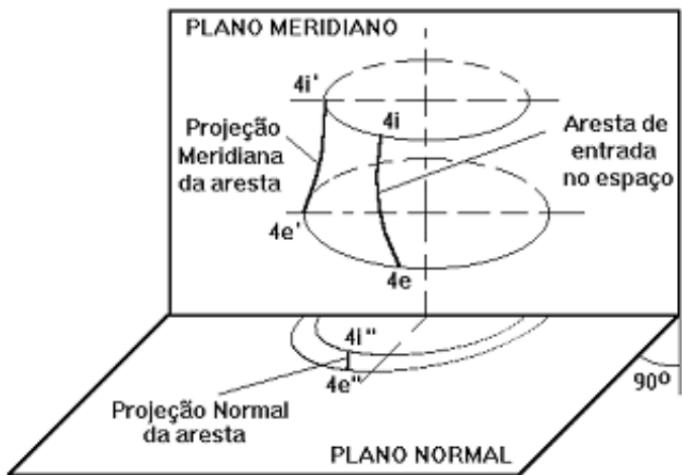


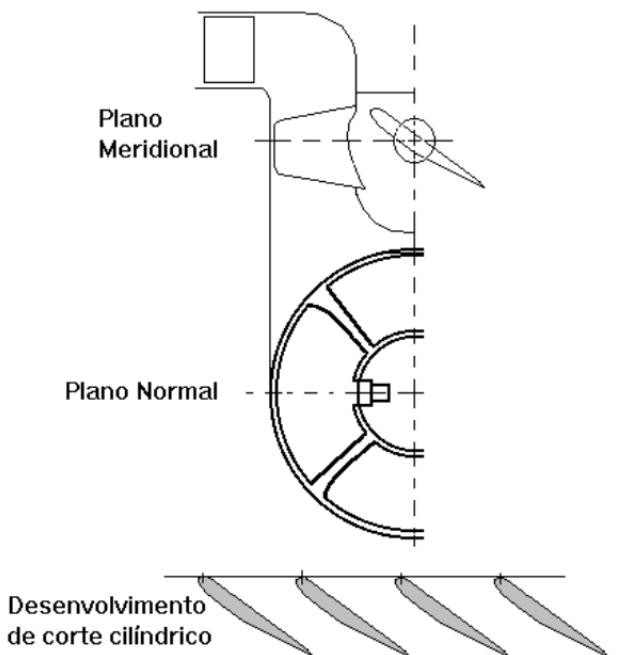
Fig.4.3 - Projeção meridional e normal de uma aresta

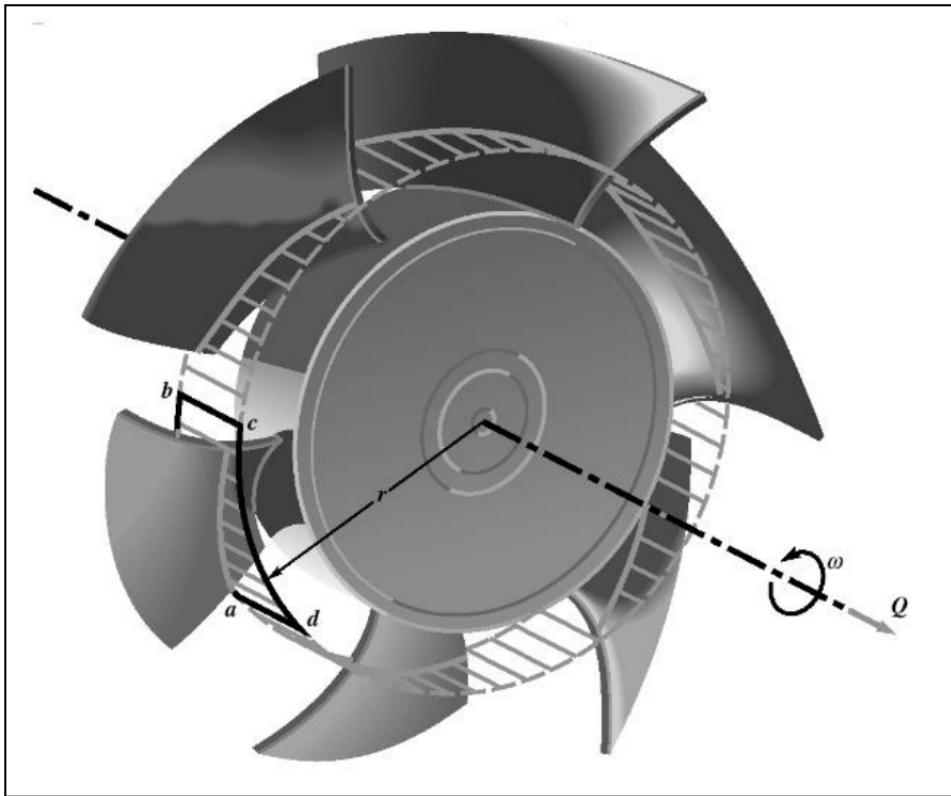
#### 4.2.2) Plano normal

É um plano perpendicular ao eixo da máquina, da mesma maneira, a representação é feita através do rebatimento dos pontos necessários da pá sobre o plano.

Para as máquinas axiais, além das projeções meridional e normal, pode-se representar a máquina segundo vários cortes cilíndricos desenvolvidos, em cada diâmetro em estudo.

Fig.4.4 - Representação de turbina axial





### 4.3) Notação

Com a finalidade de identificação dos pontos principais do rotor é usual adotar-se índices que indicam suas posições no rotor. Nesta indicação os índices aumentam no sentido do escoamento, para todas as máquinas hidráulicas, chamada convenção de Betz.

Esta convenção adota os índices 4 e 5 para as arestas de entrada e saída do rotor, respectivamente, e os índices 3 e 6 para os pontos do escoamento imediatamente antes e depois do rotor, conforme a fig.4.5 , onde se mostra outros pontos da convenção.

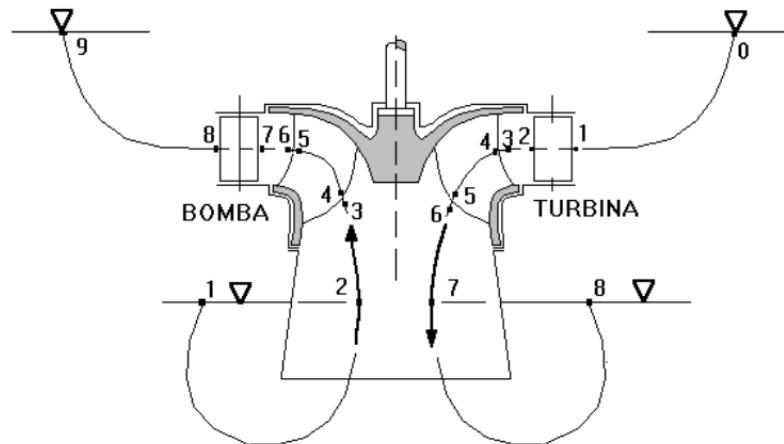


Fig.4.5 - Convenção de Betz

#### 4.4) Elementos cinemáticos (Componente meridional - Cm)

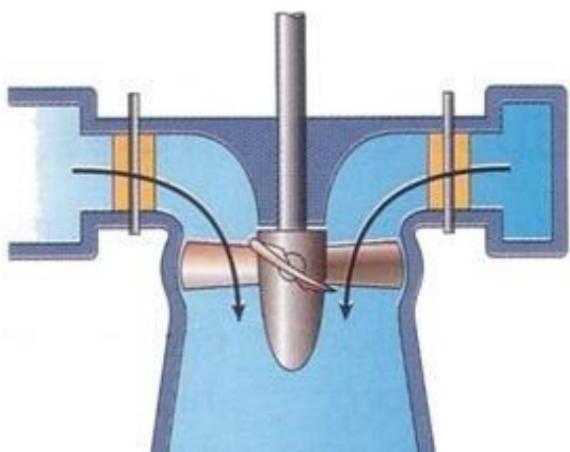
A componente meridional do escoamento, Cm, no sistema distribuidor e no rotor, é obtida através da projeção da velocidade absoluta no plano meridional.

Uma vez que a componente meridional tem a direção perpendicular à área em que o fluido escoa, utiliza-se o princípio de conservação da massa, cuja expressão na forma integral para regime permanente é

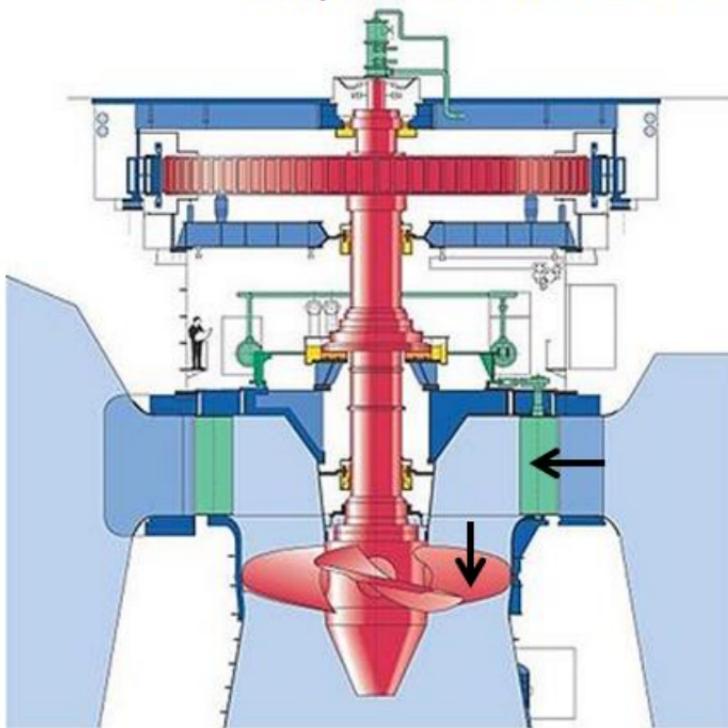
$$\int_{SC} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} = 0$$

para relacionar a componente Cm com a vazão em volume Q, considerando escoamento uniforme na superfície de controle e fluido incompressível. Assim:

$$|\vec{C} \cdot d\vec{A}| = C_m A = Q$$



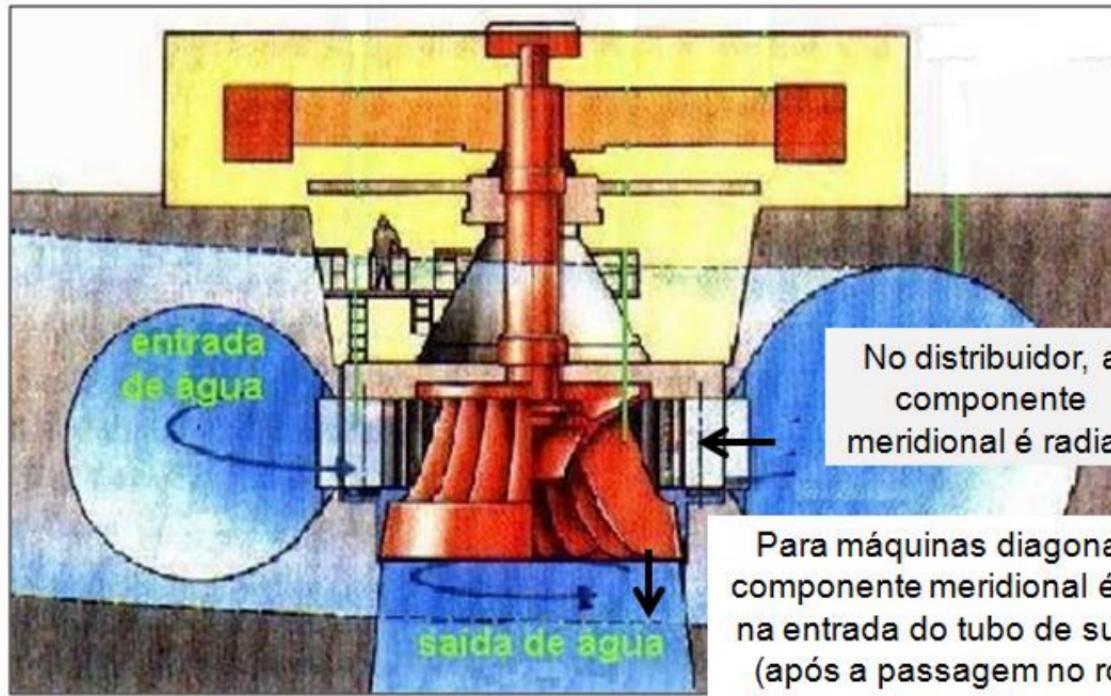
## Componente meridional - Cm



No distribuidor, a componente meridional é radial.

No rotor axial, a componente meridional é axial.

## Componente meridional - Cm



#### 4.4.1) Sistema diretor (distribuidor) de máquinas hidráulicas radiais

Aplicando a equação da vazão em massa para a superfície de controle composta das superfícies 1 e 2 , e uma vez que não há fluxo pelas laterais, podemos obter uma relação entre  $Cm_1$  e  $Cm_2$  , respectivamente na entrada e na saída do sistema diretor.

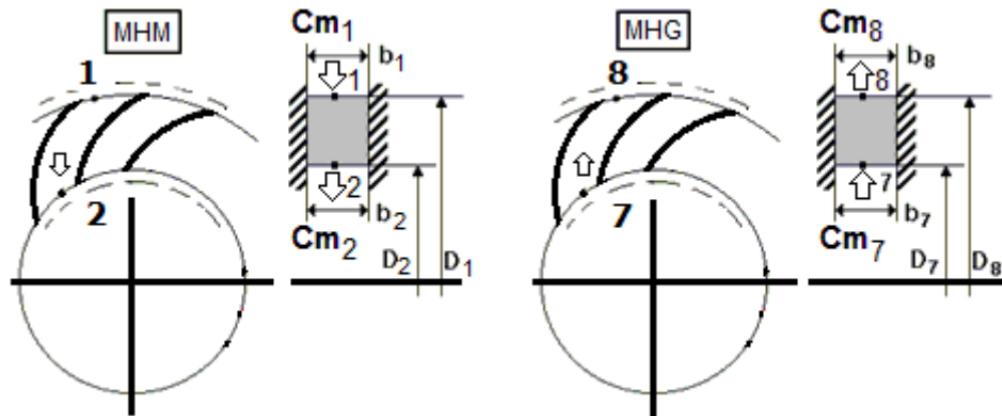


Fig.4.6 - Sistema diretor radial

$$\int_2 \rho C_m dA - \int_1 \rho C_m dA = 0$$

Logo:  $\rho C_{m2} A_2 = \rho C_{m1} A_1 = \rho Q$  (vazão em massa)

Então:  $C_{m2} A_2 = C_{m1} A_1 = Q$

ou  $C_{m2} \pi D_2 b_2 = C_{m1} \pi D_1 b_1 = Q$

Ao considerarmos  $b_1=b_2$  teremos para MHM:

$$\frac{C_{m1}}{C_{m2}} = \frac{D_2}{D_1} \quad \text{logo } C_{m2} > C_{m1} \text{ e } p_2 < p_1$$

Do mesmo modo, ao considerarmos  $b_8=b_7$  teremos para MHG:

$$\frac{C_{m7}}{C_{m8}} = \frac{D_8}{D_7} \quad \text{logo } C_{m8} < C_{m7} \text{ e } p_8 > p_7$$

Haverá uma aceleração do escoamento meridional na direção da entrada do rotor no caso de turbinas radiais (MHM) e uma desaceleração do escoamento meridional após a saída do rotor no caso de bombas e ventiladores radiais (MHG).

#### 4.4.2) Sistema diretor de máquinas hidráulicas axiais

Da mesma maneira consideramos para máquinas axiais:  $Q_1 = Q_2$

Logo:

$$Cm_1 A_1 = Cm_2 A_2$$

Sendo:

$$A_1 = \pi(De_1^2 - Di_1^2)/4$$

e

$$A_2 = \pi(De_2^2 - Di_2^2)/4$$

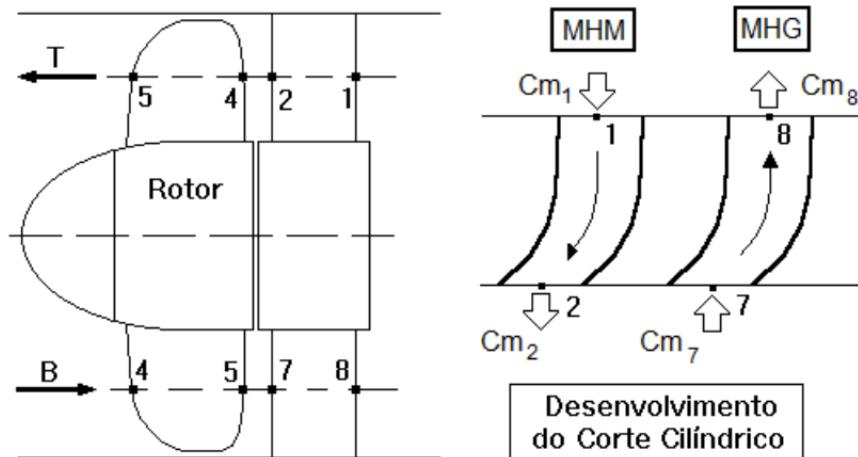


Fig.4.7 - Sistema diretor axial

Para uma análise simplificada de máquinas estritamente axiais considera-se que a área na entrada é igual a área na saída do sistema distribuidor, pois  $D_{e1}=D_{e2}=De$  e  $D_{i1}=D_{i2}=Di$ , sendo  $De$  e  $Di$ , respectivamente, os diâmetros externos e internos, da coroa circular por onde passa a água na direção do rotor, então:

$$Cm_1 = Cm_2 \quad \text{para turbinas axiais}$$

$$Cm_7 = Cm_8 \quad \text{para bombas e ventiladores axiais}$$

Do mesmo modo que na entrada para turbinas radiais (ou saída de bombas radiais), a componente meridional para máquinas axiais tem sua direção perpendicular à área em que o fluido escoa.

## **4.5) Triângulos de velocidade no rotor**

### **4.5.1) Movimento absoluto e relativo**

A trajetória de uma partícula ou sistema de partículas através de um volume de controle que abrange o rotor é percebida de forma diferente, dependendo da posição em que o observador se encontre.

Para um observador movendo-se com o rotor (sistema não inercial), a trajetória da partícula acompanha o perfil da pá, como se o rotor estivesse em repouso, resultando assim a trajetória relativa da partícula.

Para um observador fora do rotor (sistema inercial), a trajetória da partícula é a trajetória absoluta, resultante da composição de dois movimentos, o movimento relativo dos canais do rotor e outro de rotação do rotor.

A velocidade tangente à trajetória relativa é denominada velocidade relativa, e a velocidade tangente a trajetória absoluta é a velocidade absoluta.

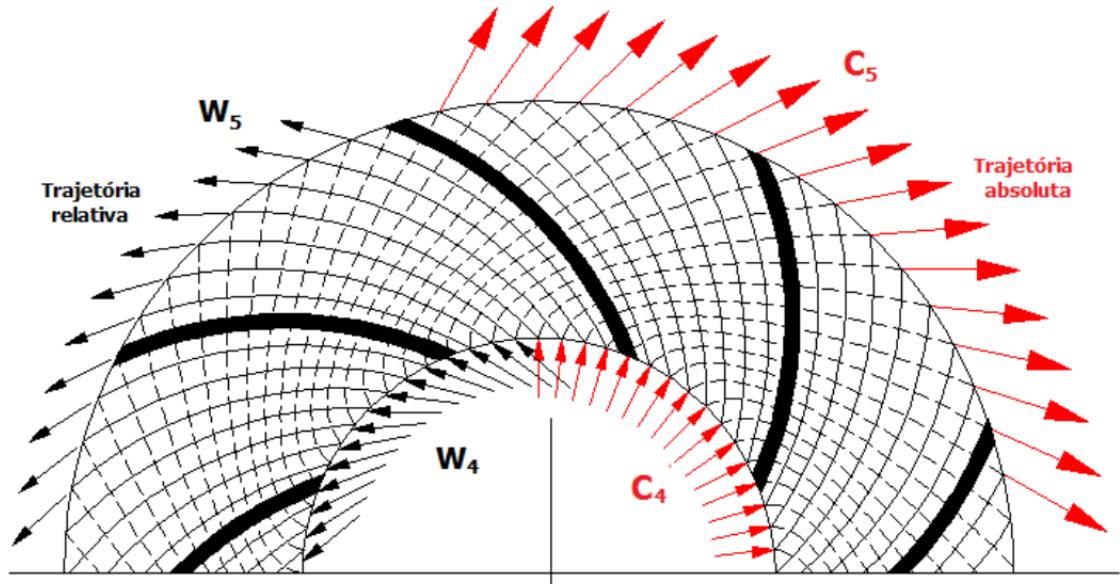


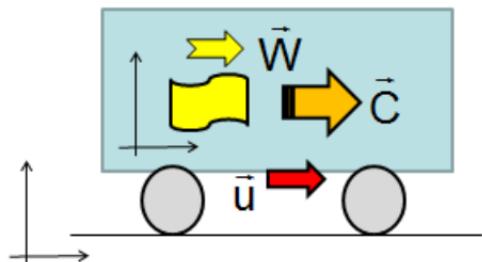
Fig.4.8 - Trajetórias em uma bomba centrífuga

#### 4.5.2) Triângulos de velocidade

Da mecânica geral, retiramos a relação entre as velocidades absoluta  $C$ , a velocidade relativa  $W$  e a velocidade do sistema não inercial no ponto considerado, ou seja, a velocidade tangencial  $u$  do rotor. Para qualquer ponto do escoamento no rotor vale a equação vetorial:

$$\vec{C} = \vec{W} + \vec{u}$$

Consideraremos inicialmente um número infinito de pás do rotor, infinitamente finas, assim as linhas de corrente do escoamento relativo serão coincidentes com as pás (condição ideal do escoamento no rotor).



Utilizando a simplificação de escoamento uniforme, o triângulo de velocidades determinado para um ponto será válido para todos os pontos localizados na mesma seção definida pelo mesmo diâmetro. Entre as seções de entrada e saída, o fluxo deverá produzir o mínimo de perdas com a adoção de perfis ou formatos de pás mais adequados.

Na entrada da pá, para entrada "sem choque", a velocidade relativa  $W_4$  deverá ser tangente a pá, formando o ângulo  $\beta_4$  com a direção tangencial.

Na saída a velocidade relativa  $W_5$  é tangente a pá, formando o ângulo  $\beta_5$  com a direção tangencial. Os ângulos  $\beta_4$  e  $\beta_5$  são chamados ângulos construtivos.

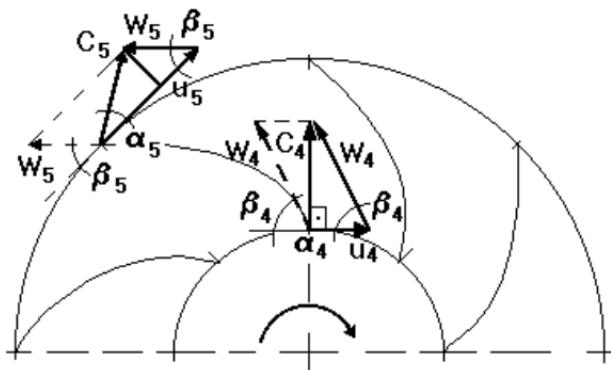
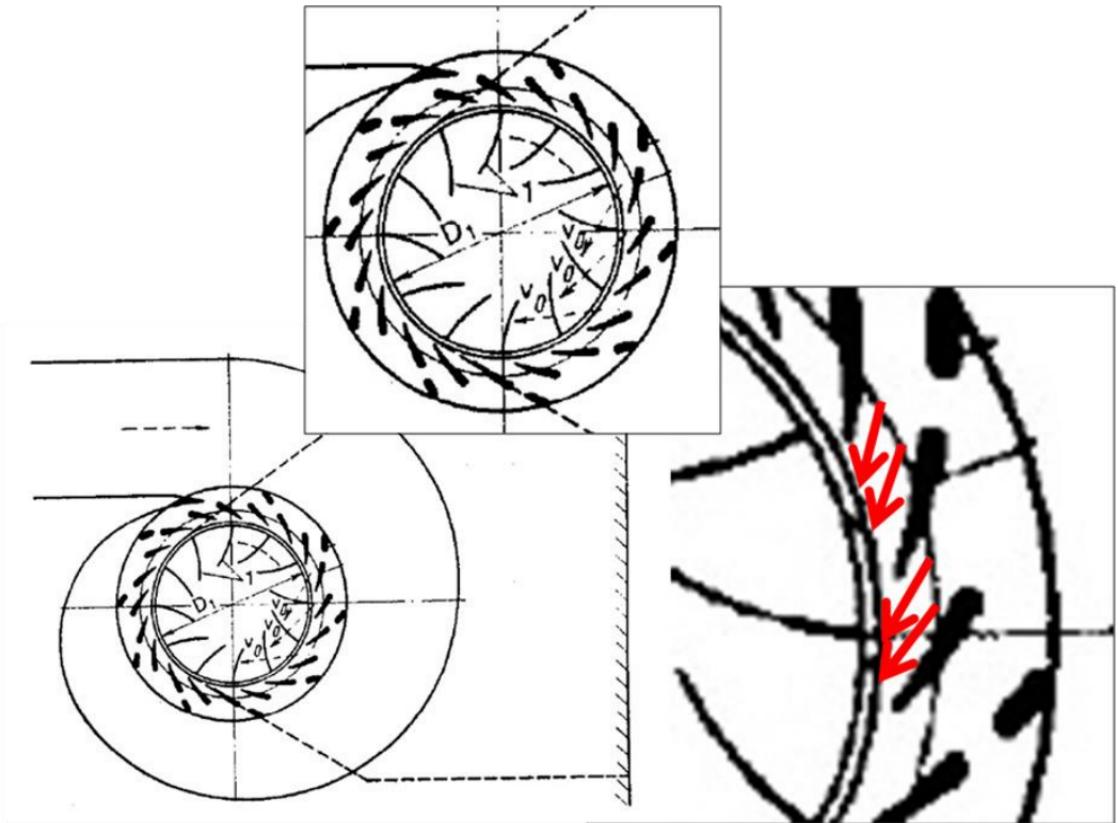


Fig.4.9 - Representação das velocidades em rotor de bomba radial

É importante destacar que a velocidade relativa determina o ângulo de entrada no ponto de projeto, com escoamento "sem choques" na entrada.



#### 4.5.2.1) Relações importantes

$$\tan \alpha = \frac{C_m}{C_u} \quad \text{e} \quad \tan \beta = \frac{C_m}{u - C_u}$$

C = Velocidade absoluta do escoamento no ponto;

u = Velocidade tangencial do rotor no ponto;

W = Velocidade relativa do escoamento no ponto;

C<sub>m</sub> = Componente meridional da velocidade absoluta

Projeção da velocidade absoluta C sobre o plano meridional  
(normal às seções de entrada e saída do rotor)

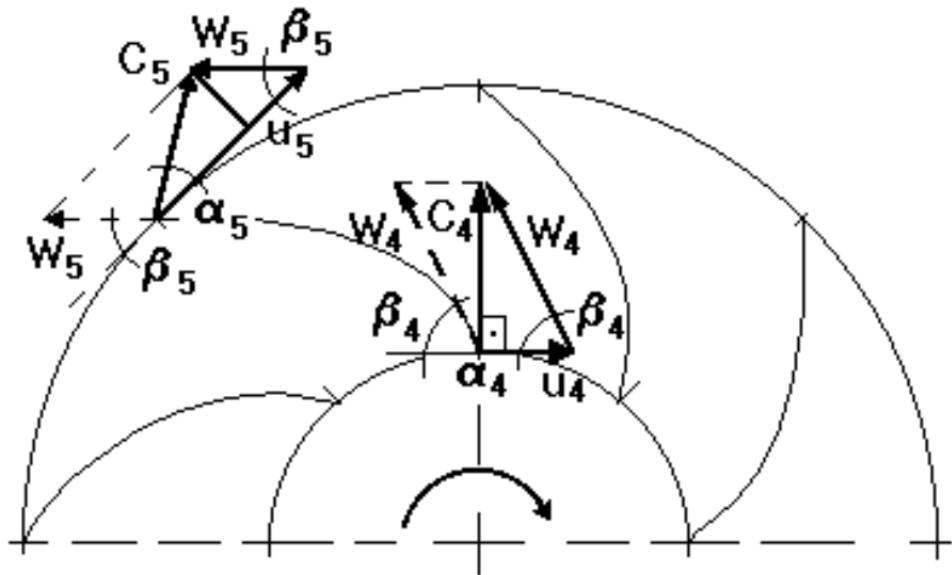
C<sub>u</sub> = Componente tangencial da velocidade absoluta

Projeção da velocidade absoluta C sobre a direção tangencial

$\alpha$  = Ângulo formado pela velocidade absoluta C e a velocidade tangencial u,  
Ângulo do escoamento absoluto

$\beta$  = Ângulo formado pela velocidade relativa  $W$  e a velocidade tangencial  $u$ ,  
Ângulo do escoamento relativo

É congruente com o ângulo construtivo das pás na entrada no ponto de melhor eficiência para uma dada rotação



#### 4.5.2.2) Relação entre vazão e a componente meridional, Cm, em máquinas radiais

Para o rotor de uma turbina radial da fig.4.10, a vazão é estabelecida em função da área e da componente meridional, Cm, nas seções de entrada e de saída do rotor (número infinito de pás - escoamento perfeitamente guiado), através da equação:

$$Q = A_4 Cm_4 = A_5 Cm_5 = \pi D_4 b_4 Cm_4 = \pi D_5 b_5 Cm_5$$

Utilizando a mesma equação pode-se determinar a componente Cm , altura do triângulo de velocidades, na entrada ou na saída do rotor, conhecendo-se a vazão em volume Q e as respectivas áreas. A mesma equação pode ser utilizada para rotores de bombas e ventiladores radiais , conforme fig. 4.11.

#### 4.5.2.3) Relação entre rotação e a componente tangencial, $u$ , em máquinas radiais

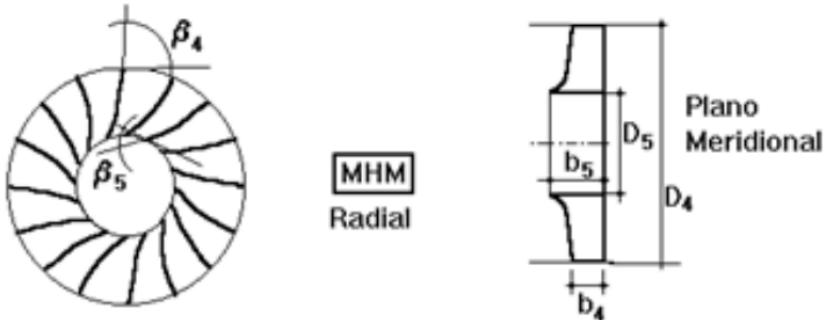
As componentes tangenciais  $u_4$  e  $u_5$  são calculadas conhecendo-se a rotação da rotor através das equações ( $\omega$  = rotação em [rd/s]) , no caso de máquinas radiais :

$$u_4 = \omega \cdot r_4 \quad \text{e} \quad u_5 = \omega \cdot r_5$$

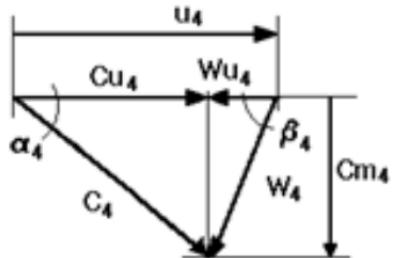
Caso a rotação do rotor seja dada em RPM (rotações por minuto) deve-se realizar a transformação de unidades

$$\omega = \pi \cdot n / 30 \quad (n = \text{rotação em [RPM]})$$

$$u_4 = \pi \cdot D_4 \cdot n / 60 \quad \text{e} \quad u_5 = \pi \cdot D_5 \cdot n / 60$$



Triângulo de Velocidade  
na Aresta de Entrada da pá



Triângulo de Velocidade  
na Aresta de Saída da pá

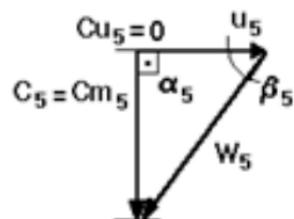
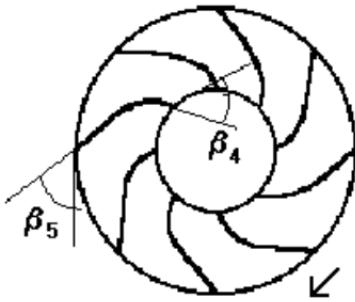
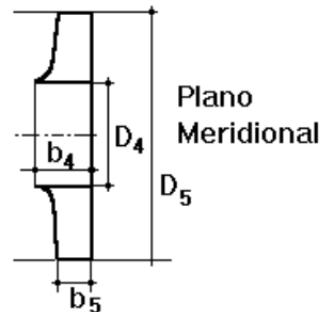
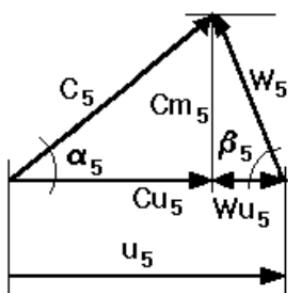


Fig. 4.10 - Triângulos de velocidade - Turbina radial



MHG  
Radial

Triângulo de Velocidade  
na Aresta de Saída da pá



Triângulo de Velocidade  
na Aresta de Entrada da pá

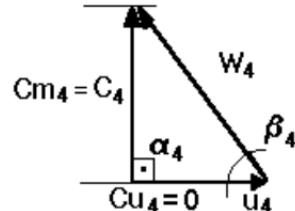


Fig. 4.11 - Triângulos de velocidade - MHG Radial

#### 4.5.2.4) Relação entre vazão e a componente meridional, Cm, em máquinas axiais

Para o rotor axiais, como da turbina da fig.4.12, a determinação da componente meridional em função da vazão é realizada considerando que a área da seção de entrada é igual a da seção de saída. (número infinito de pás - escoamento perfeitamente guiado), através da equação:

$$Q = A_4 Cm_4 = A_5 Cm_5 = \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) Cm_4 = \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) Cm_5$$

Nestas condições, a componente meridional na seção de entrada é igual a componente meridional da seção de saída :  $Cm_4 = Cm_5$  . A mesma equação pode ser utilizada para rotores de bombas e ventiladores axiais , conforme fig. 4.13.

#### 4.5.2.5) Relação entre rotação e a componente tangencial, $u$ , em máquinas axiais

Ao contrário das máquinas radiais que possuem apenas dois diâmetros que caracterizam as seções de entrada e saída, para definição da componente tangencial,  $u$ , nas máquinas axiais é possível utilizar diâmetros desde o diâmetro interno,  $D_i$ , até o diâmetro externo,  $D_e$  (ver fig 4.12).

Utilizando o diâmetro médio  $D_m = (D_e + D_i)/2$ , as componentes tangenciais  $u_4$  e  $u_5$  serão também calculadas conhecendo-se a rotação do rotor através das equações:

$$r_m = D_m / 2 \quad \text{e} \quad u_4 = \omega \cdot r_m \quad \text{e} \quad u_5 = \omega \cdot r_m$$

$$u_4 = u_5 = \pi \cdot D_m \cdot n / 60$$

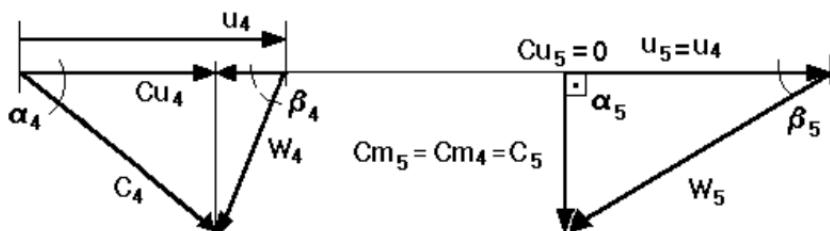
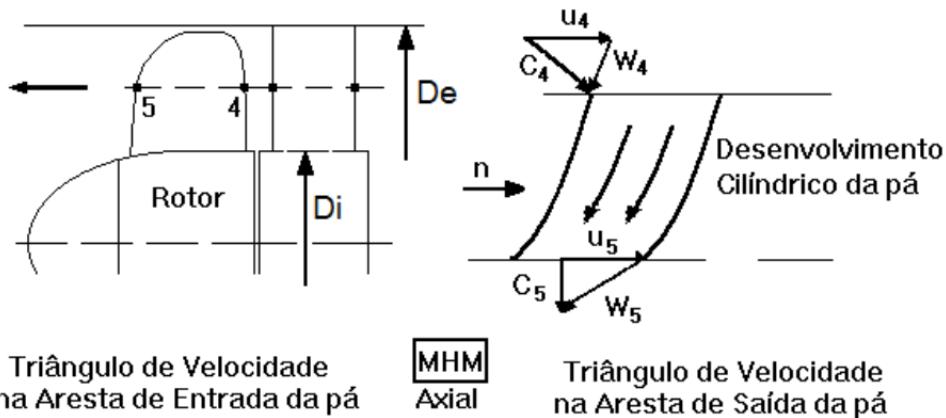


Fig. 4.12 - Triângulos de velocidade - MHM Axial

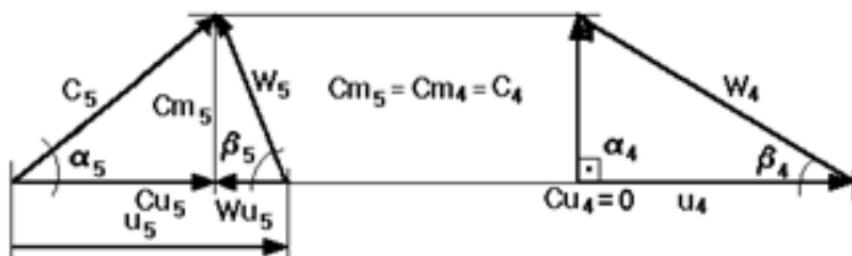
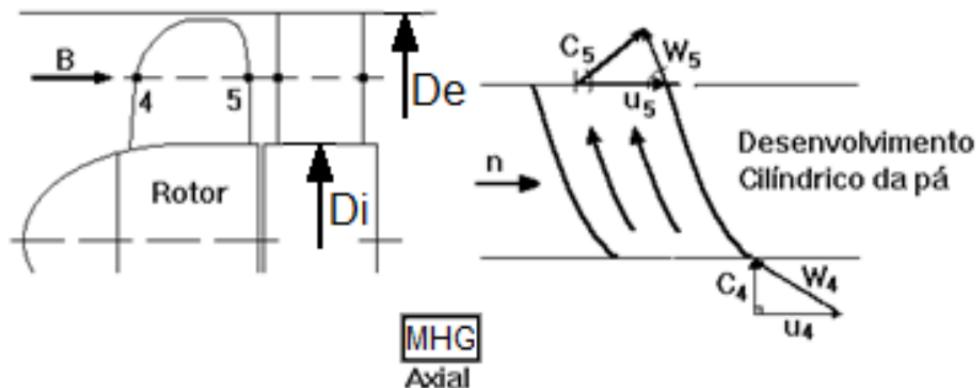


Fig. 4.13 - Triângulos de velocidade - MHG Axial

#### 4.5.2.6) Condições particulares na entrada de bombas e saída de turbinas

Na seção de saída de turbinas (e entrada de bombas) considera-se, para a condição de ponto de projeto de máximo rendimento, que o triângulo de velocidade é um triângulo retângulo, de modo que  $Cu_5 = 0$ , o ângulo  $\alpha_5 = 90^0$ , e  $Cm_5 = C_5$  ( $Cu_4 = 0$ ,  $\alpha_4 = 90^0$ , e  $Cm_4 = C_4$  para bombas e ventiladores). No caso de bombas o ângulo construtivo  $\beta_4$  deverá ser tal que:

$$\beta_4 = \operatorname{arctg} \frac{Cm_4}{u_4}$$

para não ocorrer choques na entrada.

#### 4.5.2.7) Rotor radial de seção constante

Na máquina axial as componentes  $Cm$  são necessariamente iguais e as componentes tangenciais,  $u$ , serão iguais ao considerarmos o mesmo diâmetro médio,  $D_m$ . Para rotores radiais as componentes  $Cm$  serão iguais caso as seções ao longo das pás forem de seções constante, o que implica na equação:  $A_4 = A_5 \therefore D_4 b_4 = D_5 b_5 \therefore Cm_4 = Cm_5$







## 4.6) Exemplos de cálculos

Distribuidor radial - Calcule as componentes  $C_m$  na entrada e na saída de um sistema distribuidor de turbina radial conhecendo-se: i)  $D_1 = 4[m]$ , ii)  $D_2 = 3,6 [m]$  , iii) largura constante,  $b_1 = b_2 = 0,25 [m]$  e iv) vazão =  $12,5 [m^3/s]$ . Solução :

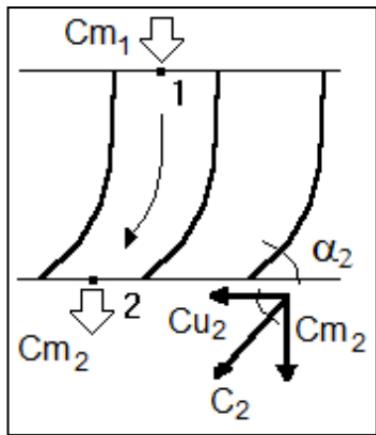
$$A_1 = \pi \cdot D_1 \cdot b_1 = 3,1415 \cdot 4 \cdot 0,25 = 3,1415 [m^2]$$

$$A_2 = \pi \cdot D_2 \cdot b_2 = 3,1415 \cdot 3,6 \cdot 0,25 = 2,827 [m^2]$$

$$C_{m1} = Q / A_1 \rightarrow C_{m1} = 12,5 / 3,14,15 = 3,98 [m/s]$$

$$C_{m2} = Q / A_2 \rightarrow C_{m1} = 12,5 / 2,827 = 4,42 [m/s]$$

Distribuidor axial - Calcule as componentes  $C_m$  na entrada e na saída de um sistema distribuidor de turbina axial, bem como a componente tangencial e o módulo da velocidade do escoamento na saída, conhecendo-se:  
 i) diâmetro externo = 500 [mm], ii) diâmetro interno = 250 [mm], iii) vazão = 0,5 [ $m^3/s$ ], iv) ângulo entre a componente tangencial e a velocidade do escoamento na saída =  $\alpha_2 = 45^\circ$ .



$$A_1 = A_2 = A = \pi \cdot (D_e^2 - D_i^2) / 4 = \pi \cdot (0,5^2 - 0,25^2) / 4 \\ A = 0,147 \text{ [m}^2\text{]}$$

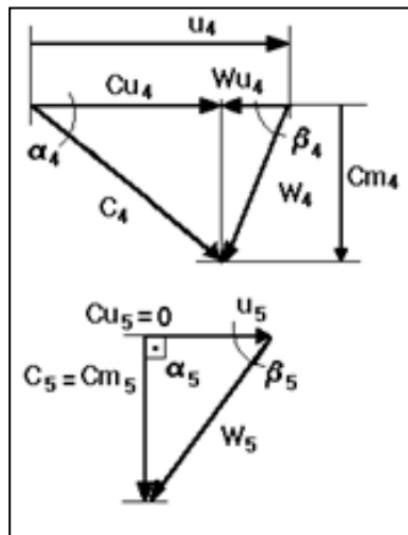
$$Cm_1 = Cm_2 = Q / A \rightarrow Cm_1 = Cm_2 = 0,5 / 0,147 = 3,4 \text{ [m/s]}$$

$$\tan \alpha_2 = Cm_2 / Cu_2 \rightarrow Cu_2 = Cm_2 / \tan \alpha_2 \\ Cu_2 = 3,4 / \tan 45^\circ = 3,4 \text{ [m/s]}$$

$$\sin \alpha_2 = Cm_2 / C_2 \rightarrow C_2 = Cm_2 / \sin \alpha_2 \\ C_2 = 3,4 / \sin 45^\circ = 4,8 \text{ [m/s]}$$

Turbina radial - Determine os elementos dos triângulos de velocidade, na entrada e na saída, de uma turbina radial com os seguintes dados: i) diâmetro de entrada  $D_4 = 3,4 \text{ [m]}$ , ii) diâmetro de saída  $D_5 = 1,2 \text{ [m]}$ , iii) largura na entrada  $b_4 = 0,25 \text{ [m]}$ , iv) largura na saída  $b_5 = 0,75 \text{ [m]}$ , v) vazão  $= 12,5 \text{ [m}^3/\text{s}]$ , vi) rotação  $n = 150 \text{ [RPM]}$ , vii) ângulo construtivo na entrada  $\beta_4 = 85^\circ$ .

Solução:



- Cálculo das áreas:

$$A_4 = \pi \cdot D_4 \cdot b_4 = 3,1415 \cdot 3,4 \cdot 0,25 = 2,670 \text{ [m}^2]$$

$$A_5 = \pi \cdot D_5 \cdot b_5 = 3,1415 \cdot 1,2 \cdot 0,75 = 2,827 \text{ [m}^2]$$

- Cálculo das componentes meridionais:

$$Cm_4 = Q / A_4 > Cm_4 = 12,5 / 2,670 = 4,68 \text{ [m/s]}$$

$$Cm_5 = Q / A_5 > Cm_5 = 12,5 / 2,827 = 4,42 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo das componentes tangenciais:

$$u_4 = \pi \cdot D_4 \cdot n / 60 = 3,1415 \cdot 3,4 \cdot 150 / 60$$

$$u_4 = 26,7 \text{ [m/s]}$$

$$u_5 = \pi \cdot D_5 \cdot n / 60 = 3,1415 \cdot 1,2 \cdot 150 / 60$$

$$u_5 = 9,42 \text{ [m/s]}$$

- Triângulo de saída (retângulo  $C_5=Cm_5$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_5 &= Cm_5 / u_5 &> \operatorname{tg} \beta_5 &= 4,42 / 9,42 \\ \operatorname{tg} \beta_5 &= 0,469 &> \beta_5 &= 25,1^\circ \\ W_5^2 &= u_5^2 + C_5^2 &> W_5 &= 10,4 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

- Triângulo de entrada :

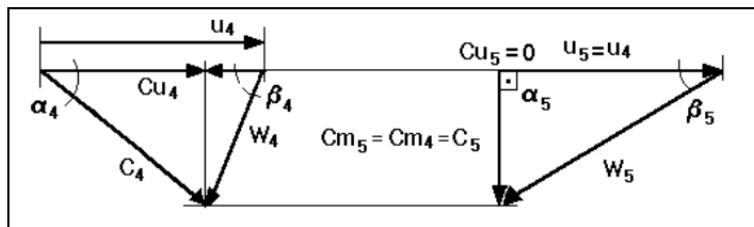
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_4 &= Cm_4 / Wu_4 &> Wu_4 &= Cm_4 / \operatorname{tg} \beta_4 \\ Wu_4 &= 4,68 / \operatorname{tg} 85^\circ &> Wu_4 &= 0,41 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cu_4 &= u_4 - Wu_4 &> Cu_4 &= 26,7 - 0,41 \\ &&> Cu_4 &= 26,29 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4^2 &= Cu_4^2 + Cm_4^2 &> C_4^2 &= 26,29^2 + 4,68^2 \\ &&> C_4 &= 26,7 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_4 &= Cm_4 / Cu_4 &> \alpha_4 &= 10,1^\circ \\ \operatorname{sen} \beta_4 &= Cm_4 / W_4 &> W_4 &= 4,7 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

Turbina axial - Determine os elementos dos triângulos de velocidade, na entrada e na saída, de uma turbina axial com os seguintes dados: i) diâmetro externo  $D_e = 500$  [mm], ii) diâmetro interno  $D_i = 250$  [mm], iii) vazão =  $0,65$  [ $m^3/s$ ], iv) rotação  $n = 500$  [RPM], v) ângulo construtivo na entrada  $\beta_4 = 75^\circ$ .



- Cálculo das áreas:

$$A_4 = A_5 = A = \pi \cdot (D_e^2 - D_i^2) / 4$$

$$A = 3,1415 \cdot (0,5^2 - 0,25^2) / 4$$

$$A = 0,147 \text{ [m}^2\text{]}$$

- Cálculo das componentes meridionais:

$$C_{m4} = C_{m5} = C_5 = Q / A = 0,65 / 0,147 = 4,42 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo das componentes tangenciais:

$$u_4 = u_5 = \pi \cdot D_m \cdot n / 60 = 3,1415 \cdot 0,375 \cdot 500 / 60 = 9,82 \text{ [m/s]}$$

- Triângulo de saída (retângulo  $C_5=Cm_5$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_5 &= Cm_5 / u_5 &> \operatorname{tg} \beta_5 &= 4,42 / 9,82 \\ \operatorname{tg} \beta_5 &= 0,45 &> \beta_5 &= 24,2^\circ \\ W_5^2 &= u_5^2 + C_5^2 &> W_5 &= 10,8 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

- Triângulo de entrada :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_4 &= Cm_4 / Wu_4 &> Wu_4 &= Cm_4 / \operatorname{tg} \beta_4 \\ Wu_4 &= 4,42 / \operatorname{tg} 75^\circ &> Wu_4 &= 1,18 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

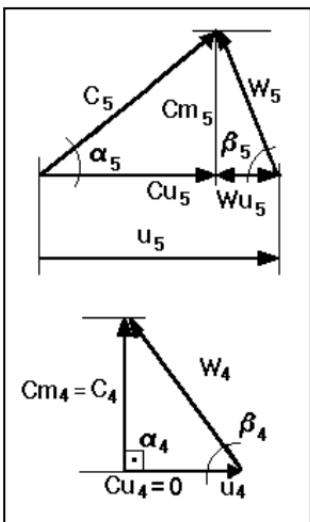
$$\begin{aligned} Cu_4 &= u_4 - Wu_4 &> Cu_4 &= 9,82 - 1,18 \\ &&> Cu_4 &= 8,64 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4^2 &= Cu_4^2 + Cm_4^2 &> C_4^2 &= 8,64^2 + 4,42^2 \\ &&> C_4 &= 9,7 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_4 &= Cm_4 / Cu_4 &> \alpha_4 &= 27,1^\circ \\ \operatorname{sen} \beta_4 &= Cm_4 / W_4 &> W_4 &= 4,57 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

Bomba radial - Determine os elementos dos triângulos de velocidade, na entrada e na saída, de uma bomba radial com os seguintes dados: i) diâmetro de entrada  $D_4 = 0,1 \text{ [m]}$ , ii) diâmetro de saída  $D_5 = 0,2 \text{ [m]}$ , iii) largura na entrada  $b_4 = 50 \text{ [mm]}$ , iv) largura na saída  $b_5 = 25 \text{ [mm]}$ , v) vazão  $= 150 \text{ [l/s]}$ , vi) rotação  $n = 1.800 \text{ [RPM]}$ , vii) ângulo construtivo na saída  $\beta_5 = 70^\circ$ .

Solução:



- Cálculo das áreas:

$$A_4 = \pi \cdot D_4 \cdot b_4 = 3,1415 \cdot 0,1 \cdot 0,050 = 0,0157 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_5 = \pi \cdot D_5 \cdot b_5 = 3,1415 \cdot 0,2 \cdot 0,025 = 0,0157 \text{ [m}^2\text{]}$$

- Cálculo das componentes meridionais:

$$A_4 = A_5 > Cm_4 = Cm_5 > Cm_4 = Q / A_4$$

$$C_4 = Cm_4 = 0,15 / 0,0157 = 9,55 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo das componentes tangenciais:

$$u_4 = \pi \cdot D_4 \cdot n / 60 = 3,1415 \cdot 0,1 \cdot 1.800 / 60 = 9,425 \text{ [m/s]}$$

$$u_5 = \pi \cdot D_5 \cdot n / 60 = 3,1415 \cdot 0,2 \cdot 1.800 / 60 = 18,85 \text{ [m/s]}$$

- Triângulo de entrada (retângulo  $C_4=Cm_4$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_4 &= Cm_4 / u_4 &> \operatorname{tg} \beta_4 &= 9,55 / 9,425 \\ \operatorname{tg} \beta_4 &= 1,01 &> \beta_4 &= 45,4^\circ \\ W_4^2 &= u_4^2 + C_4^2 &> W_4 &= 13,42 [\text{m/s}] \end{aligned}$$

- Triângulo de saída :

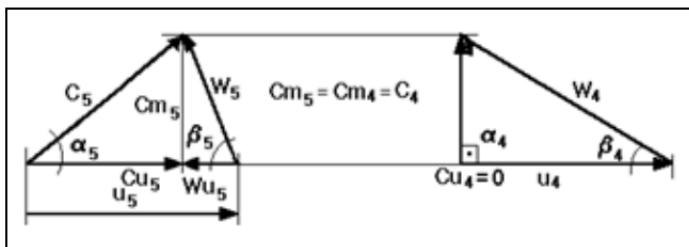
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_5 &= Cm_5 / Wu_5 &> Wu_5 &= Cm_5 / \operatorname{tg} \beta_5 \\ Wu_5 &= 9,55 / \operatorname{tg} 70^\circ &> Wu_5 &= 3,476 [\text{m/s}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cu_5 &= u_5 - Wu_5 &> Cu_5 &= 18,85 - 3,476 \\ &&> Cu_5 &= 15,374 [\text{m/s}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5^2 &= Cu_5^2 + Cm_5^2 &> C_5^2 &= 15,374^2 + 9,55^2 \\ &&> C_5 &= 18,1 [\text{m/s}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_5 &= Cm_5 / Cu_5 &> \alpha_5 &= 31,84^\circ \\ \operatorname{sen} \beta_5 &= Cm_5 / W_5 &> W_5 &= 10,16 [\text{m/s}] \end{aligned}$$

Bomba axial - Determine os elementos dos triângulos de velocidade, na entrada e na saída, de uma bomba axial com os seguintes dados: i) diâmetro externo  $D_e = 400$  [mm], ii) diâmetro interno  $D_i = 200$  [mm], iii) vazão =  $0,68$  [ $m^3/s$ ], iv) rotação  $n = 800$  [RPM], v) ângulo construtivo na saída  $\beta_5 = 50^\circ$ .



- Cálculo das áreas:

$$A_4 = A_5 = A = \pi \cdot (D_e^2 - D_i^2) / 4$$

$$A = 3,1415 \cdot (0,4^2 - 0,2^2) / 4 \quad A = 0,094 \text{ [m}^2\text{]}$$

- Cálculo das componentes meridionais:

$$Cm_4 = Cm_5 = C_4 = Q / A$$

$$Cm_4 = Cm_5 = C_4 = 0,68 / 0,094 = 7,23 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo das componentes tangenciais:

$$u = u_4 = u_5 = \pi \cdot D_m \cdot n / 60 = 3,1415 \cdot 0,3 \cdot 800 / 60 = 12,57 \text{ [m/s]}$$

- Triângulo de entrada (retângulo  $C_4=Cm_4$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_4 &= Cm_4 / u_4 &> \operatorname{tg} \beta_4 &= 7,23 / 12,57 \\ \operatorname{tg} \beta_4 &= 0,575 &> \beta_4 &= 30^\circ \\ W_4^2 &= u_4^2 + C_4^2 &> W_4 &= 14,5 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

- Triângulo de saída :

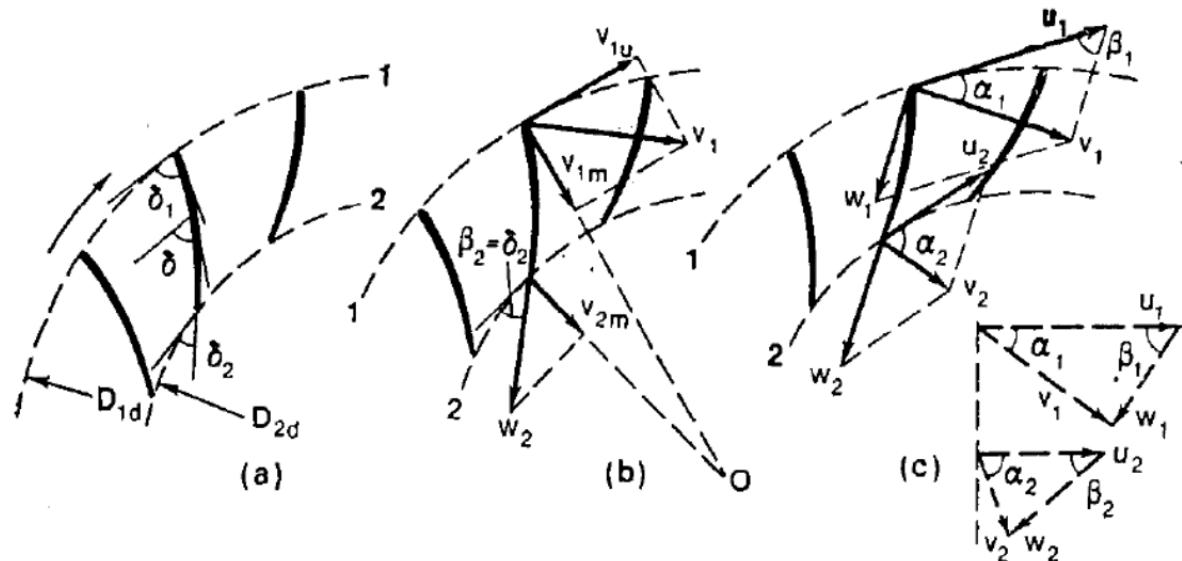
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_5 &= Cm_5 / Wu_5 &> Wu_5 &= Cm_5 / \operatorname{tg} \beta_5 \\ Wu_5 &= 7,23 / \operatorname{tg} 50^\circ &> Wu_5 &= 6,07 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cu_5 &= u_5 - Wu_5 &> Cu_5 &= 12,57 - 6,07 \\ &&> Cu_5 &= 6,50 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

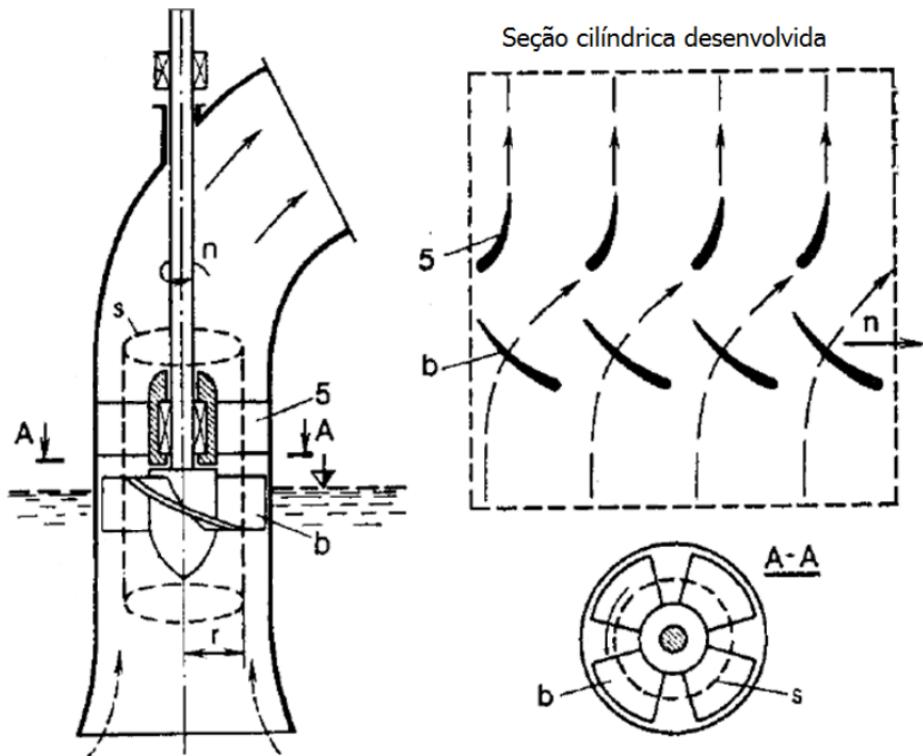
$$\begin{aligned} C_5^2 &= Cu_5^2 + Cm_5^2 &> C_5^2 &= 6,50^2 + 7,23^2 \\ &&> C_5 &= 9,72 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_5 &= Cm_5 / Cu_5 &> \alpha_5 &= 48,0^\circ \\ \operatorname{sen} \beta_5 &= Cm_5 / W_5 &> W_5 &= 9,43 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

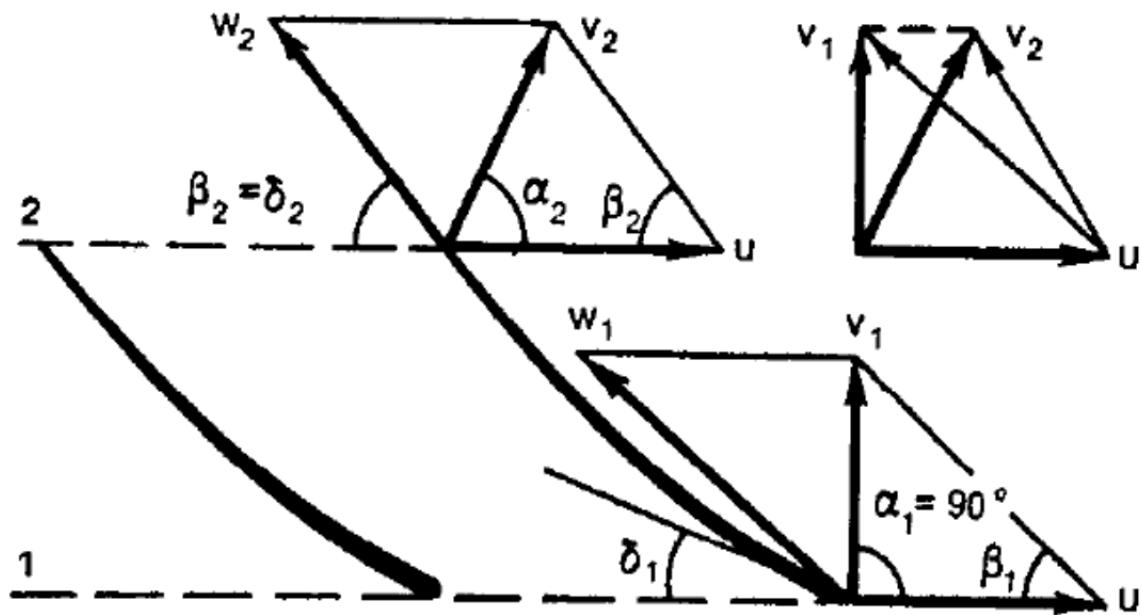
Triângulos de velocidade, na entrada e na saída, de uma turbina radial



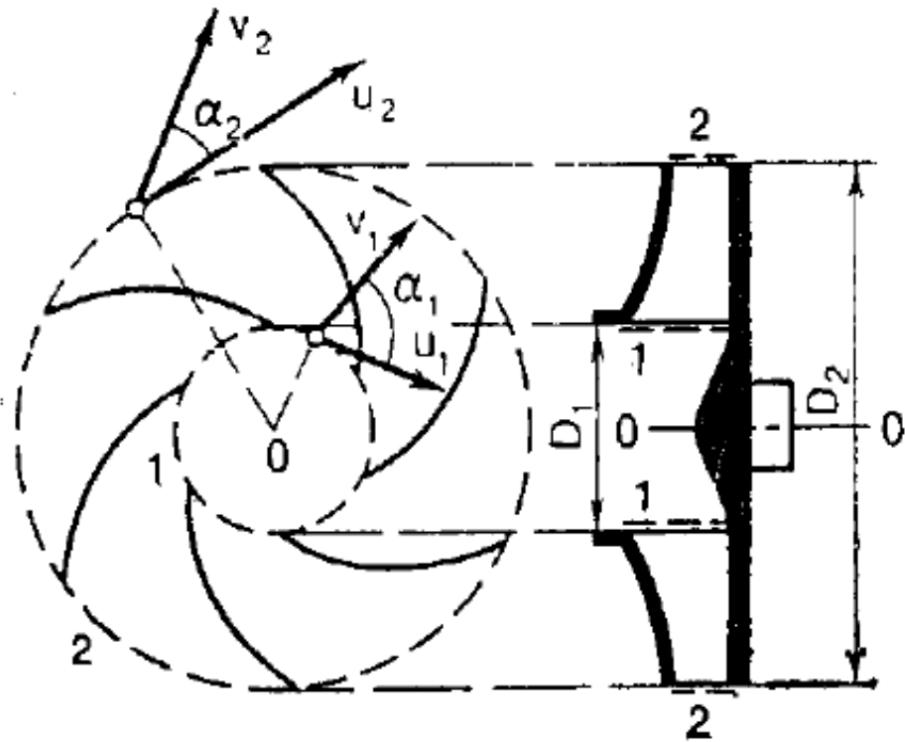
## Desenho e cortes de uma bomba axial



Triângulos de velocidade, na entrada e na saída, de uma bomba axial



Triângulos de velocidade, na entrada e na saída, de uma bomba radial



## **Capítulo 5 - Equação fundamental**

### **5.1) Equação Fundamental para máquinas hidráulicas**

A equação fundamental para máquinas hidráulicas é obtida através da aplicação da lei da conservação da quantidade de movimento angular entre as superfícies de controle de entrada e de saída do rotor, tomadas sobre as superfícies de revolução geradas pelas arestas de sucção e de pressão.

Considerando um fluido de viscosidade zero (fluido invíscido), incompressível e rotor de número infinito de pás de espessura infinitesimal, teremos um escoamento uniforme perfeitamente guiado pelas pás do rotor nas superfícies de entrada e de saída da máquina.

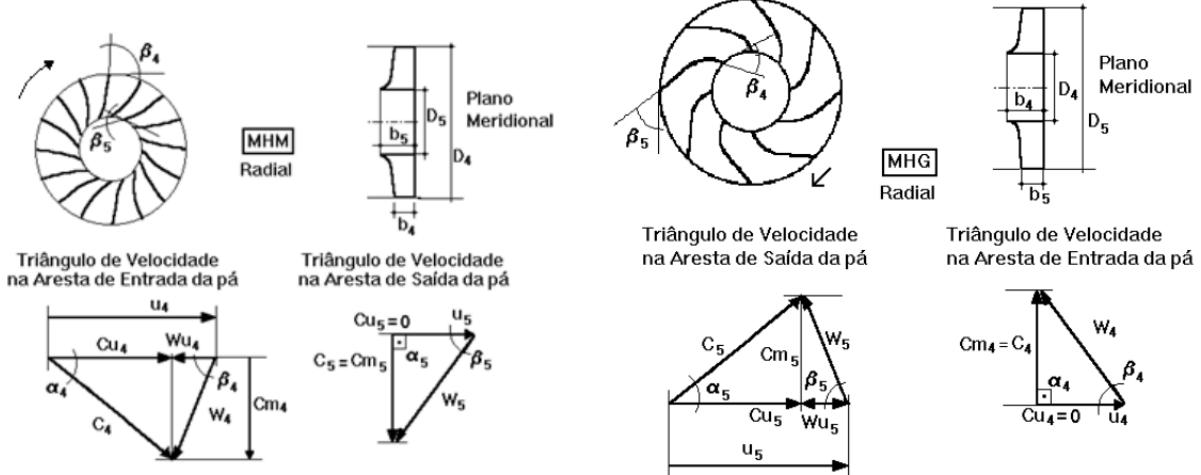
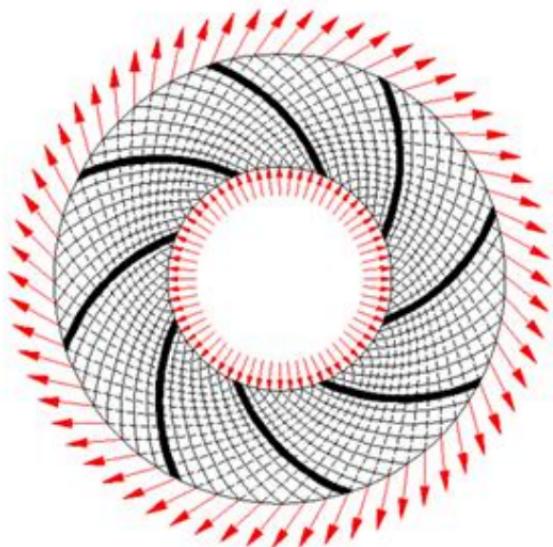


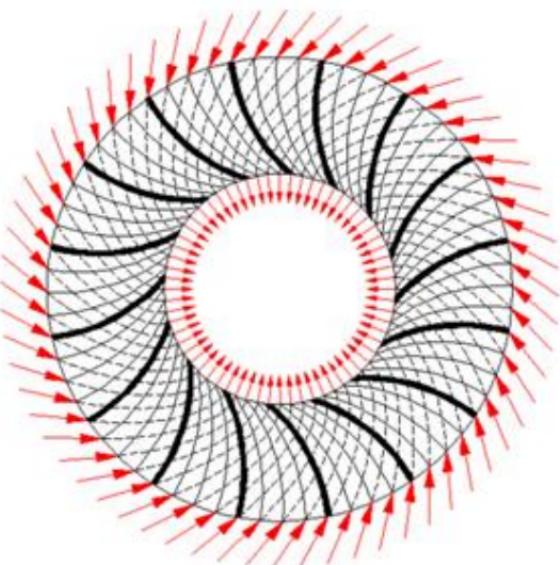
Fig. 5.1 - Turbina e bomba hidráulica radial

Aplicando a lei da conservação da quantidade de movimento angular em regime permanente e escoamento uniforme para o caso de máquinas radiais (os mesmos resultados serão válidos para máquinas axiais), cujos triângulos de velocidade na saída e na entrada são mostrados na fig 5.1, obteremos a equação fundamental para turbinas e bombas hidráulicas.

MHG radial  
(bombas e ventiladores radiais)



MHM radial  
(turbinas radiais)



## Lei da conservação da quantidade de movimento angular:

$$\left. \frac{d(m\vec{H})}{dt} \right)_{\text{Sist.}} = \vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_s + \int \vec{r} \times \vec{g} dm + \vec{T}_{\text{eixo}} = \frac{\partial \left( \int_{VC} \vec{r} \times \vec{C} \rho dV \right)}{\partial t} + \int_{SC} \vec{r} \times \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

Devido a simetria axial, tanto do campo de pressões em torno do rotor quanto da massa de fluido no rotor, os termos  $\vec{r} \times \vec{F}_s$  e  $\int \vec{r} \times \vec{g} dm$  são iguais a zero.

Ao considerarmos escoamento em regime permanente, o termo  $\partial \left( \int_{VC} \vec{r} \times \vec{C} \rho dV \right) / \partial t$  da lei da conservação da quantidade de movimento angular, também iguala-se a zero.

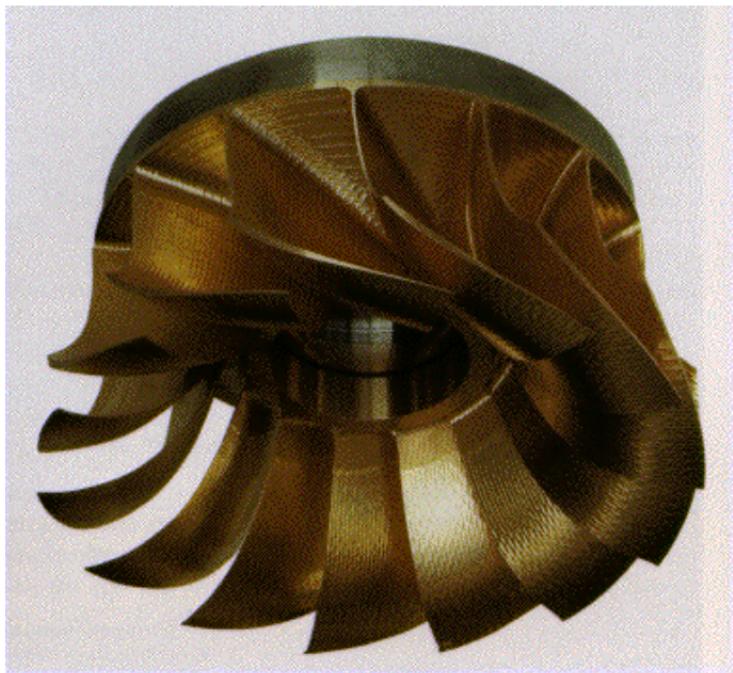
Assim a equação a ser aplicada se resume a:

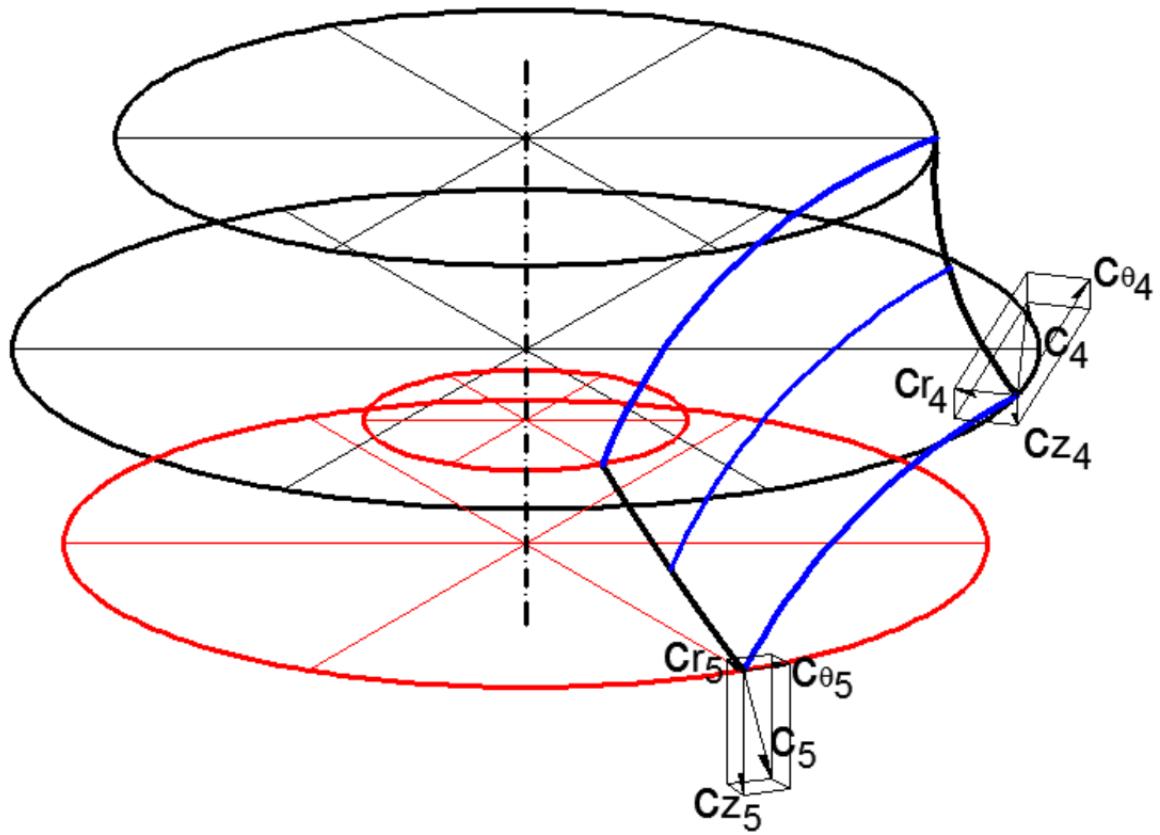
$$\vec{T}_{\text{eixo}} = \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{C}) \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

com a integral sendo avaliada nas seções de entrada e de saída do rotor e o termo  $\bar{T}_{\text{eixo}}$  igual ao torque externo aplicado no eixo do rotor.

Vamos desenvolver a equação acima para qualquer condição de funcionamento, que inclui o ponto de projeto mostrado

da fig. 5.1 , onde a componente tangencial na saída do rotor de turbinas e a componente tangencial na entrada de bombas é zero.





### 5.1.1) Momento devido às pás, $M_{pá-\infty}$ (condição ideal de escoamento no rotor)

Para o caso de turbina radial, considerando a componente tangencial na saída do rotor,  $Cu_5$ , na mesma direção da componente tangencial na entrada,  $Cu_4$  :

$$\vec{T}_{eixo} = \int_4 (r_4 Cu_4) \vec{z} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} + \int_5 (r_5 Cu_5) \vec{z} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

O produto escalar  $\vec{C} \cdot d\vec{A}$  será negativo na entrada (seção 4) e positivo na saída (seção 5), e as integrais são avaliadas considerando escoamento uniforme:

$$\vec{T}_{eixo} = -r_4 Cu_4 \vec{z} \rho Q + r_5 Cu_5 \vec{z} \rho Q$$

Reagrupando os termos obtém-se:

$$\vec{T}_{eixo} = \rho Q (r_4 Cu_4 - r_5 Cu_5) (-\vec{z}) \quad (r_4 Cu_4 > r_5 Cu_5)$$

O torque de eixo aplicado do meio externo no rotor representa um torque inverso ao sentido da rotação,  $\omega \vec{z}$ , e corresponde ao torque aplicado pelo gerador no eixo da turbina, o qual mantém o sistema em equilíbrio dinâmico rotativo.

Utilizando a nomenclatura usual para máquinas hidráulicas, explicitamos o momento (torque) sobre o rotor, considerando número infinito de pás de espessura infinitesimal, produzido pelo escoamento do fluido:

$$M_{pá-\infty} = \rho Q (r_4 C_{u_4} - r_5 C_{u_5})$$

Para o caso de bomba radial, considerando também a componente tangencial na saída do rotor,  $C_{u_5}$ , na mesma direção da componente tangencial na entrada,  $C_{u_4}$ :

$$\vec{T}_{eixo} = \int_4 (r_4 C_{u_4}) \vec{z} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} + \int_5 (r_5 C_{u_5}) \vec{z} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

Também no caso de bombas, o produto escalar  $\vec{C} \cdot d\vec{A}$  será negativo na entrada (seção 4) e positivo na saída (seção 5):

$$\vec{T}_{\text{eixo}} = -r_4 C_{u4} \vec{z} \rho Q + r_5 C_{u5} \vec{z} \rho Q$$

Agrupando (de modo diferente ao realizado para turbinas), obtém-se, para bombas:

$$\vec{T}_{\text{eixo}} = \rho Q (r_5 C_{u5} - r_4 C_{u4}) (\vec{z}) \quad (r_5 C_{u5} > r_4 C_{u4})$$

O torque de eixo aplicado do meio externo no rotor representa um torque no mesmo sentido da rotação da bomba,  $\omega \vec{z}$ , e corresponde ao torque aplicado pelo motor elétrico, o qual mantém o sistema em equilíbrio dinâmico rotativo. Utilizando a nomenclatura usual para máquinas hidráulicas, explicitamos o momento (torque) do rotor, considerando número infinito de pás de espessura infinitesimal, para produzir o escoamento do fluido:

$$M_{\text{pá}-\infty} = \rho Q (r_5 C_{u5} - r_4 C_{u4})$$

### 5.1.2) Equação fundamental - $H_{t-\infty}$ (condição ideal de escoamento no rotor)

Nas turbinas hidráulicas, a potência mecânica gerada nas pás e transferida para o eixo será igual a potência hidráulica fornecida pelo fluido (condição ideal de número infinito de pás):

$$M_{pá-\infty} \omega = \rho g Q H_{t-\infty}$$

ou

$$H_{t-\infty} = \frac{M_{pá-\infty} \omega}{\rho g Q}$$

sendo  $\omega$  a velocidade angular (rotação) em [rd/s]:

$$H_{t-\infty} = \frac{\rho Q (r_4 C_{u4} - r_5 C_{u5}) \omega}{\rho g Q} \quad \text{ou} \quad H_{t-\infty} = \frac{(r_4 C_{u4} - r_5 C_{u5}) \omega}{g}$$

Lembrando que  $\omega r_4 = u_4$  e  $\omega r_5 = u_5$ , obtém-se a equação fundamental para turbinas hidráulicas radiais, que pode ser usada para turbinas axiais sem nenhuma modificação:

$$H_{t-\infty} = \frac{1}{g} (u_4 C_{u_4} - u_5 C_{u_5})$$

MHM

$$Y_{t-\infty} = u_4 C_{u_4} - u_5 C_{u_5}$$

Da mesma maneira, obtém-se a equação fundamental para bombas hidráulicas:

$$H_{t-\infty} = \frac{1}{g} (u_5 C_{u_5} - u_4 C_{u_4})$$

MHG

$$Y_{t-\infty} = u_5 C_{u_5} - u_4 C_{u_4}$$

A equação fundamental é também chamada equação de Euler para máquinas hidráulicas.

### 5.1.3) Equação fundamental simplificada (ponto de projeto do rotor)

Para turbinas hidráulicas, no ponto de projeto, considera-se que  $Cu_5=0$  e  $\alpha_5=90^\circ$ , como pode ser observado no triângulo de velocidades na seção de saída apresentado fig. 5.1. No caso de bombas hidráulicas e ventiladores esta é uma condição natural na seção de entrada onde  $Cu_4=0$  e  $\alpha_4=90^\circ$ .

Nestas condições, tem-se a equação fundamental simplificada para turbinas hidráulicas, bombas e ventiladores será:

$$H_{t-\infty} = \frac{1}{g} u_4 Cu_4$$

MHM

$$Y_{t-\infty} = u_4 Cu_4$$

$$H_{t-\infty} = \frac{1}{g} u_5 Cu_5$$

MHG

$$Y_{t-\infty} = u_5 Cu_5$$

#### 5.1.4) Equação de Bernoulli para escoamento relativo

Da equação fundamental pode-se obter a equação de Bernoulli para fluxo relativo, que é uma outra forma da equação fundamental. Sendo a energia absorvida por unidade de massa igual a diferença de energia na entrada e na saída no caso de turbinas hidráulicas, tem-se:

$$gH_{t-\infty} = e_4 - e_5$$

Desprezando a energia potencial, obtém-se:

$$gH_{t-\infty} = \left( \frac{p_4}{\rho} + \frac{C_4^2}{2} \right) - \left( \frac{p_5}{\rho} + \frac{C_5^2}{2} \right) = u_4 Cu_4 - u_5 Cu_5$$

Modificando a equação, vem:

$$gH_{t-\infty} = \left( \frac{p_4}{\rho} - \frac{p_5}{\rho} \right) + \left( \frac{C_4^2}{2} - \frac{C_5^2}{2} \right) = u_4 Cu_4 - u_5 Cu_5$$

$$\frac{p_4 - p_5}{\rho} = \left( u_4 C u_4 - \frac{C_4^2}{2} \right) - \left( u_5 C u_5 - \frac{C_5^2}{2} \right)$$

MHM

$$\frac{p_5 - p_4}{\rho} = \left( u_5 C u_5 - \frac{C_5^2}{2} \right) - \left( u_4 C u_4 - \frac{C_4^2}{2} \right)$$

MHG

De um triângulo de velocidade tem-se que:

$$W^2 = Cm^2 + (u - Cu)^2$$

$$W^2 = Cm^2 + u^2 - 2uCu + Cu^2$$

$$C^2 = Cm^2 + Cu^2$$

$$W^2 - u^2 = C^2 - 2uCu \quad \therefore \quad \frac{W^2 - u^2}{2} = \frac{C^2}{2} - uCu \quad \therefore \quad uCu - \frac{C^2}{2} = \frac{u^2 - W^2}{2}$$

Logo:

$$\frac{p_4 - p_5}{\rho} = \left( \frac{u_4^2 - W_4^2}{2} \right) - \left( \frac{u_5^2 - W_5^2}{2} \right)$$

Ou:

$$\frac{p_4 - p_5}{\rho} = \left( \frac{u_4^2 - u_5^2}{2} \right) + \left( \frac{W_5^2 - W_4^2}{2} \right)$$

MHM

$$\frac{p_5 - p_4}{\rho} = \left( \frac{u_5^2 - u_4^2}{2} \right) + \left( \frac{W_4^2 - W_5^2}{2} \right)$$

MHG

Com uma destas equações pode-se determinar a variação de pressão entre entrada e saída do rotor uma vez conhecidas as outras condições.

A outra forma mencionada da equação fundamental será então:

$$gH_{t-\infty} = Y_{pá-\infty} = \left( \frac{C_4^2 - C_5^2}{2} \right) + \left( \frac{u_4^2 - u_5^2}{2} \right) + \left( \frac{W_5^2 - W_4^2}{2} \right)$$

MHM

$$gH_{t-\infty} = Y_{pá-\infty} = \left( \frac{C_5^2 - C_4^2}{2} \right) + \left( \frac{u_5^2 - u_4^2}{2} \right) + \left( \frac{W_4^2 - W_5^2}{2} \right)$$

MHG

## 5.2) Grau de Reação

Comparando as equações acima, define-se para turbinas hidráulicas, altura de pressão estática e altura de pressão dinâmica, respectivamente:

$$\Delta H_{est} = \frac{1}{g} \left( \frac{p_4 - p_5}{\rho} \right)$$

e

$$\Delta H_{din} = \frac{1}{g} \left( \frac{C_4^2 - C_5^2}{2} \right)$$

O grau de reação da máquina é definido como sendo a relação entre a altura de pressão estática e a altura total teórica:

$$\tau = \frac{\Delta H_{est}}{H_{t-\infty}} = \frac{H_{t-\infty} - \Delta H_{din}}{H_{t-\infty}}$$

Usando a equação fundamental simplificada temos:

$$\tau = 1 - \frac{C_4^2 - Cm_5^2}{2 u_4 C u_4}$$

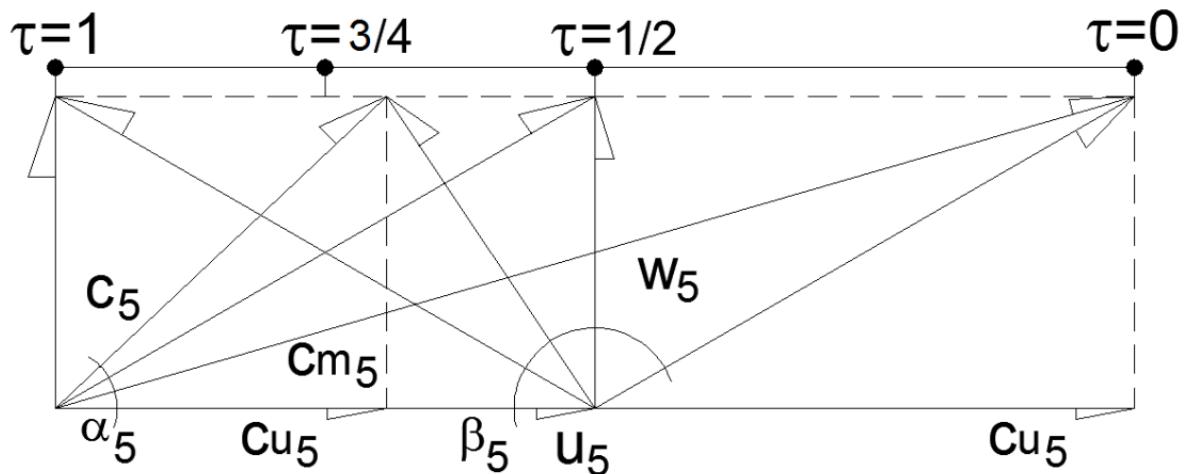
Se fixarmos a condição,  $Cm_4=Cm_5$ , obtemos o grau de reação simplificado:

$$\tau = 1 - \frac{Cu_4}{2u_4}$$

MHM

$$\tau = 1 - \frac{Cu_5}{2u_5}$$

MHG



### 5.3) Número finito de pás com espessura "s" constante

A espessura "s" das pás provoca um estrangulamento do fluxo na entrada do rotor e uma expansão na saída, alterando a componente  $C_m$  dos triângulos de velocidade na entrada e na saída.

A figura mostra uma MHG radial com espessura de pá constante "s".

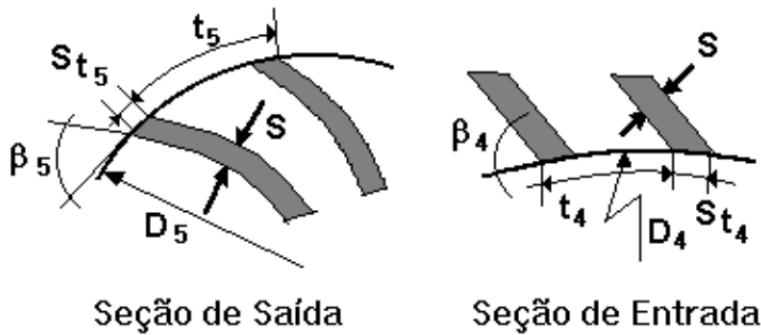


Fig. 5.2 - Pás com espessura constante (MHG)

Calcularemos a seguir a variação da componente  $C_m$  em função da espessura na entrada e na saída da máquina. O comprimento entre dois pontos equivalentes de duas pás será, para a entrada e saída, respectivamente:

$$t_4 = \frac{\pi D_4}{z}$$

e

$$t_5 = \frac{\pi D_5}{z}$$

onde  $z$  é o número de pás.

### 5.3.1) Entrada (sucção da bomba)

Sendo a vazão igual na seção 3 imediatamente antes da seção 4, temos:

$$Q = Cm_3 A_3 = Cm_4 A_4$$

A área  $A_3$  será maior que  $A_4$  por um fator de estrangulamento  $f_3$  ( $f_3 < 1$ ):

$$A_4 = A_3 \cdot f_3$$

O fator de estrangulamento dependerá do diâmetro  $D_4$ , da espessura  $S_4$ , do número de pás  $z$ , e do ângulo construtivo  $\beta_4$ :

$$f_3 = \frac{t_4 - S t_4}{t_4}$$

A variável  $St_4$  é espessura da pá na direção perpendicular ao escoamento:

$$St_4 = \frac{S_4}{\sin \beta_4}$$

Consequentemente,

$$Cm_3 = Cm_4 f_3 \quad (Cm_4 > Cm_3).$$

### 5.3.2) Saída (pressão da bomba)

Sendo a vazão igual na seção 6 imediatamente após a seção 5, temos:

$$Q = Cm_5 A_5 = Cm_6 A_6$$

A área  $A_6$  será maior que  $A_5$  de um fator de estrangulamento  $f_6$  ( $f_6 < 1$ ):

$$A_5 = A_6 \cdot f_6$$

O fator de estrangulamento dependerá do diâmetro  $D_5$ , da espessura  $S_5$ , do número de pás  $z$ , e do ângulo construtivo  $\beta_5$ .

$$f_6 = \frac{t_5 - St_5}{t_5}$$

A variável  $St_5$  é espessura da pá na direção perpendicular ao escoamento:

$$St_5 = \frac{S_5}{\sin \beta_5}$$

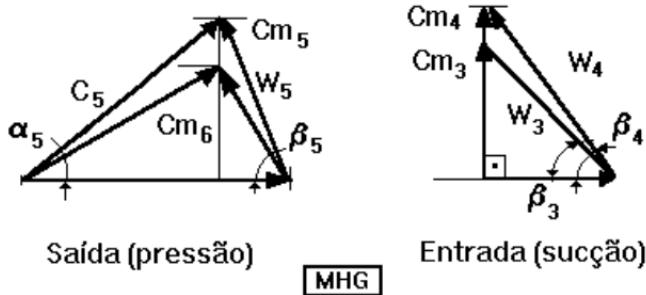


Fig. 5.3 - Efeito na espessura sobre os triângulos de velocidade (MHG)

Consequentemente,

$$Cm_6 = Cm_5 f_6 \quad (Cm_5 > Cm_6).$$

A figura mostra os triângulos de velocidade levando-se em conta o efeito da espessura das pás na entrada e na saída de uma MHG.

## **5.4) Escoamento real com número finito de pás**

Ao considerarmos o escoamento real de máquinas hidráulicas com um número finito de pás, ocorrerão efeitos sobre o fluxo no rotor, além da aceleração devido a espessura das pás, que modificarão a altura de queda disponível para uma máquina motora ou a altura de pressão ou diferença de pressão fornecida por uma máquina geradora.

Foi visto que o escoamento relativo em uma máquina hidráulica motora (turbinas é acelerado) e que o escoamento relativo em uma máquina hidráulica geradora (bombas e ventiladores) é desacelerado.

Sabe-se também, pelos estudos de mecânica dos fluidos, que os escoamentos desacelerados podem apresentar descolamento da camada limite, devido ao fato que a geometria é geralmente um difusor (apresentam gradiente adverso de pressão).

Em contrapartida, os escoamentos acelerados geralmente não apresentam descolamento da camada limite, sendo sua geometria caracterizada por injetores.

$$Y_{pá-\infty} = gH_{t-\infty} = u_5Cu_5 - u_4Cu_4$$

MHG

Para MHG (bombas e ventiladores), o trabalho específico fornecido ao fluido (ou altura de elevação no rotor vezes a aceleração da gravidade), considerando um número finito de pás será menor do que na condição de número infinito de pás pois o escoamento não será perfeitamente guiado na saída e a componente real  $Cu_6$  será menor do que a componente teórica  $Cu_5$ :

$$Y_{pá} = gH_t = u_5Cu_6 - u_4Cu_4 < gH_{t-\infty} = Y_{pá-\infty}$$

MHG

$$Y_{pá-\infty} = gH_{t-\infty} = u_4Cu_4 - u_5Cu_5$$

MHM

Para MHM , o trabalho específico produzido (ou a altura de queda no rotor vezes a aceleração da gravidade), considerando número finito de pás pode ser considerado igual ao trabalho específico para número infinito de pás, pois o escoamento acelerado em turbinas permite um direcionamento melhor do escoamento na saída:

$$Y_{pá} = gH_t = u_4Cu_4 - u_5Cu_6 \cong gH_{t-\infty} = Y_{pá-\infty}$$

MHM

Para MHG esta diferença pode ser avaliada por coeficientes empíricos que dependem da geometria do rotor, como veremos no cap. 13, para o caso de bombas hidráulicas. No caso de MHM, considera-se que somente através do uso de programas computacionais será possível calcular o escoamento mais próximo da realidade em uma turbina com número finitos de pás.

Na análise do escoamento no rotor não se considerou o efeito do atrito viscoso, utilizou-se somente o conceito de fluido ideal.

Um dos efeitos da viscosidade do fluido é a formação de espaços "mortos" na saída das pás do lado de baixa pressão da pá, principalmente quando a máquina trabalha fora do ponto nominal.

Este efeito altera os triângulos de velocidade na região após a saída do rotor.

## 5.5) Perdas por Choque

Até o presente momento na análise de máquinas hidráulicas, as grandezas e rendimentos são relativas ao ponto nominal, ou ponto de projeto, onde se consideram nulas as perdas por choque na entrada, que existem quando a máquina trabalha com grandezas diferentes das calculadas para o ponto de projeto.

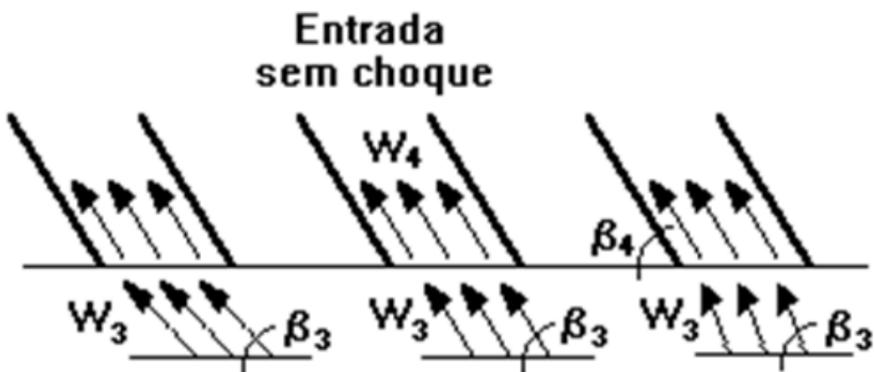


Fig. 5.5 - Grade de pás com e sem choque na entrada

Perdas por choque ocorrem no momento em que o escoamento na entrada possui uma direção diferente do ângulo construtivo  $\beta$  da pás.

Na figura 5.5 temos uma grade construída com ângulo  $\beta_4$  com pás de espessura fina para se desconsiderar o efeito de estrangulamento no fluxo.

No caso de entrada sem choque  $\beta_4 = \beta_3$  e  $W_4 = W_3$ . A perda por choque pode ser quantificada (na ausência de tratamentos mais complexos) pela equação:

$$Z_{st} = \varphi \frac{W_s^2}{2}$$

onde  $W_s$  é a diferença vetorial das velocidades  $W_4$  e  $W_3$ . O choque pode ser de aceleração ou de retardamento do fluxo, diferença que é percebida nos triângulos de velocidades para bombas (ou ventiladores) e turbinas de reação quando se altera rotação ou vazão.

## 5.6) Aproximação para trabalho específico nas pás

Para a análise do escoamento em um rotor de MH real devemos considerar as alterações dos desvios devido ao número finito de pás. No caso de turbinas estas alterações serão consideradas desprezíveis no ponto de projeto. Isto torna as alturas real e para número infinito de pás praticamente iguais, porém menores que a altura de queda sobre a turbina:

$$gH_t = gH_{t-\infty} = u_4 C_{u_4} < gH \quad \text{MHM}$$

Em rotores com pás distanciadas deve-se considerar no projeto um sobreângulo, que corrigirá a falta de direcionamento do escoamento pelas pás. Nos projetos preliminares pode-se desprezar o efeito da espessura das pás.

Nas bombas e ventiladores, o escoamento desacelerado e não guiado na saída do rotor diminui significativamente a altura teórica, provocando uma grande redução da altura de elevação fornecida pelos cálculos com número infinito de pás. Somado a este decréscimo de altura de elevação ainda existem as perdas de pressão no escoamento devido ao atrito viscoso:

$$H < H_t < H_{t \rightarrow \infty}$$

sendo:

$$gH_t = u_5 C_{u_6} < gH_{t \rightarrow \infty} = u_5 C_{u_5} \quad \text{MHG}$$

Para cálculos de bombas, axiais ou radiais, a obtenção de  $H_t$  é feita em função de um fator de correção "a".

#### 5.6.1) Fator de correção para bombas hidráulicas

É um método aproximado, proposto por C. Pfleiderer, que considera uma distribuição regular de pressão nas pás, e relaciona o trabalho específico (ou a altura de elevação) para número infinito de pás com o trabalho específico para número finito de pás através de um coeficiente de redução de potência:

$$Y_{pá \rightarrow \infty} = Y_{pá} (1 + p) \quad \text{ou} \quad gH_{t \rightarrow \infty} = gH_t (1 + p)$$

$$H_{t \rightarrow \infty} = H_t a$$

### 5.6.2) Coeficiente de velocidade para ventiladores

É normalmente utilizado um método simples, proposto por Stodola, para determinação do coeficiente de velocidade para ventiladores, coeficiente este que relaciona a diferença de pressão para um número finito de pás e a diferença de pressão calculada para um número infinito de pás:

$$\varepsilon = \frac{\Delta p_{tot}}{\Delta p_{tot-\infty}}$$

## 5.7) Exemplos de cálculos

### 5.7.1) Número infinito de pás

Turbina radial: Utilizando os resultados dos triângulos de velocidade para turbina radial do item 4.6, calcule a altura de queda teórica para número infinito de pás,  $H_{t \rightarrow \infty}$ , a potência de eixo,  $P_e$ , a diferença de pressão entre entrada e saída da turbina e seu grau de reação, considerando o rendimento mecânico igual a 95% e o rendimento volumétrico igual a 100%.

$$gH_{t \rightarrow \infty} = (u_4 C_{u4} - u_5 C_{u5}) \quad \text{mas como} \quad C_{u5} = 0 \quad gH_{t \rightarrow \infty} = u_4 C_{u4}$$

$$gH_{t \rightarrow \infty} = 26,7 \times 26,3 > \boxed{H_{t \rightarrow \infty} = 71,6 \text{ [m]}}$$

$$P_h = \rho g Q H$$

$$\eta_t = P_e / P_h$$

$$\eta_h = H_{t \rightarrow \infty} / H$$

$$\eta_t = P_e \eta_h / \rho g Q H_{t \rightarrow \infty}$$

$$\eta_m = P_e / \rho g Q H_{t \rightarrow \infty}$$

$$P_e = \eta_m \rho g Q H_{t \rightarrow \infty}$$

$$P_e = 0,95 \times 9.780 \times 12,5 \times 71,6 = 8.315.445 \text{ [W]}$$

$$\boxed{P_e = 8,3 \text{ [MW]}}$$

$$p_4 - p_5 = \frac{\rho}{2} [(u_4^2 - u_5^2) + (W_5^2 - W_4^2)] = 499 [(26,7^2 - 9,42^2) + (10,4^2 - 4,7^2)]$$

$$p_4 - p_5 = 499 [624,1 + 86,1] = 499 \times 710,2$$

$$\boxed{p_4 - p_5 = 354.390 \text{ [N/m}^2\text{]}}$$

$$\tau = 1 - \frac{C_{u4}}{2u_4} = \tau = 1 - \frac{26,3}{2 \times 26,7} = 0,51$$

Turbina axial: Utilizando os resultados dos triângulos de velocidade para turbina axial do item 4.6, calcule a altura de queda teórica para número infinito de pás,  $H_{t-\infty}$ , a potência efetiva,  $P_e$ , considerando o rendimento mecânico de 95%, a diferença de pressão entre entrada e saída da turbina e seu grau de reação.

$$gH_{t-\infty} = u_4 C_u \quad (\text{equação fundamental simplificada})$$

$$gH_{t-\infty} = 9,82 \times 8,64$$

$$H_{t-\infty} = 8,65 \text{ [m]}$$

$$P_e = \eta_m \rho g Q H_{t-\infty}$$

$$P_e = 0,95 \times 9.780 \times 0,65 \times 8,65 = 52.239 \text{ [W]}$$

$$P_e = 52,3 \text{ [kW]}$$

$$p_4 - p_5 = \frac{\rho}{2} [(u_4^2 - u_5^2) + (W_5^2 - W_4^2)] = 499 [(9,82^2 - 9,82^2) + (10,76^2 - 4,57^2)]$$

$$p_4 - p_5 = 499 [0 + 94,9]$$

$$p_4 - p_5 = 47.355 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$\tau = 1 - \frac{C_u}{2 u_4} = \tau = 1 - \frac{8,64}{2 \times 9,82} = 0,56$$

Bomba radial: Utilizando os resultados dos triângulos de velocidade para a bomba radial do item 4.6, calcule a altura de elevação teórica para número infinito de pás,  $H_{t \rightarrow \infty}$ , a potência de eixo,  $P_e$ , a diferença de pressão entre entrada e saída da bomba e seu grau de reação, considerando o rendimento mecânico igual a 85%.

$$gH_{t \rightarrow \infty} = (u_5 C_{u_5} - u_4 C_{u_4}) \quad \text{mas como } C_{u_4} = 0 \quad gH_{t \rightarrow \infty} = u_5 C_{u_5}$$

$$gH_{t \rightarrow \infty} = 18,85 \times 15,374 \quad > \quad H_{t \rightarrow \infty} = 29,6 \text{ [m]}$$

$$P_h = \rho g Q H \quad \eta_t = P_h / P_e \quad \eta_h = H / H_{t \rightarrow \infty}$$

$$\eta_t = \rho g Q H_{t \rightarrow \infty} \eta_h / P_e \quad \eta_m = \rho g Q H_{t \rightarrow \infty} / P_e P_e = \rho g Q H_{t \rightarrow \infty} / \eta_m$$

$$P_e = 9.780 \times 0,15 \times 29,6 / 0,85 = 51.086 \text{ [W]} \quad P_e = 51,1 \text{ [kW]}$$

$$p_5 - p_4 = \frac{\rho}{2} [(u_5^2 - u_4^2) + (W_4^2 - W_5^2)] = 499[(18,85^2 - 9,425^2) + (13,42^2 - 10,16^2)]$$

$$p_5 - p_4 = 499 [ 266,49 + 76,87 ] = 499 \times 343,36 \quad p_5 - p_4 = 171.337 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$\tau = 1 - \frac{C_{u_5}}{2 u_5} = \tau = 1 - \frac{15,374}{2 \times 18,85} = 0,59$$

Bomba axial: Utilizando os resultados dos triângulos de velocidade para a bomba axial do item 4.6, calcule a altura de elevação teórica para número infinito de pás,  $H_{t \rightarrow \infty}$ , a potência de eixo,  $P_e$ , a diferença de pressão entre entrada e saída da bomba e seu grau de reação, considerando o rendimento mecânico de 85%.

$$gH_{t \rightarrow \infty} = (u_5 C_{u_5} - u_4 C_{u_4}) \quad \text{mas como} \quad C_{u_4} = 0 \quad gH_{t \rightarrow \infty} = u_5 C_{u_5}$$

$$gH_{t \rightarrow \infty} = 12,57 \times 6,50 \quad > \quad H_{t \rightarrow \infty} = 8,43 \text{ [m]}$$

$$P_e = \rho g Q H_{t \rightarrow \infty} / \eta_m$$

$$P_e = 9.780 \times 0,68 \times 8,43 / 0,85 = 65.956 \text{ [W]} \quad P_e = 65,9 \text{ [kW]}$$

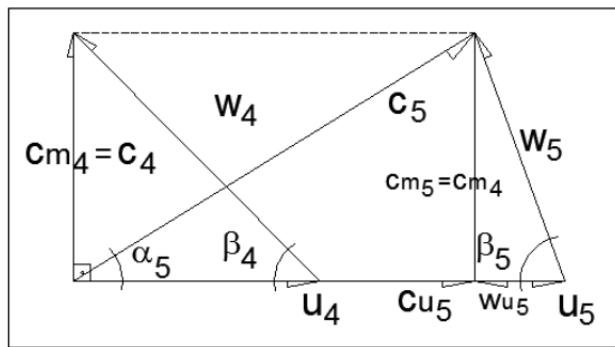
$$p_5 - p_4 = \frac{\rho}{2} [(u_5^2 - u_4^2) + (W_4^2 - W_5^2)] = 499 [(12,57^2 - 12,57^2) + (14,5^2 - 9,43^2)]$$

$$p_5 - p_4 = 499 [0 + 121,32] = 499 \times 121,32 \quad p_5 - p_4 = 60.539 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$\tau = 1 - \frac{C_{u_5}}{2 u_5} = \tau = 1 - \frac{6,50}{2 \times 12,57} = 0,74$$

### 5.7.2) Número finito de pás

Bomba radial: Utilizando os resultados dos triângulos de velocidade para a bomba radial do item 4.6, recalcule os triângulos de velocidade considerando que o rotor possui 8 pás de espessura constante de 5 [mm].



- Condição número infinito de pás:  
 $C_4 = C_{m3} = C_{m4} = C_{m5} = C_{m6} =$   
 $C_4 = 0,15 / 0,0157 = 9,55 \text{ [m/s]}$
- Condição número finito de pás:  
 $C_{m3} = C_{m6} = 9,55 \text{ [m/s]}$

Fig. 5.6 - Triângulos na condição de número infinito de pás

- Cálculo do fator de estrangulamento na entrada,  $f_3$ , utilizando o ângulo construtivo na entrada calculado para a condição de número infinito de pás:

$$t_4 = \frac{\pi D_4}{z}$$

$$t_4 = \frac{\pi \times 0,1}{8} = 0,0393 \text{ [m]}$$

$$St_4 = \frac{S_4}{\sin \beta_4}$$

$$St_4 = \frac{5}{\sin 45,4^\circ} = 7 \text{ [mm]}$$

$$f_3 = \frac{t_4 - St_4}{t_4}$$

$$f_3 = \frac{39,3 - 7}{39,3} = 0,82$$

- Cálculo do fator de estrangulamento na saída,  $f_6$ , utilizando o ângulo construtivo na saída fixado para a condição de número infinito de pás:

$$t_5 = \frac{\pi D_5}{z}$$

$$t_5 = \frac{\pi \times 0,2}{8} = 0,0785 \text{ [m]}$$

$$St_5 = \frac{S_5}{\sin \beta_5}$$

$$St_5 = \frac{5}{\sin 70^\circ} = 5,3 \text{ [mm]}$$

$$f_6 = \frac{t_5 - St_5}{t_5}$$

$$f_6 = \frac{78,5 - 5,3}{78,5} = 0,93$$

- Cálculo das velocidades meridionais internas do rotor com número finito de pás, na entrada e na saída, a partir das velocidades meridionais externas.

$$Cm_3 = Cm_4 f_3 \quad Cm_4 = Cm_3 / f_3$$

$$Cm_6 = Cm_5 f_6 \quad Cm_5 = Cm_6 / f_6$$

$$Cm_4 = 9,55 / 0,82 = 11,62 \text{ [m/s]}$$

$$Cm_5 = 9,55 / 0,93 = 10,27 \text{ [m/s]}$$

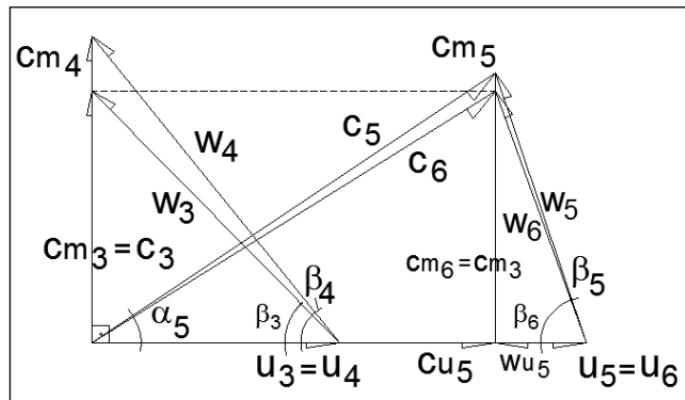
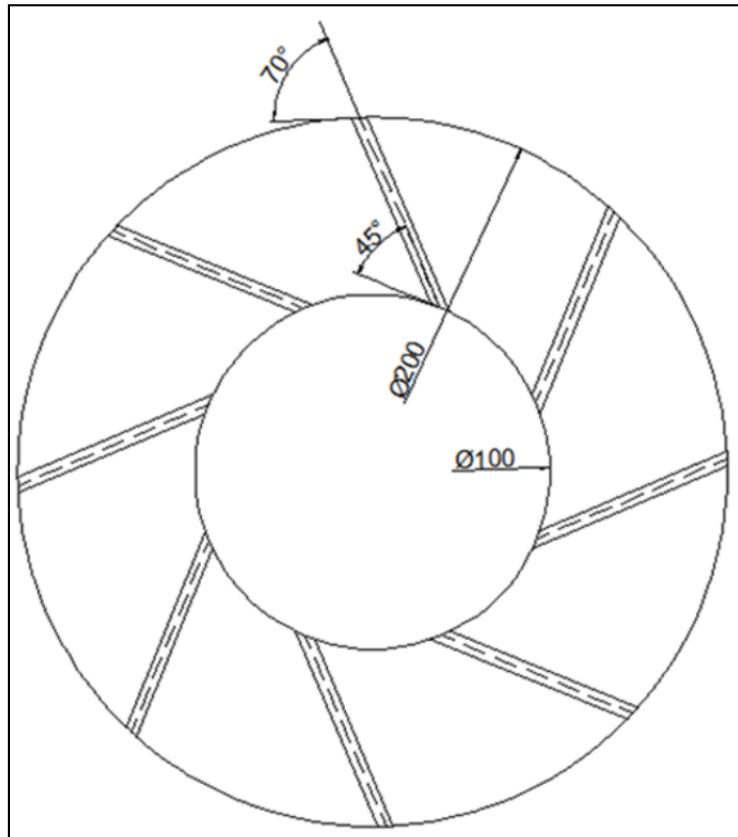


Fig. 5.6 - Triângulos na condição de número finito de pás (correção da velocidade meridional)

- Cálculo do ângulo construtivo corrigido na entrada:

$$\operatorname{tg} \beta_4 = \frac{Cm_4}{u_4} = 11,62 / 9,42 \quad \beta_4 = 51^\circ \quad \boxed{\beta_3 = 45,4^\circ}$$



Turbina axial: Calcule os ângulos  $\beta_3$ ,  $\alpha_3$  e  $\beta_4$  de uma turbina axial cuja vazão é 670 [l/s], altura de queda 16 [m] com os seguintes dados: i) diâmetro externo: 0,56 [m], ii) diâmetro interno: 0,24 [m], iii) rotação = 600 [RPM], iv) espessura das pás na entrada: 7 [mm], v) rendimento hidráulico: 88% e vi) número de pás: 16. (Despreze a espessura das pás na saída)

- Cálculo do diâmetro médio:

$$D_m = (D_{ext} + D_{int}) / 2 = (0,56 + 0,24) / 2 \\ D_m = 0,4 \text{ [m]}$$

- Cálculo das áreas:

$$A_3 = A_5 = A_6 = \pi \cdot (D_{ext}^2 - D_{int}^2) / 4 = \pi \times (0,56^2 - 0,24^2) / 4 \\ A = 0,201 \text{ [m}^2\text{]}$$

- Cálculo das componentes meridionais:

$$Cm_3 = Cm_5 = Cm_6 = C_6 = Q / A = 0,67 / 0,201 = 3,33 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo das componentes tangenciais:

$$u = \pi \cdot D_m \cdot n / 60 = \pi \times 0,4 \times 600 / 60 = 12,6 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo de  $Cu_3$  ( $= Cu_4$ ) a partir de  $H$  e de  $Wu_3$  :

$$gH_{t \rightarrow \infty} = uCu_3$$

$$H_{t \rightarrow \infty} = H_t = \eta_h \cdot H$$

$$g \cdot \eta_h \cdot H = 12,6 \times Cu_3$$

$$138 = 12,6 \times Cu_3$$

$$Cu_3 = 11,0 \text{ [m/s]}$$

$$Wu_3 = u - Cu_3$$

$$Wu_3 = 12,6 - 11$$

$$Wu_3 = 1,6 \text{ [m/s]}$$

- Triângulo de entrada externo (ponto 3) :

$$\tan \beta_3 = Cm_3 / Wu_3$$

$$\beta_3 = \tan^{-1} (3,33 / 1,6)$$

$$\beta_3 = 64,3^\circ$$

$$\tan \alpha_3 = Cm_3 / Cu_3$$

$$\alpha_3 = \tan^{-1} (3,33 / 11,0)$$

$$\alpha_3 = 16,8^\circ$$

- Cálculo do fator de estrangulamento na entrada,  $f_3$ , utilizando o ângulo do escoamento na entrada:

$$t_4 = \frac{\pi D_m}{z}$$

$$St_4 = \frac{S_4}{\sin \beta_4}$$

$$f_3 = \frac{t_4 - St_4}{t_4}$$

$$t_4 = \frac{\pi \times 400}{16} = 78,5 \text{ [mm]}$$

$$St_4 = \frac{7}{\sin 64,3^\circ} = 7,8 \text{ [mm]}$$

$$f_3 = \frac{78,5 - 7,8}{78,5} = 0,9$$

- Triângulo de entrada interno (ponto 4) :

$$Cm_3 = Cm_4 f_3$$

$$Cm_4 = Cm_3 / f_3$$

$$Cm_4 = 3,33 / 0,9$$

$$Cm_4 = 3,7 \text{ [m/s]}$$

$$\tan \beta_4 = Cm_4 / W_{u3}$$

$$\beta_4 = \tan^{-1} (3,7 / 1,6)$$

$$\boxed{\beta_4 = 66,6^\circ}$$

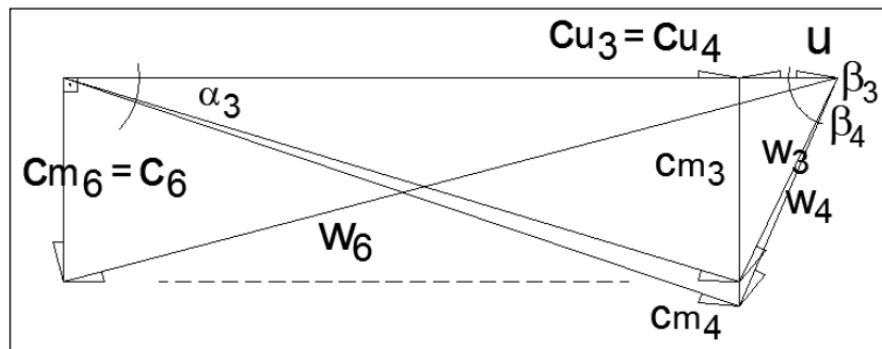


Fig. 5.7 - Triângulos de turbina axial na condição de número finito de pás

Ventilador radial: Determinar a rotação necessária, bem como o ângulo construtivo na entrada para que um ventilador radial possa fornecer  $\Delta p = 5.000 \text{ [N/m}^2\text{]}$  com uma vazão igual a  $3,27 \text{ [m}^3/\text{s}]$  com os seguintes dados: i)  $D_5 = 300 \text{ [mm]}$ , ii)  $D_4 = 220 \text{ [mm]}$ , iii)  $b_4 = b_5 = 250 \text{ [mm]}$ , iv)  $\beta_5 = 120^\circ$ , v)  $Z = 32$  pás, vi)  $S = 3 \text{ [mm]}$ , vii)  $\eta_h = 60 \%$  e viii)  $\varepsilon = 0,8$ . (Use  $\rho=1,2 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ )

- Cálculo das áreas externas ao rotor:

$$A_3 = \pi \cdot D_4 \cdot b_4 = \pi \times 0,22 \times 0,25 = 0,173 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_6 = \pi \cdot D_5 \cdot b_5 = \pi \times 0,30 \times 0,25 = 0,236 \text{ [m}^2\text{]}$$

- Cálculo das componentes meridionais externas :

$$Cm_3 = Q / A_3 = 3,27 / 0,173 = 18,90 \text{ [m/s]}$$

$$Cm_6 = Q / A_6 = 3,27 / 0,236 = 13,88 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo do fator de estrangulamento,  $f_6$ , utilizando o ângulo construtivo na saída :

$$t_5 = \frac{\pi D_5}{z}$$

$$St_5 = \frac{S_5}{\sin \beta_5}$$

$$f_6 = \frac{t_5 - St_5}{t_5}$$

$$t_5 = \frac{\pi \times 300}{32} = 29,45 \text{ [mm]} \quad St_5 = \frac{3}{\operatorname{sen} 120^\circ} = 3,5 \text{ [mm]} \quad f_6 = \frac{29,45 - 3,5}{29,45} = 0,88$$

- Cálculo da componente meridional interna na saída (ponto 5):

$$Cm_6 = Cm_5 f_6$$

$$Cm_5 = Cm_6 / f_6$$

$$Cm_5 = 13,88 / 0,88$$

$$Cm_5 = 15,77 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo de  $Cu_5$  ( $= Cu_6$ ) dado o ângulo construtivo  $\beta_5 = 120^\circ$  :

$$\operatorname{tg} \beta_5 = Cm_5 / Wu_5$$

$$Wu_5 = Cm_5 / \operatorname{tg} \beta_5 \quad Wu_5 = 15,77 / \operatorname{tg} 120^\circ$$

$$Wu_5 = -9,1 \text{ [m/s]}$$

$$Cu_5 = u_5 - Wu_5 \quad Cu_5 = u_5 + 9,1$$

- Cálculo de  $u_5$  :

$$\Delta p_t = \varepsilon \cdot \Delta p_{t-\infty}$$

$$\Delta p_{tot} = \eta_h \cdot \varepsilon \cdot \Delta p_{t-\infty}$$

$$\Delta p_{tot} = \eta_h \cdot \varepsilon \cdot \rho g H_{t-\infty}$$

$$\Delta p_{tot} = \eta_h \cdot \varepsilon \cdot \rho g H_{t-\infty}$$

$$\frac{\Delta p_{tot}}{\eta_h \cdot \varepsilon \cdot \rho} = u_5 Cu_5$$

$$\frac{5.000}{0,6 \times 0,8 \times 1,2} = u_5 (u_5 + 9,1)$$

$$u_5^2 + 9,1u_5 - 8.680 = 0$$

$$u_5 = 88,7 \text{ [m/s]} \quad Cu_5 = 97,8 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo da rotação:

$$u_5 = u_6 = \pi D_5 n / 60 \quad n = 60 \times u_5 / (\pi D_5) \quad n = 5.650 \text{ [RPM]}$$

- Cálculo da componente tangencial na entrada:

$$u_3 = u_4 = \pi \cdot D_4 \cdot n / 60 = \pi \times 0,22 \times 5.650 / 60 = 65,1 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo do ângulo do escoamento na entrada:

$$\tan \beta_3 = Cm_3 / u_3 \quad \beta_3 = \tan^{-1}(18,9/65,1) \quad \beta_3 = 16,2^\circ$$

- Cálculo do fator de estrangulamento,  $f_3$ , utilizando o ângulo do escoamento na entrada:

$$t_4 = \frac{\pi \times 220}{32} = 21,6 \text{ [mm]} \quad St_4 = \frac{3}{\sin 16,2^\circ} = 10,75 \text{ [mm]}$$

$$f_3 = \frac{21,6 - 10,75}{21,6} = 0,5$$

- Cálculo da componente meridional interna na entrada (ponto 4):

$$Cm_3 = Cm_4 f_3 \quad Cm_4 = Cm_3 / f_3 \quad Cm_4 = 18,9 / 0,5 = 37,8 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo do ângulo construtivo na entrada:

$$\operatorname{tg} \beta_4 = Cm_4 / u_3 \quad \beta_4 = \operatorname{tg}^{-1}(37,8/65,1) \quad \beta_4 = 30,1^\circ$$

- Recálculo do ângulo construtivo na entrada:

$$St_4 = \frac{3}{\operatorname{sen} 30,1^\circ} = 6 \text{ [mm]} \quad f_3 = \frac{21,6 - 6}{21,6} = 0,72$$

$$Cm_4 = 18,9 / 0,72 = 26,25 \text{ [m/s]} \quad \beta_4 = \operatorname{tg}^{-1}(26,25/65,1) \quad \beta_4 = 22,0^\circ$$

- Recálculo do ângulo construtivo na entrada:

$$St_4 = \frac{3}{\operatorname{sen} 22^\circ} = 8 \text{ [mm]} \quad f_3 = \frac{21,6 - 8}{21,6} = 0,63$$

$$Cm_4 = 18,9 / 0,63 = 30 \text{ [m/s]} \quad \beta_4 = \operatorname{tg}^{-1}(30/65,1) \quad \beta_4 = 24,7^\circ$$

- Recálculo do ângulo construtivo na entrada:

$$St_4 = \frac{3}{\operatorname{sen} 24,7^\circ} = 7,2 \text{ [mm]} \quad f_3 = \frac{21,6 - 7,2}{21,6} = 0,67$$

$$Cm_4 = 18,9 / 0,67 = 28,2 \text{ [m/s]} \quad \beta_4 = \operatorname{tg}^{-1}(28,2/65,1) \quad \boxed{\beta_4 = 23,4^\circ}$$

Fig. 5.8 - Triângulos de ventilador radial

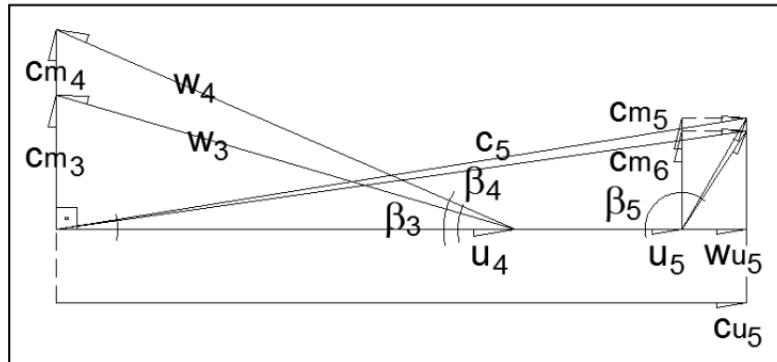
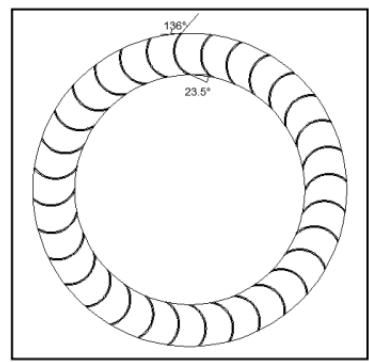


Fig. 5.9 - Corte do ventilador radial



Ventilador radial: Para aumentar em 25% a diferença de pressão do ventilador, mantendo-se as outras características ( $n$  e  $Q$ ) , qual deve ser o novo ângulo construtivo na saída?

$$\frac{\Delta p_{\text{tot}}}{\eta_h \cdot \varepsilon \cdot \rho} = u_5 C_{u5} \quad \frac{1,25 \times 5.000}{0,6 \times 0,8 \times 1,2} = 88,7 \times C_{u5} \quad C_{u5} = 122,3 \text{ [m/s]}$$

$$C_{u5} = u_5 - W_{u5} \quad W_{u5} = u_5 - C_{u5} = 88,7 - 122,3 \quad W_{u5} = -33,6 \text{ [m/s]}$$

$$\tan \beta_5 = C_{m5} / W_{u5} \quad \tan \beta_5 = 15,77 / (-33,6) \quad \beta_5 = 154,8^\circ$$

- Recálculo do ângulo construtivo na saída:

$$St_5 = \frac{3}{\sin 154,8^\circ} = 7,04 \text{ [mm]} \quad f_6 = \frac{29,45 - 7,04}{29,45} = 0,76$$

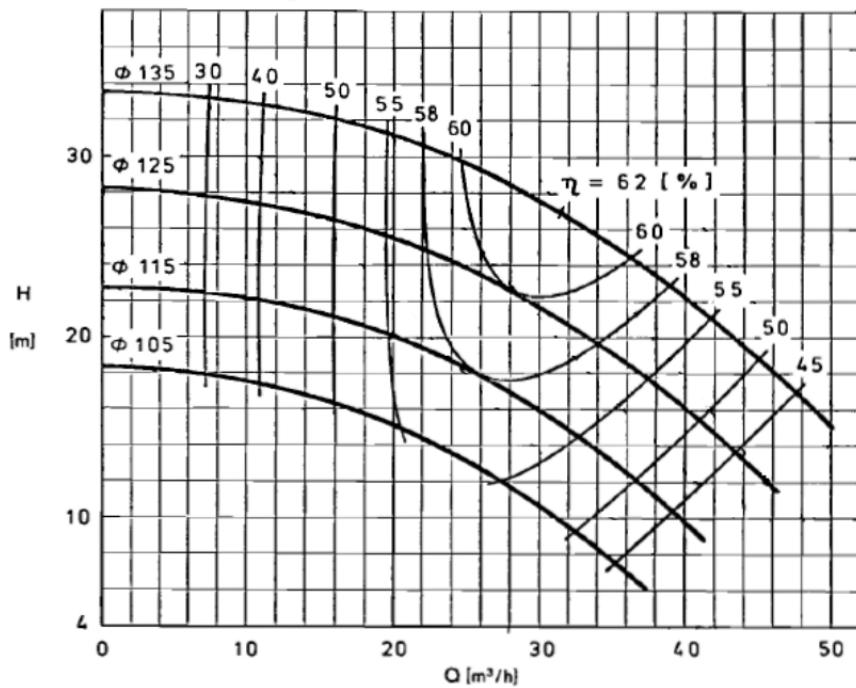
$$C_{m5} = 13,88 / 0,76 = 18,26 \text{ [m/s]} \quad \beta_5 = \tan^{-1}(18,26/-33,6) \quad \beta_5 = 151,5^\circ$$

- Recálculo do ângulo construtivo na saída:

$$St_5 = \frac{3}{\sin 151,5^\circ} = 6,28 \text{ [mm]} \quad f_6 = \frac{29,45 - 6,28}{29,45} = 0,786$$

$$C_{m5} = 13,88 / 0,786 = 17,64 \text{ [m/s]} \quad \beta_5 = \tan^{-1}(17,64/-33,6) \quad \boxed{\beta_5 = 152,3^\circ}$$

## Capítulo 6 - Análise da equação fundamental



## **6.1) Análise para turbina hidráulica de reação**

### **6.1.1) Diagrama da função $H_{t-\infty} = f(Q, n)$ (entrada sem choque)**

No estudo de máquinas hidráulicas é de grande importância o estabelecimento de relações entre as grandezas características de funcionamento: vazão, variação de energia específica, rotação, potência e rendimento.

Estas relações são obtidas através da equação fundamental das máquinas hidráulicas em conjunto com as relações entre velocidades dos triângulos de velocidade para escoamento através do rotor considerando número infinito de pás de espessura infinitesimal.

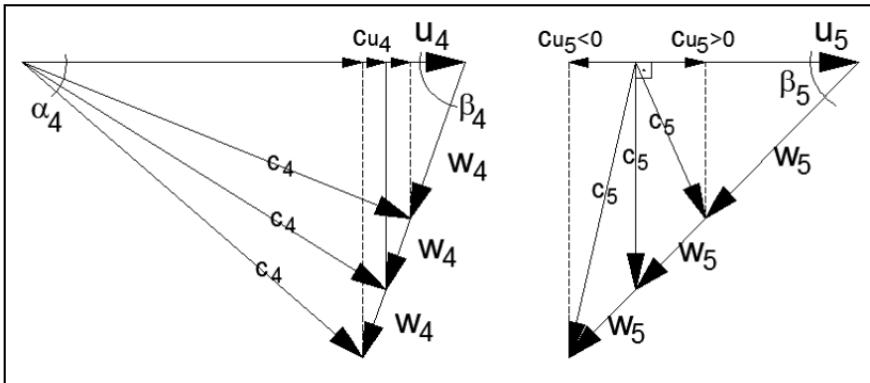


Fig. 6.1 - Triângulos de Velocidade (entrada sem choque)

Considerando os triângulos de velocidade médios nas seções de entrada e saída podemos escrever:

$$Cu_4 = u_4 - \frac{Cm_4}{\operatorname{tg}\beta_4}$$

e

$$Cu_5 = u_5 - \frac{Cm_5}{\operatorname{tg}\beta_5}$$

sendo  $Cm_4 = \frac{Q}{A_4}$  e  $Cm_5 = \frac{Q}{A_5}$  tem-se:

$$Cu_4 = u_4 - \frac{Q}{A_4 \operatorname{tg} \beta_4}$$

e

$$Cu_5 = u_5 - \frac{Q}{A_5 \operatorname{tg} \beta_5}$$

Da equação fundamental tem-se:

$$gH_{t-\infty} = u_4 Cu_4 - u_5 Cu_5 = u_4 \left( u_4 - \frac{Q}{A_4 \operatorname{tg} \beta_4} \right) - u_5 \left( u_5 - \frac{Q}{A_5 \operatorname{tg} \beta_5} \right)$$

$$gH_{t-\infty} = u_4^2 - \frac{u_4 Q}{A_4 \operatorname{tg} \beta_4} - u_5^2 + \frac{u_5 Q}{A_5 \operatorname{tg} \beta_5}$$

Definindo:

$$m = \frac{D_4}{D_5} \quad e \quad k = \frac{A_4}{A_5}$$

tem-se

$$\frac{u_4}{u_5} = \frac{\pi D_4 n / 60}{\pi D_5 n / 60} = m$$

Manipulando a equação de  $gH_{t-\infty}$  obtém-se:

$$gH_{t-\infty} = \frac{u_4^2}{u_5^2} u_5^2 - u_5^2 + \frac{Qu_5}{A_5} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_5} - \frac{u_4}{A_4 \operatorname{tg} \beta_4} \frac{A_5}{u_5} \right)$$

$$gH_{t \rightarrow \infty} = (m^2 u_5^2 - u_5^2) + \frac{Qu_5}{A_5} \left( \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_5} - \frac{m}{ktg\beta_4} \right)$$

$$gH_{t \rightarrow \infty} = u_5^2 (m^2 - 1) + \frac{Qu_5}{A_5} \left( \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_5} - \frac{m}{ktg\beta_4} \right)$$

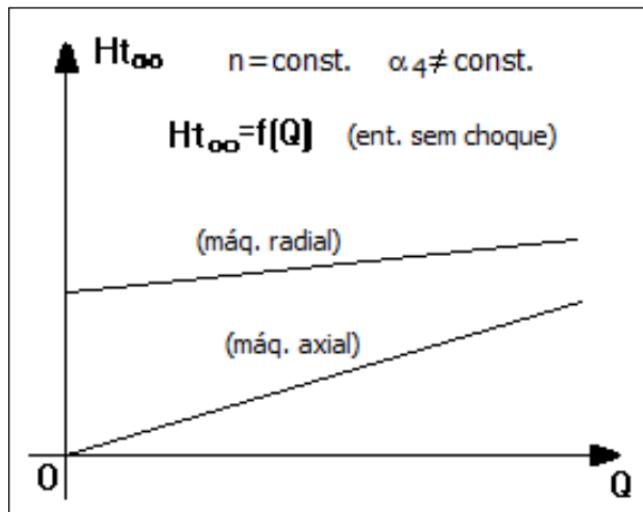
Esta equação representa a altura de queda teórica para um determinado rotor, com ângulos construtivos ( $\beta_4$  e  $\beta_5$ ) e outras características geométricas definidas, função da vazão e da rotação, para entrada sem choque (pois  $\beta_4$  é constante).

Utilizando o valor de  $u_5 = \pi D_5 n / 60$  tem-se:

$$gH_{t \rightarrow \infty} = \left( \frac{\pi D_5}{60} \right)^2 (m^2 - 1) n^2 + \frac{\pi D_5}{60 A_5} \left( \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_5} - \frac{m}{ktg\beta_4} \right) n Q$$

Que pode ser escrita na forma:  $H_{t \rightarrow \infty} = a_1 n^2 + b_1 n Q$

Para cada  $n$  obtém-se uma reta, portanto, a relação acima é um feixe de retas.



Ao fixarmos um valor de  $n$  obtemos uma reta que nos descreve a característica da máquina para várias aberturas ( $\alpha_4 \neq \text{cte.}$  - entrada sem choque), como mostra a fig.6.2.

Fig. 6.2 -  $H_{t\infty}=f(Q)$  sem choque

### 6.1.2) Diagrama da função $H_{t \rightarrow \infty} = f(Q, n)$ (entrada com choque)

Ao equacionarmos novamente usaremos agora  $Cu_4 = Cm_4 / \operatorname{tg} \alpha_4$ , desta maneira teremos a equação fundamental escrita da seguinte maneira:

$$gH_{t \rightarrow \infty} = u_4 Cu_4 - u_5 Cu_5 = u_4 \frac{Q}{A_4 \operatorname{tg} \alpha_4} - u_5 \left( u_5 - \frac{Q}{A_5 \operatorname{tg} \beta_5} \right)$$

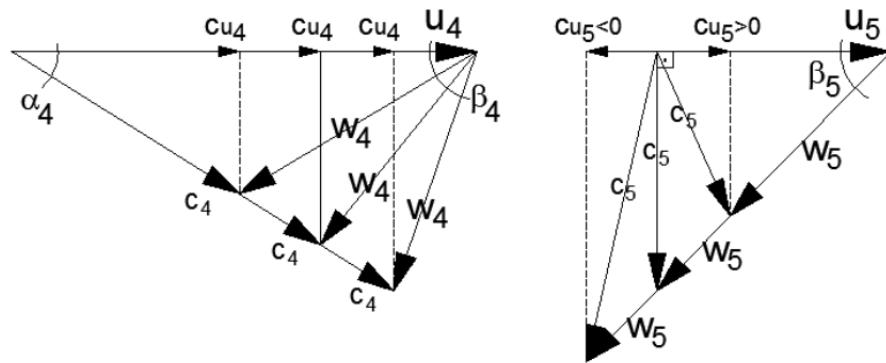


Fig. 6.2 - Triângulos de Velocidade (entrada com choque)

$$gH_{t-\infty} = -u_5^2 + \frac{Qu_5}{A_5 \operatorname{tg}\beta_5} + \frac{Qu_4}{A_4 \operatorname{tg}\alpha_4}$$

$$gH_{t-\infty} = -u_5^2 + \frac{Qu_5}{A_5} \left( \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_5} + \frac{u_4}{u_5} \frac{A_5}{A_4} \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_4} \right)$$

Usando os mesmos coeficientes m e k definidos anteriormente, tem-se:

$$gH_{t-\infty} = -u_5^2 + \frac{Qu_5}{A_5} \left( \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_5} + \frac{m}{k \operatorname{tg}\alpha_4} \right)$$

Utilizando o valor de  $u_5 = \pi D_5 n / 60$  tem-se:

$$gH_{t-\infty} = -\left(\frac{\pi D_5}{60}\right)^2 n^2 + \frac{\pi D_5}{60 A_5} \left( \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_5} + \frac{m}{k \operatorname{tg}\alpha_4} \right) Qn$$

A equação acima representa também um feixe de retas  $H_{t-\infty} = f(Q, n)$ , para vários  $\alpha_4$  constantes, o que define o comportamento teórico da máquina para uma dada abertura do distribuidor, com entrada incongruente com o rotor, e está representada na fig.6.3.

Que pode ser escrita na forma:

$$H_{t-\infty} = a_2 n^2 + b_2 Qn$$

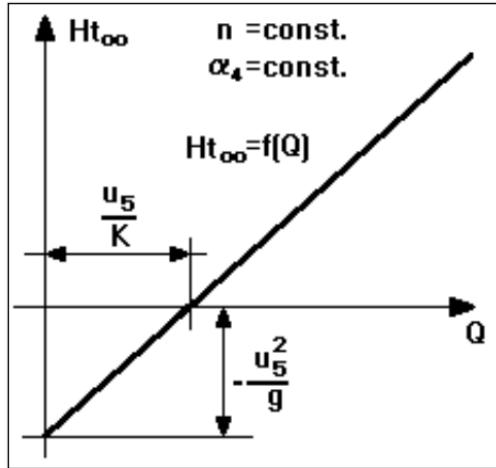


Fig. 6.3 -  $H_{t-\infty}$  em função de  $Q$

A intersecção entre as duas retas mostradas anteriormente nos fornecerá o ponto de melhor rendimento na rotação dada e no ângulo  $\alpha_4$  fixado na segunda reta. Caso se modifique a rotação (ou qualquer outro parâmetro) se modificará as retas e o ponto de melhor rendimento teórico.

De outra maneira, pode-se dizer que o ponto de interseção terá uma abertura do distribuidor ( $\alpha_4$ ) que corresponderá ao ponto de melhor rendimento para uma dada rotação.

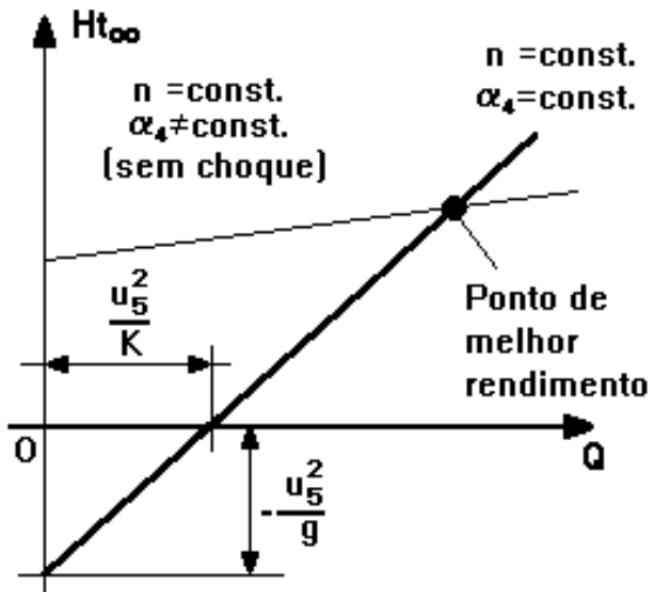


Fig. 6.4 - Intersecção entre as retas

## 6.2) Análise para turbina hidráulica de ação

Neste tipo de máquina, o sistema de admissão (injetor) é independente do rotor, portanto não há uma dependência direta entre a vazão e a rotação, uma vez fixada a altura de queda e a posição da agulha do injetor. Deste modo tem-se retas horizontais para  $Q$  em função de  $n$ , conforme a fig.6.5.

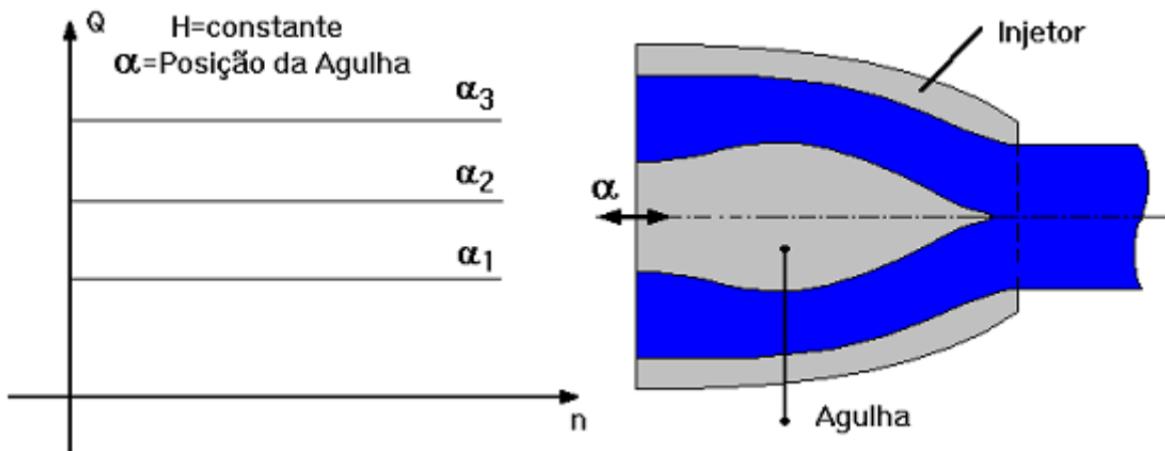


Fig. 6.5 -  $Q=f(n)$  para turbina de ação

Aplicando a equação fundamental para o rotor, e com as simplificações que podem ser observadas na fig.6.6, obtém-se a altura de queda teórica.

$$gH_t = u_4 C_{u4} - u_5 C_{u5}$$

$$u = u_4 = u_5$$

$$C_{u4} = u + W_4$$

$$C_{u5} = u - W_5 \cdot \cos \beta_5$$

$$gH_t = u(W_4 + W_5 \cdot \cos \beta_5)$$

Aplicando-se Bernoulli entre as seções 4 e 5 temos:

$$\frac{W_4^2}{2g} = \frac{W_5^2}{2g} + hp$$

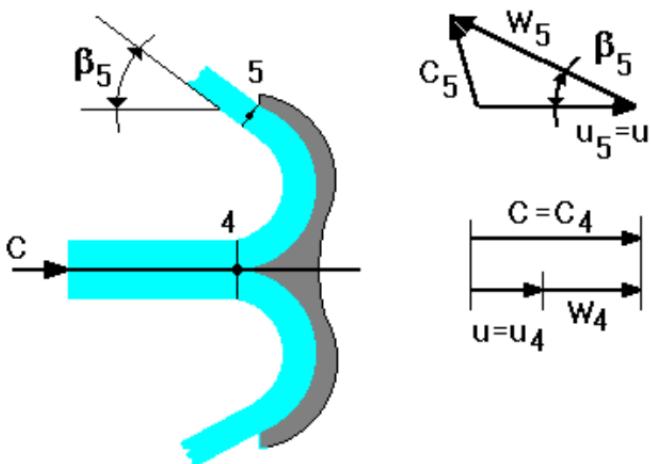


Fig. 6.6 - Triângulos de velocidade para turb. Pelton

Considerando  $hp$  (perdas no escoamento entre as seções 4 e 5) como função de  $W_4$ :

$$hp = p \cdot \frac{W_4^2}{2g}$$

$$\text{tem-se: } W_5^2 = (1-p)W_4^2$$

o que resulta para a altura específica teórica no rotor:

$$gH_t = u(c-u)(1 + \sqrt{1-p} \cdot \cos \beta_5)$$

A potência de eixo teórica do rotor será:

$$P_{e-t} = \dot{m}gH_t = pQu(c-u)(1 + \sqrt{1-p} \cdot \cos \beta_5)$$

A potência fornecida ao rotor ou potência hidráulica pode ser determinada conhecendo-se o coeficiente de perdas do injetor e a altura disponível correspondente a leitura do manômetro situado na entrada do injetor,  $H_d$ .

A velocidade na saída do injetor é dada por:

$$C = k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_d}$$

sendo  $k$  o coeficiente que leva em conta as perdas por atrito, perdas por transformação de energia e outras perdas no injetor ( $k < 1$ ).

Logo pode-se escrever:

$$H_{inj} = \frac{C^2}{2g} = k^2 \cdot H_d$$

onde  $H_{inj}$  é a altura de pressão correspondente a velocidade na saída do injetor.

Assim a potência hidráulica fornecida ao rotor será:

$$P_h = \rho g Q H_{inj} = k^2 \cdot \rho g Q H_d$$

O rendimento do rotor pode ser então obtido:

$$\eta_r = \frac{P_{e-t}}{P_h} = \frac{u(C - u)(1 + \sqrt{1 - p} \cdot \cos \beta_5)}{g k^2 H_d}$$

Esta expressão mostra que variando a rotação (e consequentemente  $u$ ) temos o rendimento do rotor, desde que sejam conhecidas as perdas no mesmo (coeficiente  $p$ ).

Para termos o rendimento hidráulico do conjunto (injetor mais rotor) basta multiplicar a equação para o rendimento do rotor por  $k^2$ :

$$\eta_h = \eta_r \cdot k^2 = \frac{u(C-u)(1 + \sqrt{1-p} \cdot \cos \beta_5)}{gH_d}$$

O rendimento hidráulico máximo do rotor ocorre para  $\partial\eta_r/\partial u=0$ , logo para  $u=C/2$ , sendo:

$$\eta_{r-\text{máx}} = \frac{1 + \sqrt{1-p} \cdot \cos \beta_5}{2}$$

Na fig.6.7 mostra-se as parábolas  $P_{e-t}=f(u)$  e  $\eta_r=f(u)$ . Tais funções foram obtidas considerando-se  $H_d$ ,  $Q$  e consequentemente  $\alpha$  (posição da agulha) e  $k$  constantes.

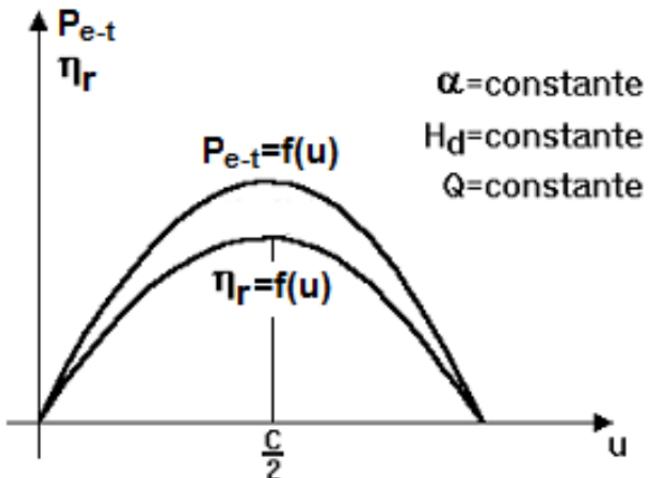


Fig. 6.7 -  $P_{e-t}$  e  $\eta$  em função de  $u$  para turbina Pelton

### 6.3) Análise para bombas e ventiladores

Conhecido o aspecto apresentado pelas curvas características de um rotor de bomba ou ventilador, obtidas a partir de resultados experimentais, deve-se procurar uma explicação para aqueles resultados, analisando as curvas a partir da equação fundamental.

Considerando um rotor de bomba ou ventilador centrífugo com  $\beta_5 < 90^\circ$ , cujo triângulo de velocidade na saída é mostrado na figura 6.8 .

A expressão genérica da equação fundamental simplificada é

$$gH_{t \rightarrow \infty} = Cu_5 \cdot u_5$$

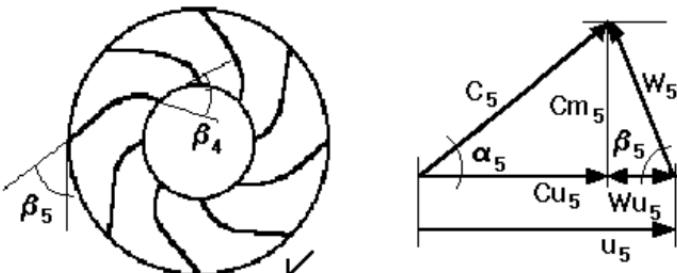


Fig. 6.8 - Triângulos de velocidades de rotor centrífugo

Do triângulo de saída vem:

$$Cu_5 = u_5 - Wu_5, \quad Wu_5 = \frac{Cm_5}{\operatorname{tg} \beta_5} \quad \text{e} \quad Cm_5 = \frac{Q}{A_5}$$

Resultando, portanto:

$$Cu_5 = u_5 - \frac{Q}{A_5 \cdot \operatorname{tg} \beta_5}$$

e

$$gH_{t-\infty} = u_5^2 - \frac{Q \cdot u_5}{A_5 \cdot \operatorname{tg} \beta_5}$$

Ressalta-se que esta expressão é válida para as seguintes condições: fluido ideal, número infinito de pás, pás de espessura infinitesimal, entrada a  $90^\circ$  (sem choques).

A expressão representa a equação de uma reta, diferente para cada valor de  $u_5$ , e é representada na fig.6.9, conforme o valor de  $\beta_5$  ( $\cotg 90^\circ = 0$ ).

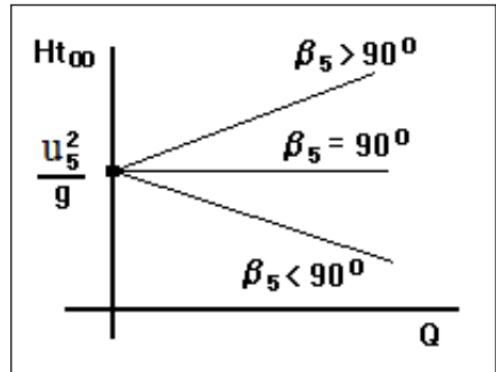


Fig. 6.9 - Variação de  $H_{t-\infty} = f(Q)$

A equação fundamental, escrita desta maneira, expressa a dependência entre  $Q$  e  $H_{t-\infty}$ . Considerando o número de pás finito, utiliza-se a altura de elevação teórica:

$$H_{t-\infty} = a \cdot H_t$$

sendo "a" um coeficiente experimental já citado, sempre maior que 1.

Substituindo este valor na expressão anterior, tem-se:

$$gH_t = \frac{u_5^2}{a} - \frac{Q \cdot u_5}{a \cdot A_5 \cdot \operatorname{tg} \beta_5}$$

A figura mostra as duas retas  $H_t = f(Q)$  e  $H_{t-\infty} = f(Q)$  para uma determinada velocidade  $u_5$  e para  $\beta_5 < 90^\circ$ .

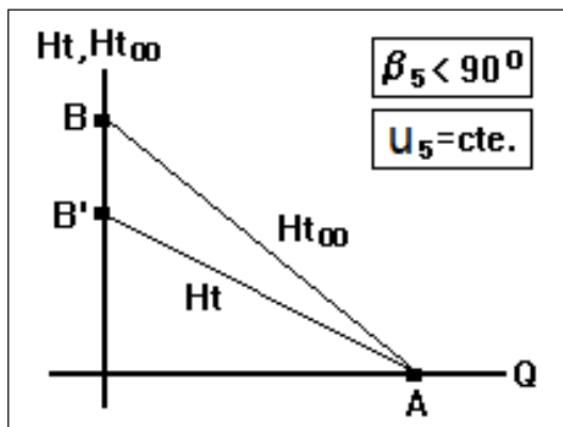


Fig. 6.10 - Variação de  $H_t$  e  $H_{t-\infty} = f(Q)$  para  $\beta_5 < 90^\circ$

Pode-se observar que os pontos A, B e B' possuem as seguintes coordenadas:

$$\text{Ponto A: } H_t = H_{t \rightarrow \infty} = 0 ; Q = u_5 \cdot A_5 \cdot \operatorname{tg} \beta_5$$

$$\text{Ponto B: } H_{t \rightarrow \infty} = u_5^2 / g ; Q = 0$$

$$\text{Ponto B': } H_t = u_5^2 / a \cdot g ; Q = 0$$

A altura de elevação será obtida a partir de  $H_t$ , se conhecermos as perdas por atrito,  $hp_1$  e as perdas por choque,  $hp_2$ :

$$H = H_t - hp = H_t - (hp_1 + hp_2)$$

Quantitativamente é bastante complexo e pouco prático se obter uma equação geral para estas perdas, porém, sabemos que estas são relacionadas basicamente com a vazão para rotação constante. De modo geral pode-se expressar estas perdas usando:

$$hp_1 = K \cdot Q^2 \quad \text{e} \quad hp_2 = b + c \cdot Q + d \cdot Q^2$$

onde K, b, c e d são coeficientes obtidos experimentalmente.

Em um sistema de eixos coordenados, estas perdas são representadas como na figura 6.11, conjuntamente com a reta  $H_t = f(Q)$  e com a curva característica da máquina  $H = f(Q)$  para uma rotação fixa.

Vejamos a seguir como se determinará analiticamente a expressão da altura de elevação e a do rendimento hidráulico em função da vazão, para uma rotação fixa.

Sendo:

$$H = H_t - hp = H_t - (hp_1 + hp_2)$$

$$H_t = u_5^2 / (a.g) - Q.u_5 / (a.g.A_5 \cdot \operatorname{tg}\beta_5) = e - f.Q$$

$$hp_1 = K.Q^2 \quad \text{e}$$

$$hp_2 = b + c.Q + d.Q^2$$

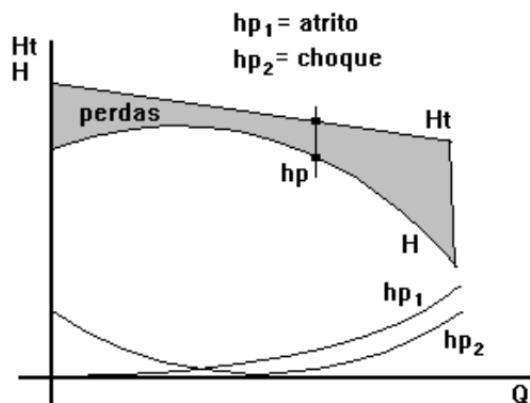


Fig. 6.11 - Curva  $H=f(Q)$  obtida de  $H_t$  e das perdas  $hp_1$  e  $hp_2$

Tem-se, então:

$$H = e - f.Q - K.Q^2 - b - c.Q - d.Q^2$$

ou

$$H = A + B.Q + C.Q^2$$

Ao mesmo tempo, sendo  $\eta_h = H/H_t$ , obtém-se o rendimento hidráulico:

$$\eta_h = \frac{A + B.Q + C.Q^2}{e - f.Q}$$

Estas são as expressões analíticas procuradas para  $H$  e  $\eta_h$ .

De fato, a obtenção dos coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $e$  e  $f$ , é extremamente complexo analiticamente e envolve muitas hipóteses simplificadoras, de tal modo que sua obtenção é realizada através de testes em bancadas para grupos de máquinas típicas (bombas e ventiladores de arranjos conhecidos e mais utilizados).

### 6.3.1) Curvas representativas das perdas internas

Complementando o exposto no item anterior, é interessante mostrar uma maneira simplificada de obtenção das curvas representativas das perdas que ocorrem em bomba e ventiladores. Tal procedimento permite ao projetista melhorar seus critérios de cálculo e apresentar produto com melhores características.

Em tempos gerais, o processo é o seguinte:

- a) Realiza-se em um rotor de bomba, projetado e construído pelo fabricante, ensaios de laboratório, visando a obtenção das curvas características do rotor.
- b) Da curva característica  $\eta_t = f(Q)$  determina-se o rendimento máximo e o valor correspondente do rendimento hidráulico, arbitrando-se (ou medindo-se) o rendimento mecânico e o rendimento volumétrico.
- c) Sendo  $H = H_t \cdot \eta_h$ , pode-se traçar a curva  $H_t = f(Q)$ , uma vez que  $H=f(Q)$  também foi obtido experimentalmente.

d) Verifica-se a seguir se a curva traçada satisfaz a equação:

$$H_t = u_5^2 / (a.g) - Q.u_5 / (a.g.A_5 \cdot \operatorname{tg}\beta_5) \quad \text{ou} \quad H_t = e - f.Q \quad (\text{rot.} = \text{cte.})$$

O projetista tem, então, condições de verificar se os critérios adotados para a determinação do fator "a" de Pfeiderer conduziram a um valor adequado deste fator, comparando  $H_t$  com  $H_{t-\infty}$

e) Determina-se  $h_p = H_t - H$

f) Traça-se a parábola representativa da função  $hp_1 = K.Q^2$ , passando pela origem e pelo ponto onde tem-se  $\eta_{h-\text{máx}}$ . Neste ponto,  $hp_2 \approx 0$ . Determinando-se K.

g) Traça-se a curva representativa da função  $hp_2 = b + c.Q + d.Q^2$ , sabendo que, para uma vazão qualquer Q, tem-se  $hp_2 = hp - hp_1$ . Determina-se os coeficientes b, c e d.

## 6.4) Exemplos de cálculos

### 6.4.1) Turbinas de reação

Turbina radial: Determine a equação  $H_{t-\infty} = f(Q)$  para uma turbina radial com os seguintes dados: i)  $D_4 = 0,48$  [m], ii)  $b_4 = 0,023$  [m], iii)  $D_5 = 0,32$  [m], iv)  $b_5 = 0,033$  [m], v)  $\beta_4 = 85^0$ , vi)  $\beta_5 = 18^0$  e vii)  $n = 1.160$  [RPM].

$$gH_{t-\infty} = \left( \frac{\pi D_5}{60} \right)^2 (m^2 - 1) n^2 + \frac{\pi D_5}{60 A_5} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_5} - \frac{m}{k \operatorname{tg} \beta_4} \right) Qn$$

- Cálculo das áreas ao rotor:

$$A_4 = \pi \cdot D_4 \cdot b_4 = \pi \times 0,48 \times 0,022 = 0,03317 \text{ [m}^2]$$

$$A_5 = \pi \cdot D_5 \cdot b_5 = \pi \times 0,32 \times 0,033 = 0,03317 \text{ [m}^2]$$

- Cálculo de m e k:

$$m = \frac{D_4}{D_5} \quad \text{e} \quad k = \frac{A_4}{A_5} \quad \quad m = \frac{0,48}{0,32} = 1,5 \quad \text{e} \quad k = \frac{0,03317}{0,03317} = 1,0$$

- Substituição de valores:

$$gH_{t-\infty} = \left( \frac{\pi \times 0,32}{60} \right)^2 (1,5^2 - 1) 1.160^2 + \frac{\pi \times 0,32}{60 \times 0,03317} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} 18^0} - \frac{1,5}{1,0 \times \operatorname{tg} 85^0} \right) Q \times 1.160$$

$$gH_{t-\infty} = 472,2 + 0,505 \times (3,08 - 0,131) \times Q \times 1.160$$

$$H_{t-\infty} = 48,2 + 176,1 Q$$

Turbina axial: Determine a equação  $H_{t-\infty} = f(Q)$  para uma turbina axial com os seguintes dados: i)  $D_{ext} = 3$  [m], ii)  $D_{int} = 1$  [m], iii)  $\beta_4 = 58^\circ$ , iv)  $\beta_5 = 30^\circ$  e v)  $n = 138,5$  [RPM].

$$gH_{t-\infty} = \left( \frac{\pi D_5}{60} \right)^2 (m^2 - 1) n^2 + \frac{\pi D_5}{60 A_5} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_5} - \frac{m}{k \operatorname{tg} \beta_4} \right) Qn$$

- Cálculo do diâmetro médio:

$$D_m = (D_{ext} + D_{int}) / 2 = (3 + 1) / 2 = 2 \text{ [m]}$$

- Cálculo das áreas:

$$A_4 = A_5 = \pi \cdot (D_{ext}^2 - D_{int}^2) / 4 = \pi \times (3^2 - 1^2) / 4 = 6,283 \text{ [m}^2]$$

- Cálculo de m e k:

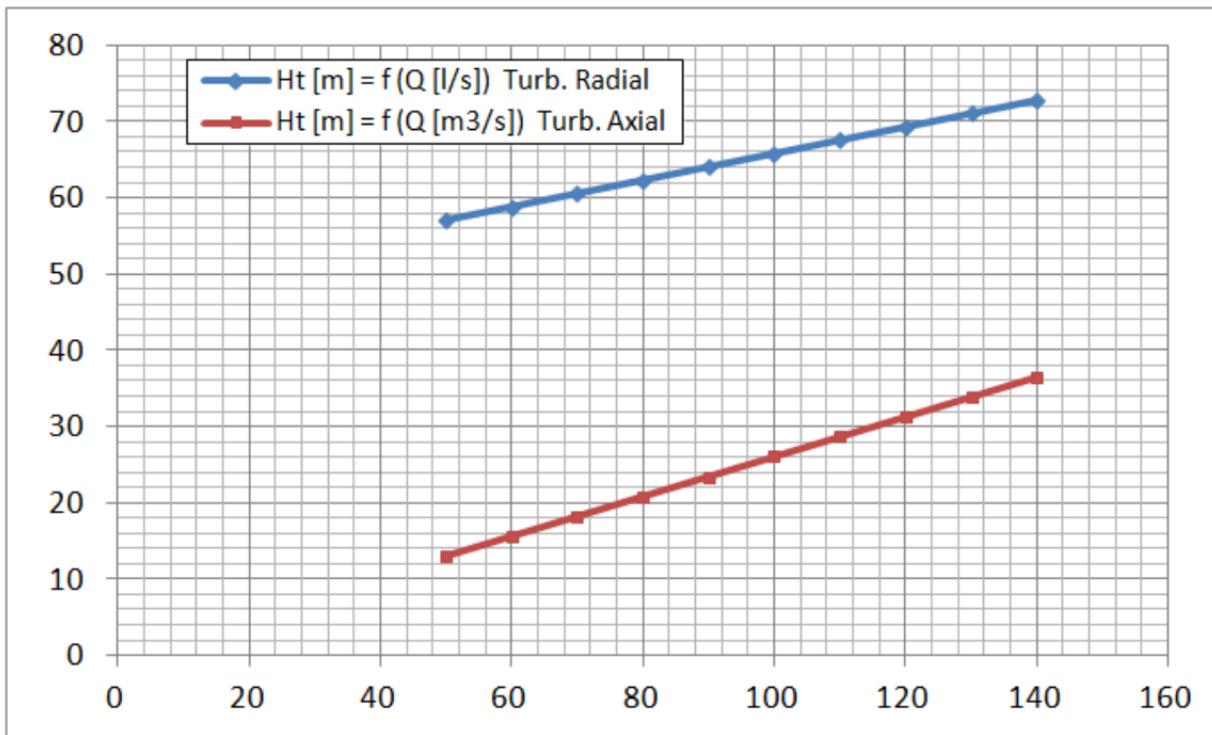
$$m = \frac{D_4}{D_5} \quad \text{e} \quad k = \frac{A_4}{A_5} \quad \quad m=1 \quad \text{e} \quad k=1$$

- Substituição de valores:

$$gH_{t-\infty} = \left( \frac{\pi \times 2}{60} \right)^2 (1^2 - 1) 138,5^2 + \frac{\pi \times 2}{60 \times 6,283} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} - \frac{1}{\operatorname{tg} 58^\circ} \right) Q \times 138,5$$

$$gH_{t-\infty} = 0 + 0,0167 \times (1,732 - 0,625) \times Q \times 138,5$$

$$\boxed{H_{t-\infty} = 0,26 Q}$$



### 6.4.2) Turbinas de ação

Turbina Pelton: Calcule o rendimento máximo do rotor, a rotação, e a potência teórica máxima de uma turbina Pelton, cujo diâmetro é 1 [m] nas seguintes condições: i)  $H_d = 1.000$  [mCA], ii)  $Q = 0,1$  [ $m^3/s$ ], iii) Coeficiente de perda no injetor,  $k = 0,98$ , iv) Coeficiente de perdas nas pás  $p = 0,25$  e  $\beta_5 = 6^\circ$ .

- Cálculo da velocidade na saída do injetor:

$$C = k \cdot \sqrt{2.g.H_d}$$

$$C = 0,98 \times (2 \times 9,8 \times 1.000)^{1/2} = 137,2 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo da velocidade tangencial (ou periférica) do rotor:

$$u = C/2 = 68,6 \text{ [m/s]}$$

- Cálculo da rotação

$$u = \pi \cdot D \cdot n / 60 \quad n = 60 \cdot u / \pi \cdot D = 60 \times 68,6 / (\pi \times 1)$$

$$\boxed{n = 1.310 \text{ [RPM]}}$$

- Cálculo do rendimento máximo

$$\eta_{r-\text{máx}} = \frac{1 + \sqrt{1 - p} \cdot \cos \beta_5}{2}$$

$$\eta_{r-\text{máx}} = [1 + (1 - 0,25)^{1/2} \cos 6^\circ] / 2 = 0,93$$

$$\boxed{\eta_{r-\text{máx}} = 93\%}$$

- Cálculo da potência hidráulica:

$$P_h = \rho g Q H_{inj} = k^2 \cdot \rho g Q H_d$$

$$P_h = 0,98^2 \times 9.780 \times 0,1 \times 1.000 = 939.271 \text{ [W]} = 939 \text{ [kW]}$$

- Cálculo da potência teórica máxima:

$$P_t = \eta_{r-\text{máx}} P_h = 0,93 \times 939$$

$$\boxed{P_t = 874 \text{ [kW]}}$$

### 6.4.3) Bomba hidráulica

Bomba radial: Determine a equação  $H_t = f(Q)$  para uma bomba radial com os seguintes dados: i)  $D_5 = 135$  [mm], ii)  $b_5 = 25$  [m], iii)  $\beta_5 = 60^\circ$ , iv)  $n = 3.500$  [RPM] e v)  $a=1,25$

Utilizando a expressão,  $gH_t = \frac{u_5^2}{a} - \frac{Q.u_5}{a.A_5.\tan\beta_5}$ , obtida anteriormente, sendo:

$$A_5 = \pi.D_5.b_5 = \pi \times 0,135 \times 0,025 = 0,0106 \text{ [m}^2\text{]} \quad \text{e}$$

$$u_5 = \pi.D_5.n/60 = \pi \times 0,135 \times 3.500 / 60 = 24,74 \text{ [m/s]}$$

Temos:

$$gH_t = \frac{24,74^2}{1,25} - \frac{Q \times 24,74}{1,25 \times 0,0106 \times \tan 60^\circ} = 489,65 - 1.078 Q$$

$$\boxed{H_t = 50 - 110 Q}$$

# **Capítulo 7 - Semelhança e Coeficientes para MH**

## **7.1) Semelhança**

### **7.1.1) Condições ideais para semelhança de escoamentos**

Dois escoamentos são considerados semelhantes quando existe entre estes uma semelhança geométrica (proporcionalidade dimensional), e uma semelhança cinemática e dinâmica (proporcionalidade das linhas de corrente e proporcionalidade das pressões dinâmicas entre pontos correspondentes). Estas condições são requeridas quando se realizam ensaios em modelos, e procura-se transpor os resultados para os protótipos.

Na mecânica dos fluidos alguns parâmetros adimensionais são utilizados para se assegurar a semelhança dinâmica entre modelo e protótipo. São os números adimensionais que relacionam os tipos de forças preponderantes no tipo de escoamento em estudo. Por exemplo, o número de Reynolds, **Re**, relaciona forças de inércia e forças viscosas.

Dependendo do tipo de escoamento que se está analisando outros números adimensionais são importantes para se avaliar a semelhança dinâmica: o número de Mach, **M**, o número de Froude, **F**, e outros.

### 7.1.2) Condições particulares as máquinas hidráulicas

Em uma análise de semelhança de máquinas hidráulicas tem-se dois tipos de aplicações práticas.

A primeira situação seria a transposição das grandezas de funcionamento para uma máquina (protótipo) a partir de resultados experimentais obtidos em outra geometricamente semelhante (modelo).

A segunda situação é a aplicação de uma mesma máquina operando em condições de funcionamento diferentes, situação em que deseja-se conhecer as características operacionais nas condições alteradas a partir das características conhecidas.

Nas duas situações tem-se semelhança geométrica, porém devido a dimensões e velocidades diferentes na primeira situação e a velocidades diferentes na segunda, o número de Reynolds, que é o parâmetro adimensional para semelhança de máquinas hidráulicas, serão diferentes para as máquinas estabelecidas como modelo e protótipo.



## Bancada de testes de turbina axial



T.21

## 7.2) Leis de semelhança

Para estabelecer leis de semelhança entre grandezas de funcionamento de modelo e protótipo considera-se, além da semelhança geométrica, que existe proporcionalidade entre os triângulos de velocidade do modelo e do protótipo no ponto de funcionamento considerado.

A semelhança geométrica impõe que os ângulos construtivos sejam iguais:

$$\beta_{4_M} = \beta_{4_P} \quad \text{e} \quad \beta_{5_M} = \beta_{5_P}$$

e que exista uma relação de escala entre quaisquer dimensões do protótipo e do modelo:

$$\frac{b_P}{b_M} = \frac{D_P}{D_M} = E$$

A semelhança cinemática impõe uma relação de proporcionalidade entre os triângulos de velocidade, que pode ser expressa na forma:

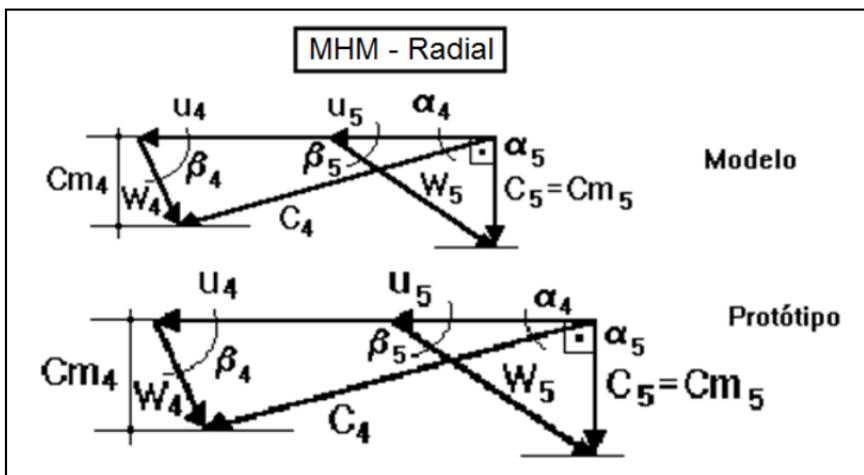


Fig. 7.1 - Semelhança de triângulos entre modelo e protótipo

$$\frac{C_{u_P}}{C_{u_M}} = \frac{C_{m_P}}{C_{m_M}} = \frac{u_P}{u_M} = \frac{\pi n_P D_P}{\pi n_M D_M} = \frac{n_P D_P}{n_M D_M}$$

Para se obter as leis de semelhança entre grandezas de máquinas semelhantes, utiliza-se a equação fundamental para cada uma das máquinas.

Em primeiro momento obteremos a relação entre altura e vazão para turbinas, sendo:

$$gH_{t-P} = gH_P \cdot \eta_{h-P} = u_{4-P} Cu_{4-P} - u_{5-P} Cu_{5-P}$$

e usando a relação de proporcionalidade entre os triângulos tem-se:

$$gH_P \cdot \eta_{h-P} = u_{4-M} Cu_{4-M} \left( \frac{n_P D_P}{n_M D_M} \right)^2 - u_{5-M} Cu_{5-M} \left( \frac{n_P D_P}{n_M D_M} \right)^2$$

e       $gH_P \cdot \eta_{h-P} = gH_M \cdot \eta_{h-M} \left( \frac{n_P D_P}{n_M D_M} \right)^2$

Assim a relação procurada é:       $\frac{n_P}{n_M} = \frac{D_M}{D_P} \sqrt{\frac{H_P \cdot \eta_{h-P}}{H_M \cdot \eta_{h-M}}}$

Utilizando a definição de escala  $\frac{b_P}{b_M} = \frac{D_P}{D_M} = E$

teremos a relação entre rotação e altura de queda:

$$\frac{n_P}{n_M} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{H_P \cdot \eta_{h-P}}{H_M \cdot \eta_{h-M}}} \quad \text{MHM}$$

Para a relação entre vazão e rotação tomaremos a relação de proporcionalidade entre os triângulos escrita de outra forma:

$$\frac{Cm_P}{Cm_M} = \frac{Q_P}{\pi D_P b_P} \frac{\pi D_M b_M}{Q_M} = \frac{u_P}{u_M} = \frac{n_P D_P}{n_M D_M} \quad \text{que se torna: } \frac{Q_P D_M b_M}{Q_M D_P b_P} = \frac{n_P D_P}{n_M D_M}$$

logo a relação procurada é:  $\frac{Q_P}{Q_M} = \frac{n_P}{n_M} \left( \frac{D_P}{D_M} \right)^2 \frac{b_P}{b_M}$  ou  $\frac{Q_P}{Q_M} = \frac{n_P}{n_M} E^3$  MHM

Das equações acima tiramos a relação entre altura e vazão:

$$\frac{Q_P}{Q_M} = \left( \frac{D_P}{D_M} \right)^2 \sqrt{\frac{H_P \cdot \eta_{h-P}}{H_M \cdot \eta_{h-M}}} \quad \text{ou} \quad \frac{Q_P}{Q_M} = E^2 \sqrt{\frac{H_P \cdot \eta_{h-P}}{H_M \cdot \eta_{h-M}}} \quad \text{MHM}$$

Para obtermos uma relação entre potência de eixo,  $P_e$ , e a altura de queda,  $H$ , utilizaremos as duas equações da potência efetiva para o modelo e para o protótipo:

$$P_{e-M} = \rho.g.H_M.Q_M.\eta_{t-M} \quad \text{e} \quad P_{e-P} = \rho.g.H_P.Q_P.\eta_{t-P}$$

A relação entre as duas equações nos fornecerá:

$$\frac{P_{e-P}}{P_{e-M}} = \frac{Q_P}{Q_M} \frac{H_P \eta_{t-P}}{H_M \eta_{t-M}}$$

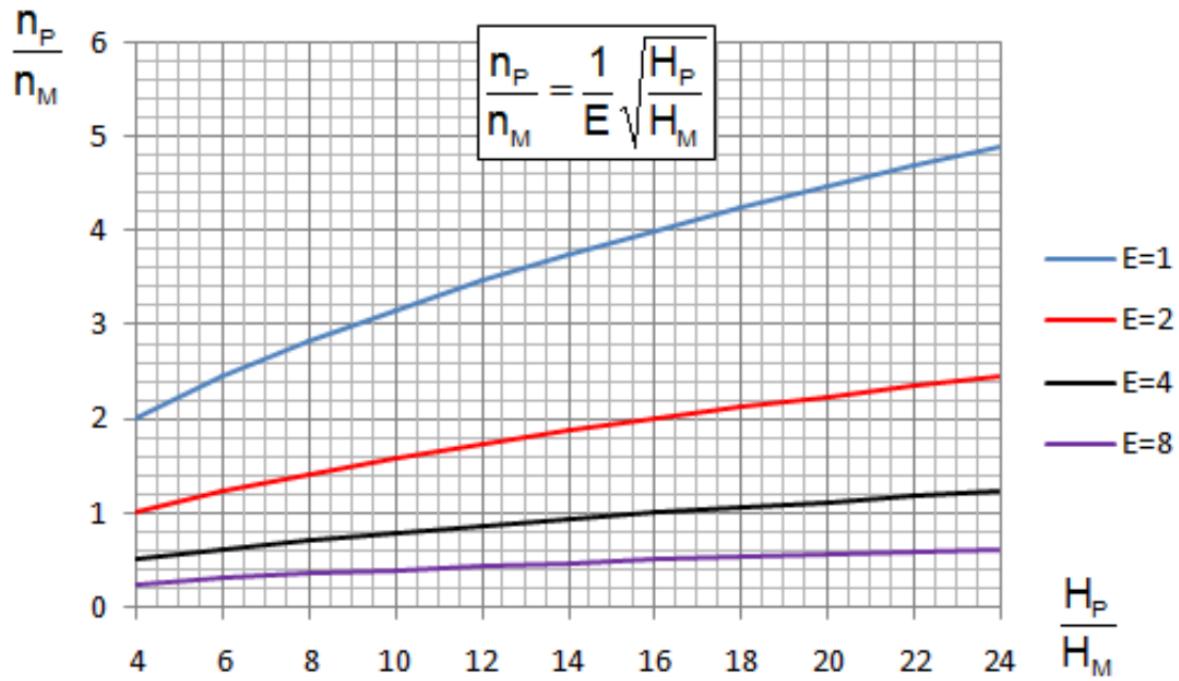
Utilizando a equação da vazão e altura, acima obtida, temos:

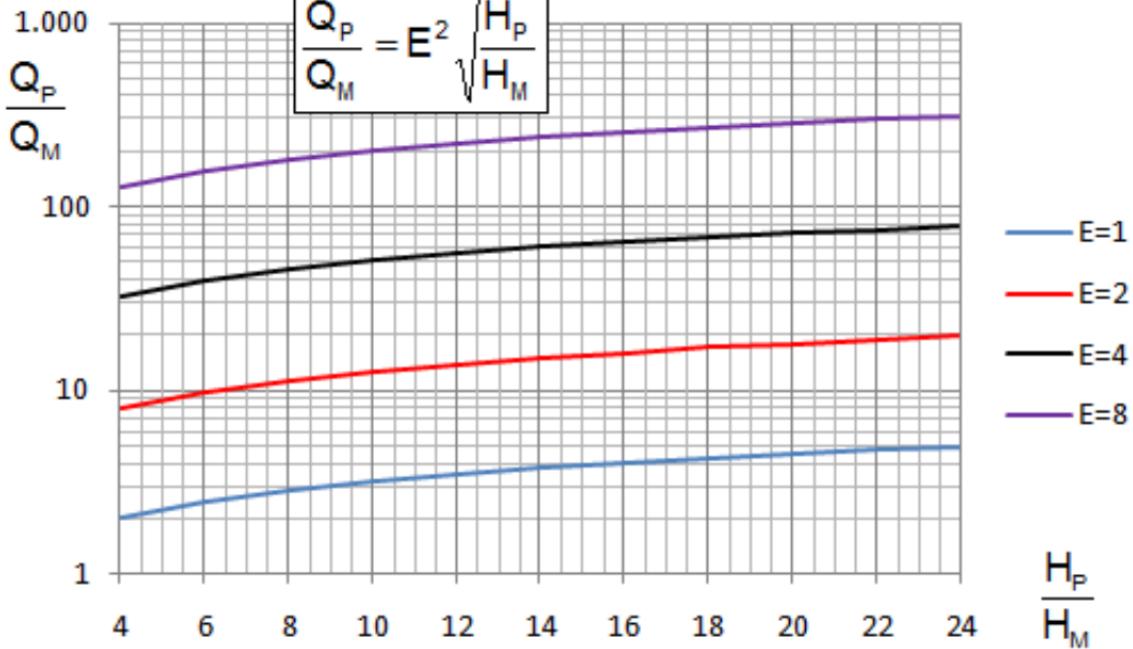
$$\frac{P_{e-P}}{P_{e-M}} = \left( \frac{D_P}{D_M} \right)^2 \sqrt{\frac{H_P \cdot \eta_{h-P}}{H_M \cdot \eta_{h-M}}} \cdot \frac{H_P \cdot \eta_{t-P}}{H_M \cdot \eta_{t-M}}$$

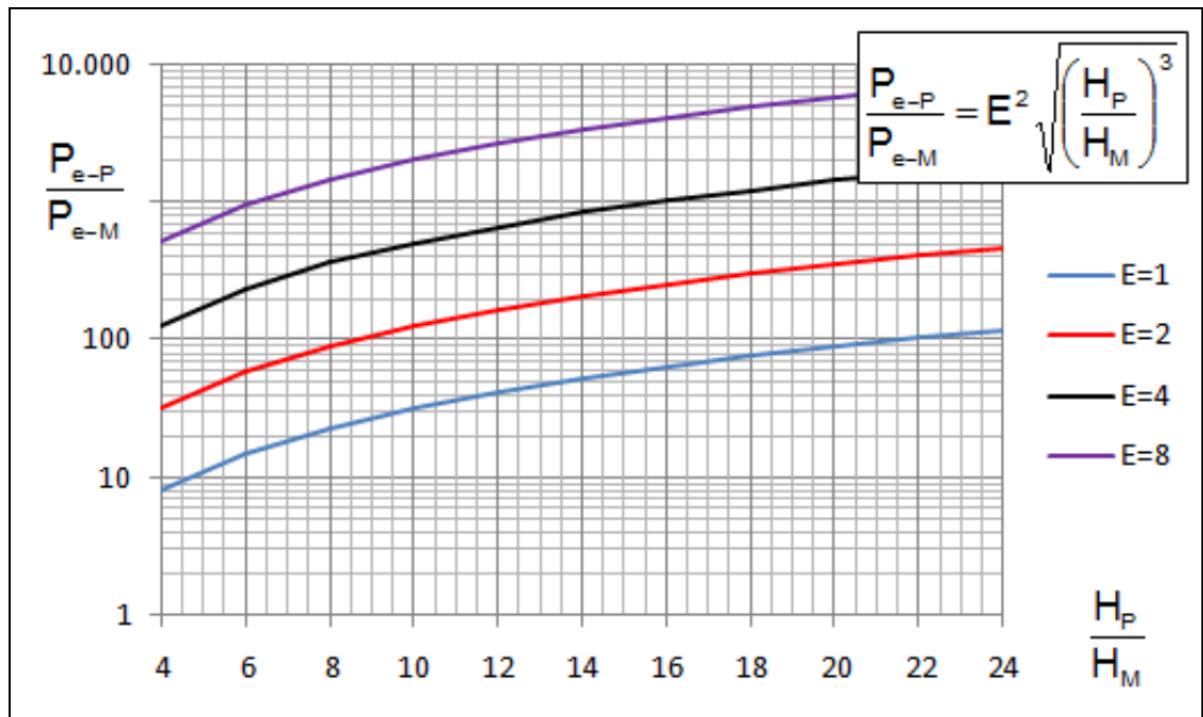
Considerando os rendimentos mecânico e volumétrico iguais para o modelo e para o protótipo, obtemos:

$$\frac{P_{e-P}}{P_{e-M}} = \left( \frac{D_P}{D_M} \right)^2 \cdot \sqrt{\left( \frac{H_P \cdot \eta_{h-P}}{H_M \cdot \eta_{h-M}} \right)^3} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{P_{e-P}}{P_{e-M}} = E^2 \cdot \sqrt{\left( \frac{H_P \cdot \eta_{h-P}}{H_M \cdot \eta_{h-M}} \right)^3}} \quad \text{MHM}$$







## 7.7) Exemplos de cálculos

### 7.7.1) Leis de Semelhança - Transposição de resultados

7.7.1.1) Rendimento constante - Determinar a altura de queda e a rotação do protótipo de uma turbina Francis de vazão 102 [m<sup>3</sup>/s] cujo modelo em escala 1:8 foi ensaiado em laboratório e suas grandezas medidas foram: i) vazão: 462 [l/s] , ii) Altura de queda: 4 [mCA] e iii) rotação: 520 [RPM]. Solução:

Equações a serem utilizadas:

$$\frac{Q_P}{Q_M} = E^2 \sqrt{\frac{H_P \cdot \eta_{h-P}}{H_M \cdot \eta_{h-M}}} \quad \text{e} \quad \frac{Q_P}{Q_M} = \frac{n_P}{n_M} E^3$$

Logo, considerando o mesmo rendimento hidráulico para modelo e protótipo:

$$\frac{102}{0,462} = 8^2 \sqrt{\frac{H_P}{4}} \quad \text{e} \quad \frac{102}{0,462} = \frac{n_P}{520} 8^3$$

$$H_P = 47,6 \text{ [mCA]}$$

e

$$n_P = 224 \text{ [RPM]}$$

### 7.2.1) Fórmulas para correção de rendimentos

Existem diversas propostas para correção de rendimentos entre protótipos e modelos, e serão apresentados somente duas correlações:

#### 7.2.1.1) Fórmula de Cammerer:

$$\frac{1 - \eta_{h-M}}{1 - \eta_{h-P}} = \frac{1,4 + (D_M)^{-1/2}}{1,4 + (D_P)^{-1/2}}$$

#### 7.2.1.2) Fórmula de Moody:

$$\frac{1 - \eta_{h-M}}{1 - \eta_{h-P}} = \left( \frac{D_P}{D_M} \right)^{1/4} \left( \frac{H_P}{H_M} \right)^{1/10}$$

7.7.1.2) Rendimento variável - Determinar a altura de queda e a rotação do protótipo da turbina Francis da questão anterior sendo que o rendimento hidráulico do modelo obtido em laboratório foi igual a 88%. Utilize a fórmula de Moody para avaliação da relações entre rendimentos do modelo e protótipo e as mesmas grandezas medidas para o modelo: i) vazão: 462 [l/s] , ii) Altura de queda: 4 [mCA] e iii) rotação: 520 [RPM]. Solução:

Equações a serem utilizadas:  $\frac{Q_p}{Q_m} = E^2 \sqrt{\frac{H_p \cdot \eta_{h-p}}{H_m \cdot \eta_{h-m}}}$ ,  $\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{n_p}{n_m} E^3$

$$e \quad \frac{1 - \eta_{h-m}}{1 - \eta_{h-p}} = \left( \frac{D_p}{D_m} \right)^{1/4} \left( \frac{H_p}{H_m} \right)^{1/10}$$

Considerando o resultado do exercício anterior (mesmo rendimento hidráulico para modelo e protótipo) como primeira estimativa para rendimentos na fórmula de Moody:

$$\frac{1 - 0,88}{1 - \eta_{h-p}} = 8^{1/4} \left( \frac{47,6}{4} \right)^{1/10} \quad \therefore \quad \frac{0,12}{1 - \eta_{h-p}} = 1,682 \times 1,472$$

$$1 - \eta_{h-p} = 0,048 \quad \therefore \quad \eta_{h-p} = 0,951 = 95,1\%$$

Refazendo o cálculo da altura de queda e rotação do protótipo, utilizando os rendimentos hidráulicos calculados, obtemos:

$$\frac{102}{0,462} = 8^2 \sqrt{\frac{H_p \times 0,951}{4 \times 0,88}} \quad \text{e} \quad \frac{102}{0,462} = \frac{n_p}{520} 8^3$$

$$H_p = 44 \text{ [mCA]}$$

e

$$n_p = 224 \text{ [RPM]}$$

A altura de queda calculada alterou-se em relação ao valor anteriormente obtido e a rotação calculada permaneceu a mesma. Refazendo o cálculo do rendimento hidráulico e da altura de queda do protótipo, em última iteração, obtemos:

$$\frac{1 - 0,88}{1 - \eta_{h-p}} = 8^{1/4} \left( \frac{44}{4} \right)^{1/10} \quad \therefore \quad 1 - \eta_{h-p} = 0,056 \quad \therefore$$

$$\eta_{h-p} = 0,944 = 94,4\%$$

### 7.3) Grandezas de funcionamento alteradas

As leis de semelhança são aplicadas para uma mesma máquina, tanto motora quanto geradora, trabalhando em condições alteradas. Mudando-se os índices M e P para 1 e 2, e fazendo  $D_M=D_P$ , considerando os rendimentos hidráulicos iguais tem-se somente uma equação:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{Q_2}{Q_1} = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}$$

Esta equação pode ser utilizada para se determinar a nova vazão e a nova elevação de uma bomba quando se altera a rotação desta. É importante ressaltar que esta transposição é somente válida próxima do ponto nominal (ou ponto de projeto), uma vez que considerou-se rendimentos iguais para os pontos 1 e 2.

7.7.1.3) Grandezas alteradas - Determinar a altura de elevação e vazão de uma bomba hidráulica cuja rotação foi alterada de 1.800 [RPM] para 1.600 [RPM], sendo que as grandezas de funcionamento iniciais eram: i) vazão: 65 [l/s], ii) altura de elevação: 40 [mCA]. Solução:

$$\frac{1.600}{1.800} = \frac{Q_2}{65} = \sqrt{\frac{H_2}{40}} \quad ---> \quad Q_2 = 57,8 \text{ [l/s]} \quad H_2 = 31,6 \text{ [mCA]}$$

## 7.4) Coeficientes para Máquinas Hidráulicas

São números que exprimem o tipo de MH, independente de sua dimensão, bem como suas características de operação.

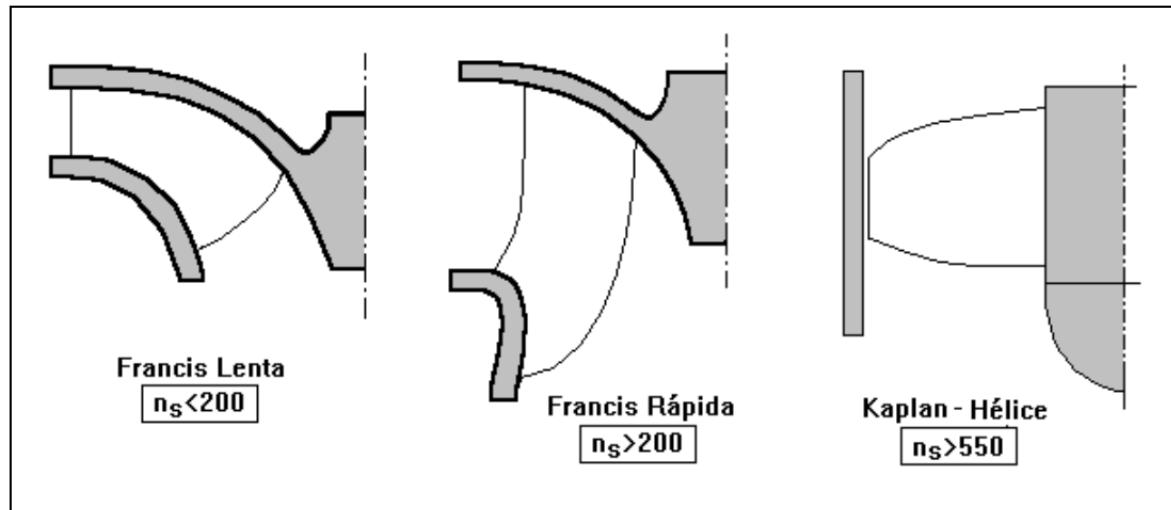


Fig. 7.2 - Relação entre rotação específica  
e o tipo de máquina



#### 7.4.1) Coeficientes unitários

Utilizando as leis de semelhança, e considerando rendimentos iguais, e usando  $H=1$  [m] e  $D=1$  [m] obtem-se os coeficientes unitários da máquina.

- Rotação unitária

É a rotação que teria a máquina para uma queda de  $H=1$  [m] e  $D=1$  [m]

$$\frac{n_{11}}{n} = \frac{D}{1} \sqrt{\frac{1}{H}}$$

logo:

$$n_{11} = \frac{nD}{\sqrt{H}}$$

- Vazão unitária

É a vazão que teria a máquina para uma queda de  $H=1$  [m] e  $D=1$  [m]

$$\frac{Q_{11}}{Q} = \frac{1}{D^2} \sqrt{\frac{1}{H}}$$

logo:

$$Q_{11} = \frac{Q}{D^2 \sqrt{H}}$$

- Potência unitária

É a potência que teria a máquina para uma queda de  $H=1$  [m] e  $D=1$  [m]

$$\frac{P_{11}}{P} = \frac{1}{D^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{H^3}}$$

logo:

$$P_{11} = \frac{P}{D^2 \cdot H^{3/2}}$$

## 7.4.2) Rotação específica

Existem vários tipos de coeficientes chamados de rotação específica, e devido ao fato de que desde o século XIX existem máquinas hidráulicas, os pesquisadores e os fabricantes foram adotando estes coeficientes para definir os diversos tipos de máquinas hidráulicas.

### 7.4.2.1) Rotação específica - $n_s$ e $n_{st}$

O número  $n_s$  de uma turbina é numericamente igual a rotação de uma turbina semelhante que com uma queda de  $H=1$  [m] sua potência de eixo seria  $P=1$  [HP]:

$$\frac{n_s}{n} = \frac{D}{D_s} \sqrt{\frac{1}{H}}$$

sendo  $D_s$  o diâmetro da turbina com  $P=1$  [HP]

$$\frac{P_{HP_{1/1}}}{1} = \left( \frac{D}{D_s} \right)^2 \sqrt{\left( \frac{H}{1} \right)^3}$$

Combinando as equações, temos:

$$\frac{P_{HP_{1/1}} \cdot n^2}{n_s^2} = H \sqrt{H^3}$$

Assim, a rotação específica  $n_s$  será:

$$n_s = \frac{n \cdot \sqrt{P_{HP_{1/1}}}}{H \cdot \sqrt[4]{H}} = \frac{n \cdot \sqrt{P_{HP_{1/1}}}}{\sqrt[4]{H^5}} \quad \text{com } n \text{ em [RPM]}, P_{1/1} \text{ em [HP]} \text{ e } H \text{ em [m]}$$

A rotação específica  $n_{st}$  utiliza o valor da potência máxima em [CV]

$$n_{st} = \frac{n \cdot \sqrt{P_{CV_{1/1}}}}{H \cdot \sqrt[4]{H}} = \frac{n \cdot \sqrt{P_{CV_{1/1}}}}{\sqrt[4]{H^5}} \quad \text{com } n \text{ em [RPM]}, P_{1/1} \text{ em [CV]} \text{ e } H \text{ em [m]}$$

#### 7.4.2.2) Rotação específica - $n_{qt}$ , $n_q$ e $n_{qA}$

Estas fórmulas de rotação específica utilizam a vazão como parâmetro:

$$n_{qt} = \frac{n \cdot \sqrt{Q}}{\sqrt[4]{H^3}} \quad \text{com } n \text{ em [RPM]}, Q \text{ em [m}^3/\text{s}] \text{ e } H \text{ em [m]}$$

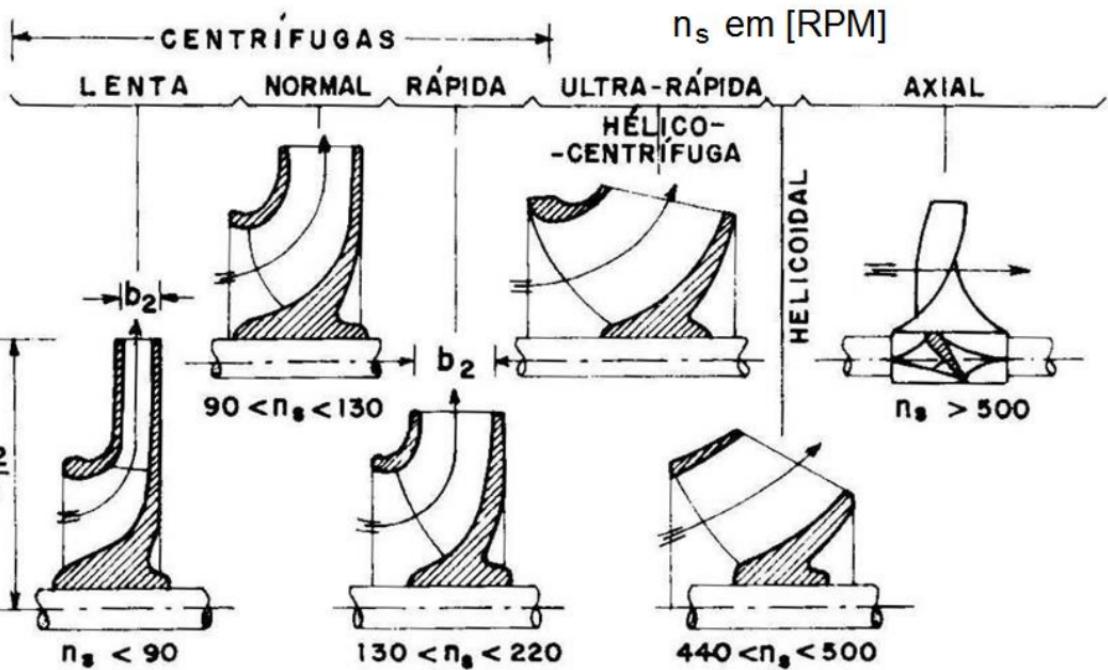
$$n_q = \frac{n \cdot \sqrt{Q}}{\sqrt[4]{(gH)^3}} \quad \text{com } n \text{ em [RPS]}, Q \text{ em [m}^3/\text{s}] \text{ e } H \text{ em [m]}$$

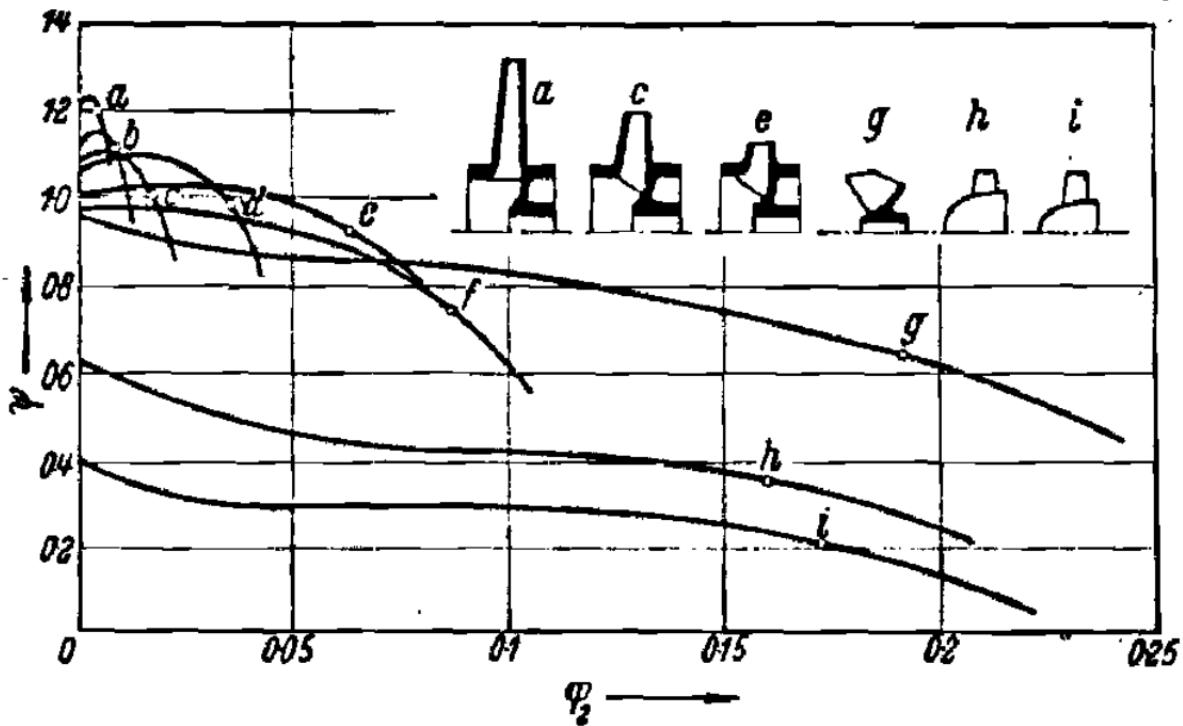
$$n_{qA} = 1000 \cdot n_q \quad \text{com } n \text{ em [RPS]}, Q \text{ em [m}^3/\text{s}] \text{ e } H \text{ em [m]}$$

#### 7.4.3) Outros coeficientes importantes:

- Coeficiente de vazão e coeficiente de pressão:

$$\varphi = \frac{4Q}{\pi D^2 u} = \frac{4Q}{\pi^2 D^3 n} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{2Y}{u^2} = \frac{2gH}{\pi^2 D^2 n^2}$$





## **7.5) Ensaios de modelos**

As máquinas de fluxo em geral possuem leis de semelhança que possibilitam seu estudo e desenvolvimento em modelos reduzidos, como foi visto para turbinas hidráulicas.

Estes testes são conduzidos há muitos anos nos bancos de ensaios de laboratórios de empresas e centros tecnológicos, que variam de dimensões, capacidade e limites.

Nas escolas de engenharia do Brasil temos dois laboratórios de porte suficientemente grande para realizar ensaios de modelo com confiabilidade nos resultados: o CTH da USP-São Paulo, e o LHEP da UNIFEI-Itajubá-MG.

Um exemplo de teste de turbinas hidráulicas é dado na tabela 7.1, onde dados de rotação, vazão, altura de queda (praticamente constante) e potência efetiva medidos são apresentados em função da abertura do distribuidor ( $\alpha$ ).

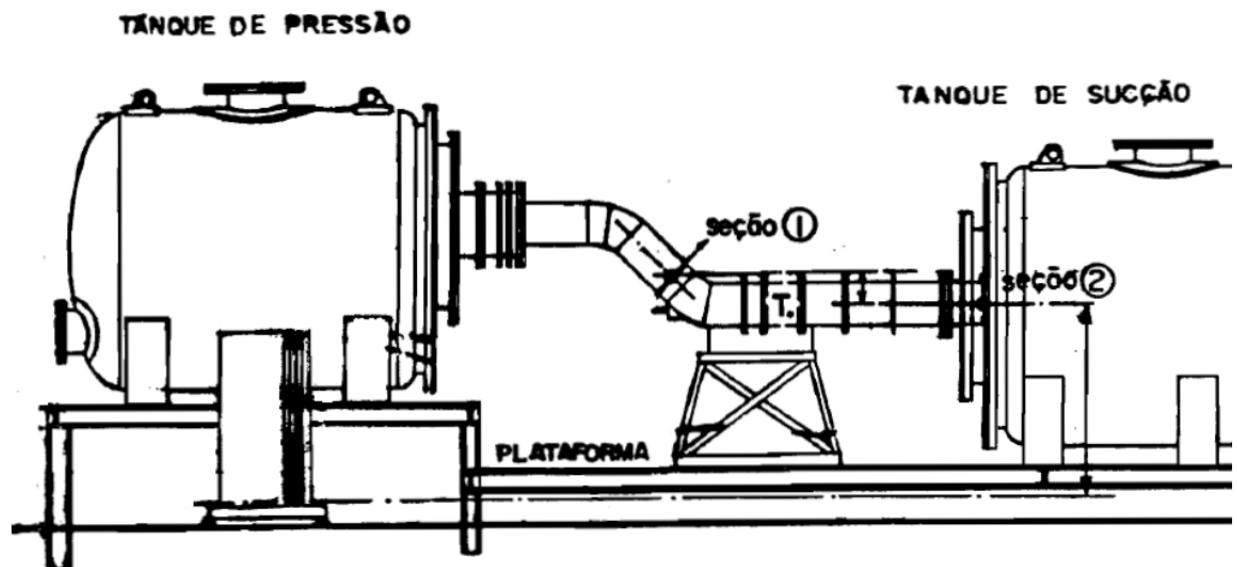


Fig. 7.3 - Vista lateral da Bancada de teste de turbinas - UNIFEI

$\alpha$	n	Q	H	P <sub>h</sub>	P <sub>ef</sub>	Q <sub>11</sub>	n <sub>11</sub>	$\eta_t$
-	[RPM]	[m <sup>3</sup> /s]	[m]	[C.V.]	[C.V.]	-	-	[%]
$\alpha_1$	1435	0,0218	3,31	0,962	0,000	0,648	107,3	0,0
$\alpha_1$	1230	0,0270	3,23	1,163	0,516	0,812	93,1	44,4
$\alpha_1$	1085	0,0279	3,12	1,161	0,682	0,854	83,5	58,8
$\alpha_1$	560	0,0311	2,97	1,231	0,626	0,976	44,2	50,8
$\alpha_1$	0	0,0302	3,07	1,236	0,000	0,932	0,0	0,0
$\alpha_2$	1433	0,0188	3,26	0,817	0,000	0,563	107,9	0,0
$\alpha_2$	990	0,0270	3,26	1,174	0,760	0,808	74,6	64,8
$\alpha_2$	525	0,0290	3,16	1,222	0,551	0,882	40,2	45,1
$\alpha_2$	0	0,0274	3,22	1,176	0,000	0,825	0,0	0,0
$\alpha_3$	1432	0,0157	3,30	0,691	0,000	0,467	107,2	0,0
$\alpha_3$	1270	0,0196	3,27	0,854	0,355	0,586	95,5	41,6
$\alpha_3$	655	0,0237	3,28	1,036	0,666	0,707	49,2	64,3
$\alpha_3$	485	0,0237	3,27	1,033	0,441	0,708	36,5	42,7
$\alpha_3$	0	0,0237	3,28	1,036	0,000	0,707	0,0	0,0
$\alpha_4$	1380	0,0126	3,30	0,554	0,000	0,375	103,3	0,0
$\alpha_4$	1049	0,0167	3,29	0,732	0,440	0,498	78,7	60,1
$\alpha_4$	483	0,0185	3,32	0,819	0,338	0,549	36,0	41,3
$\alpha_4$	0	0,0189	3,30	0,832	0,000	0,562	0,0	0,0

Tabela 7.1 - Ensaio de Turbina Francis com queda constante (D=0,136 [m])

Na figura 7.4 são apresentados os resultados na forma dimensional  $Q$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ] x  $n$  [RPM], considerando uma altura de queda constante.

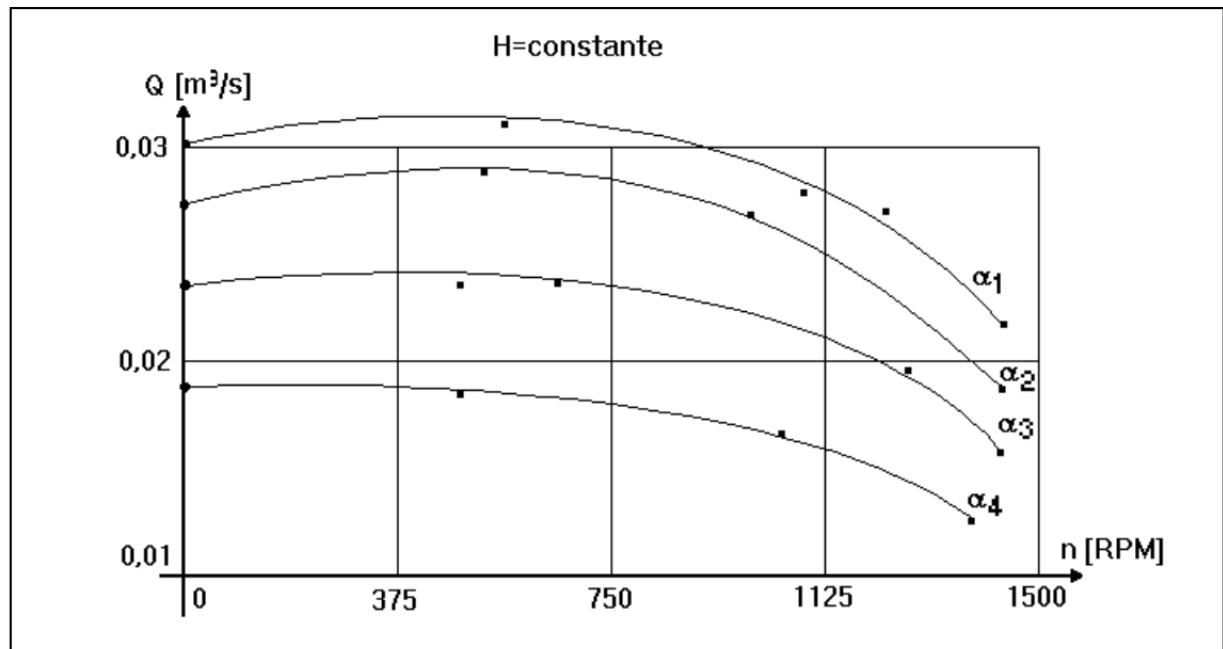


Fig. 7.4 - Diagrama para  $H$  constante

Na figura 7.5 são apresentados os resultados utilizando os coeficientes unitários  $Q_{11} \times n_{11}$  :

$$Q_{11} = \frac{Q}{D^2 \sqrt{H}}$$

e

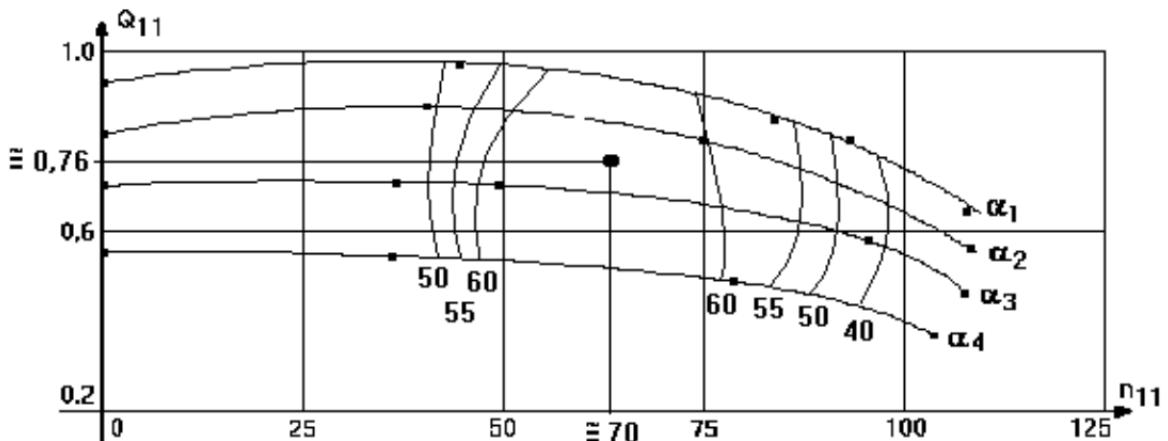
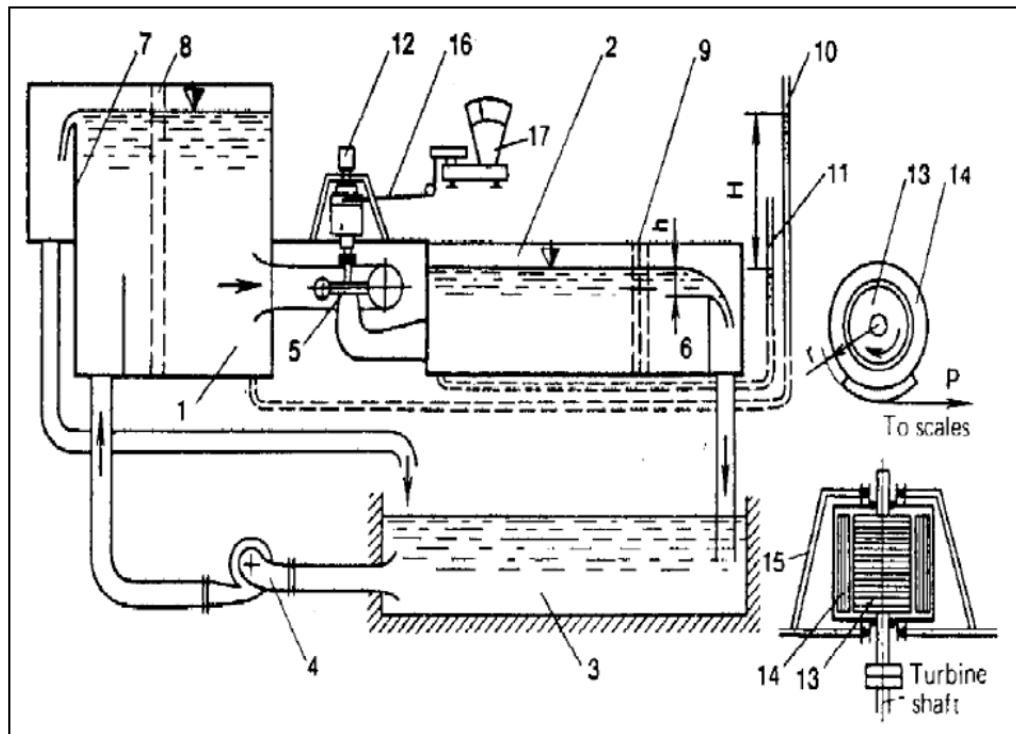
$$n_{11} = \frac{nD}{\sqrt{H}}$$


Fig. 7.4 - Diagrama unitário  $Q_{11} = f(n_{11})$

Para esta máquina, o ponto de máximo rendimento terá os coeficientes unitários iguais a  $Q_{11} = 0,76$  e  $n_{11} = 70$ , respectivamente.

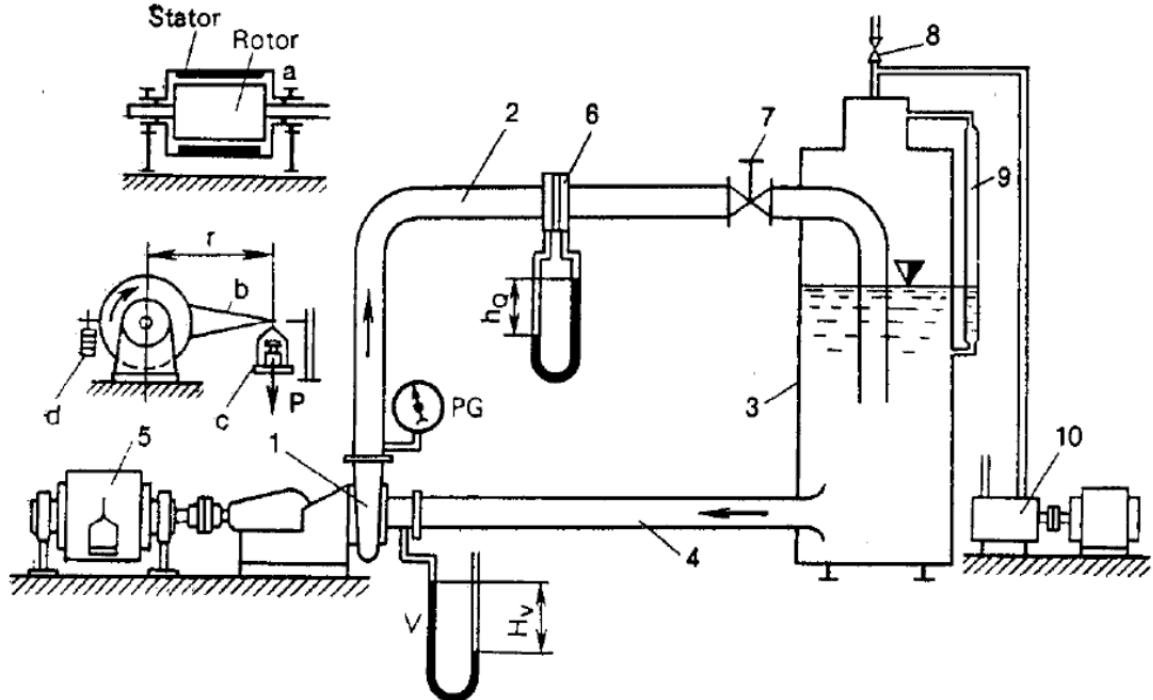
## Configuração básica de bancada de testes de turbinas



## Bancada de testes de turbinas



## Configuração básica de bancada de testes de bombas



## **7.6) Faixa de trabalho para maiores rendimentos**

Nas aplicações práticas de máquinas hidráulicas deve-se observar que existe um histórico de maiores rendimentos que foram obtidos, relacionando rotação específica e altura de queda para turbinas, e rotação específica e altura de elevação para bombas hidráulicas.

A Fig. 7.6 apresenta a faixa de rotação específica onde se obtém os melhores rendimentos em função da altura de queda, e na Fig. 7.7 apresenta-se o gráfico equivalente para bombas hidráulicas.

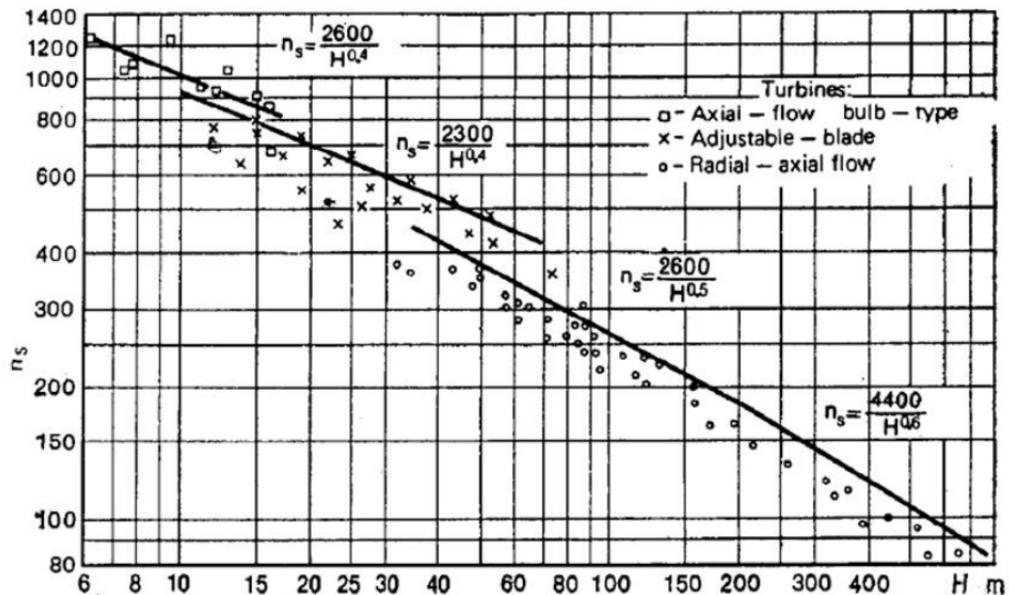


Fig. 7.6 - Faixa de rotação específica em função da altura de queda para melhores rendimentos máximos em turbinas [2]

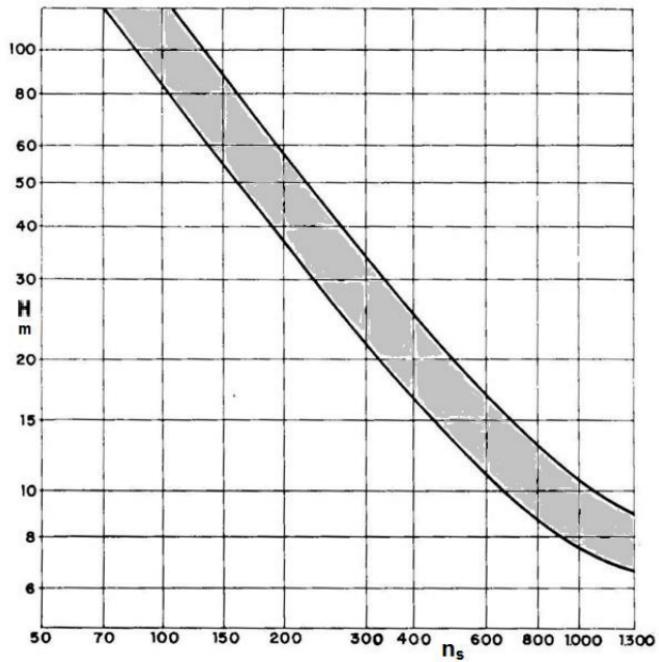
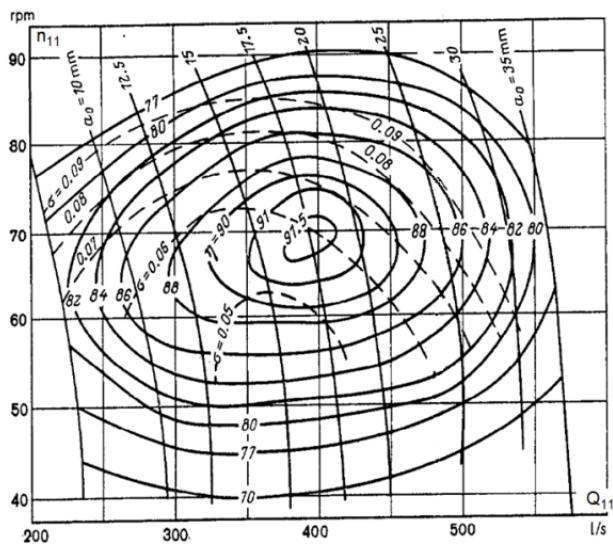


Fig. 7.7 - Faixa de rotação específica em função da altura de queda para melhores rendimentos máximos em bombas

## 7.7) Exemplos de cálculos

### 7.7.2) Coeficientes adimensionais - Ensaios de modelos

Um modelo de turbina hidráulica foi testada em laboratório (diâmetro do modelo = 0,46 [m] e altura de queda = 4 [m]) e os resultados foram plotados na forma de um gráfico  $n_{11}$  (RPM) x  $Q_{11}$  (lit/s).



Calcule, para uma turbina semelhante na condição de altura de queda de  $H = 30 \text{ [m]}$  e vazão de  $Q = 2 \text{ [m}^3/\text{s}]$ , qual deverá ser a rotação, o diâmetro e a potência de eixo, no ponto de melhor rendimento, da máquina no aproveitamento hidrelétrico.

Os resultados do teste apresentado na forma gráfica indica que os valores dos coeficientes unitários para o ponto de melhor rendimento são:

$$Q_{11} = \frac{Q}{D^2 \sqrt{H}} = 400 \text{ [l/s]} \quad \text{e} \quad n_{11} = \frac{nD}{\sqrt{H}} = 70 \text{ [RPM]}$$

Assim, ao fixarmos a altura de queda e a vazão podemos determinar as grandezas diâmetro e rotação da máquina na usina:

$$400 = \frac{2.000}{D^2 \sqrt{30}} \quad \text{e} \quad 70 = \frac{nD}{\sqrt{30}}$$

$$D^2 = \frac{5}{\sqrt{30}} \quad \text{e} \quad n = \frac{70\sqrt{30}}{D}$$

$$\boxed{D = 0,955 \text{ [m]}} \quad \text{e} \quad \boxed{n = 401,3 \text{ [RPM]}}$$

Para calcular a potência efetiva da turbina é necessário estimar o rendimento desta, utilizando a fórmula de Moody, por exemplo. Neste exemplo, consideraremos que o rendimento indicado no gráfico é o rendimento hidráulico e que o rendimento volumétrico e o rendimento mecânico da turbina no aproveitamento serão igual a 98%.

$$\frac{1-\eta_{h-M}}{1-\eta_{h-P}} = \left( \frac{D_p}{D_M} \right)^{1/4} \left( \frac{H_p}{H_M} \right)^{1/10} \quad \therefore \quad \frac{1-0,915}{1-\eta_{h-P}} = \left( \frac{0,955}{0,46} \right)^{1/4} \left( \frac{30}{4} \right)^{1/10}$$

$$\frac{1-0,915}{1-\eta_{h-P}} = 1,468 \quad \therefore \quad 1-\eta_{h-P} = 0,0579$$

$$\boxed{\eta_{h-P} = 94,2\%} \quad \therefore \quad \eta_t = \eta_h \eta_v \eta_m = 0,942 \times 0,98 \times 0,98 \quad \therefore$$

$$\boxed{\eta_t = 90,5\%}$$

Então:

$$P_e = \eta_t \rho g Q H = 0,905 \times 9.780 \times 2 \times 30$$

$$\boxed{P_e = 531 \text{ [kW]}}$$

### 7.7.3) Faixa de trabalho para maiores rendimentos.

7.7.3.1) Turbinas hidráulicas - Na especificação de turbinas hidráulicas pode-se considerar, primeiramente, a escolha da rotação específica (Fig. 7.5) uma vez que a altura de queda dependerá do aproveitamento hidrelétrico. Determine a rotação em [RPM] de uma turbina para ser utilizada em um aproveitamento com 80 [m] de queda cuja vazão máxima por máquina será de 20 [m<sup>3</sup>/s]. Adote outros parâmetros necessários.

Pela figura 7.5, para uma queda de 80 [m], a rotação específica para maior rendimento é  $n_s = 300$ .

$$\text{Sendo } n_s = \frac{n \cdot \sqrt{P_{HP_{1/1}}}}{\sqrt[4]{H^5}}, \quad \text{temos: } 300 = \frac{n \cdot \sqrt{P_{HP_{1/1}}}}{\sqrt[4]{80^5}} \quad \text{ou}$$

$$n \cdot \sqrt{P_{HP_{1/1}}} = 71.776$$

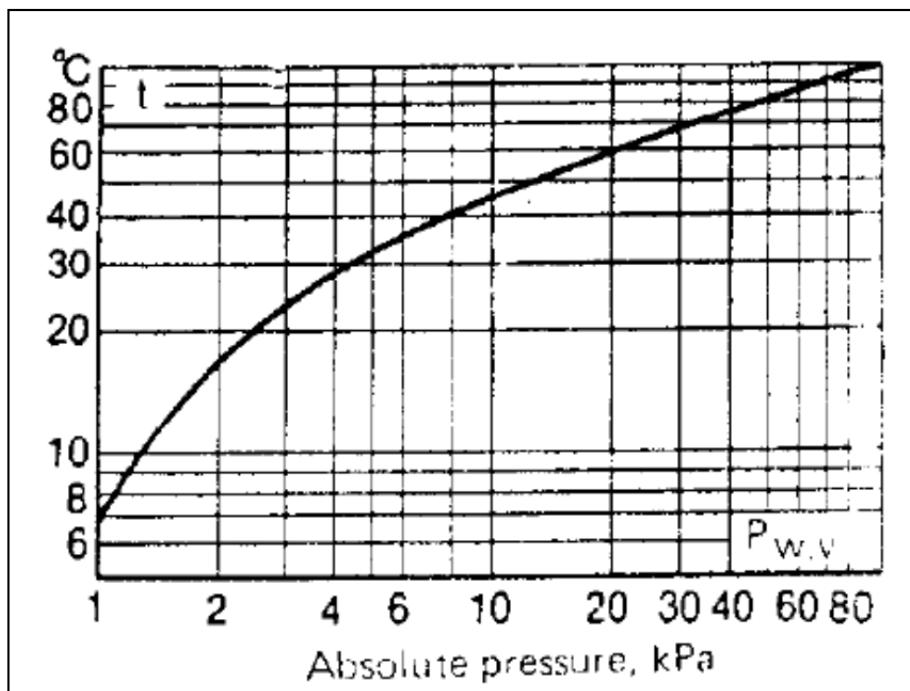
Mas  $P_{HP_{1/1}} = \eta_t \rho g Q_{1/1} H / 745$ , adotando rendimento total igual a 85%, temos:

$$P_{HP_{1/1}} = 0,85 \times 9.780 \times 20 \times 80 / 745 \quad \text{ou} \quad P_{HP_{1/1}} = 17.853 \text{ [HP]}$$

$$\text{Assim} \quad n \cdot \sqrt{17.853} = 71.776$$

$$n \times 133,6 = 71.776 \quad \text{logo} \quad n = 537 \text{ [RPM]}$$

## Capítulo 8 - Cavitação



## **8.1) Introdução**

O estudo das condições de operação de turbinas mostrou que baixas pressões são criadas na saída do rotor, o que também ocorre na seção de entrada das bombas hidráulicas.

Assim, em determinadas condições operacionais de qualquer máquina hidráulica, se a pressão absoluta média no escoamento for igual ou um pouco maior que a pressão de vapor de água na temperatura do escoamento, surgirão núcleos ou bolhas de vapor de água no escoamento turbulento, pois a pressão absoluta em diversos pontos poderá ser igual ou menor que a pressão de vapor da água, ocasionando o fenômeno de cavitação.

Nos pontos do escoamento em que a pressão absoluta aumenta novamente, as bolhas implodirão violentamente e as partículas fluidas atingem as paredes fixas e/ou as pás, causando solicitações mecânicas elevadas no material e consequente erosão por cavitação.

A figura 8.1 ilustra os níveis de desenvolvimento do fenômeno de cavitação em perfis de pás, em condições de baixa pressão com escoamento com altos ângulos de incidência (entrada com choque).

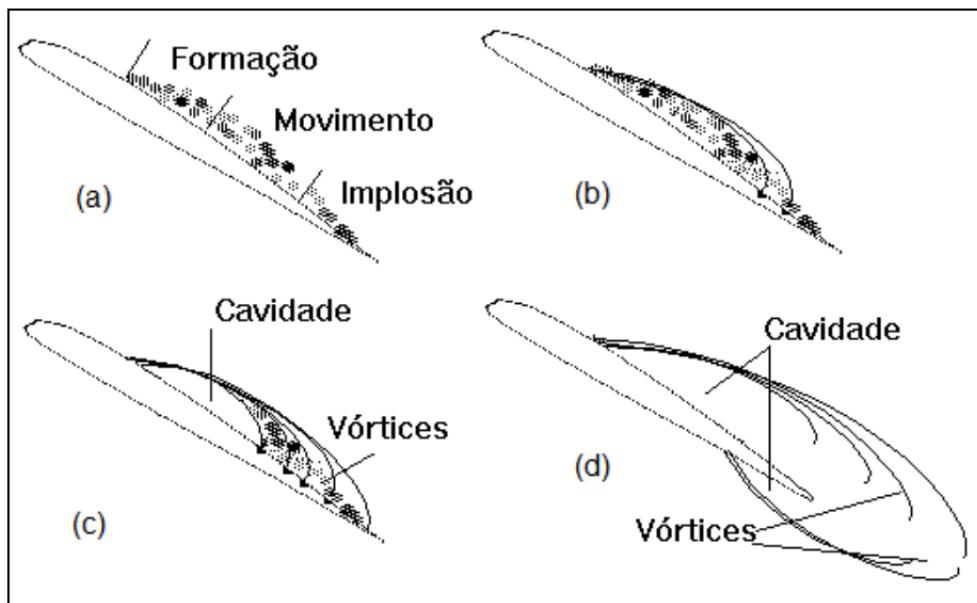
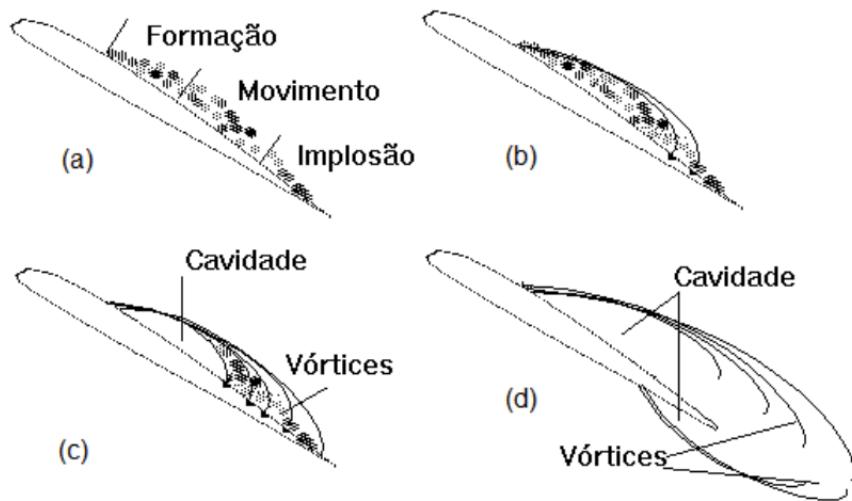
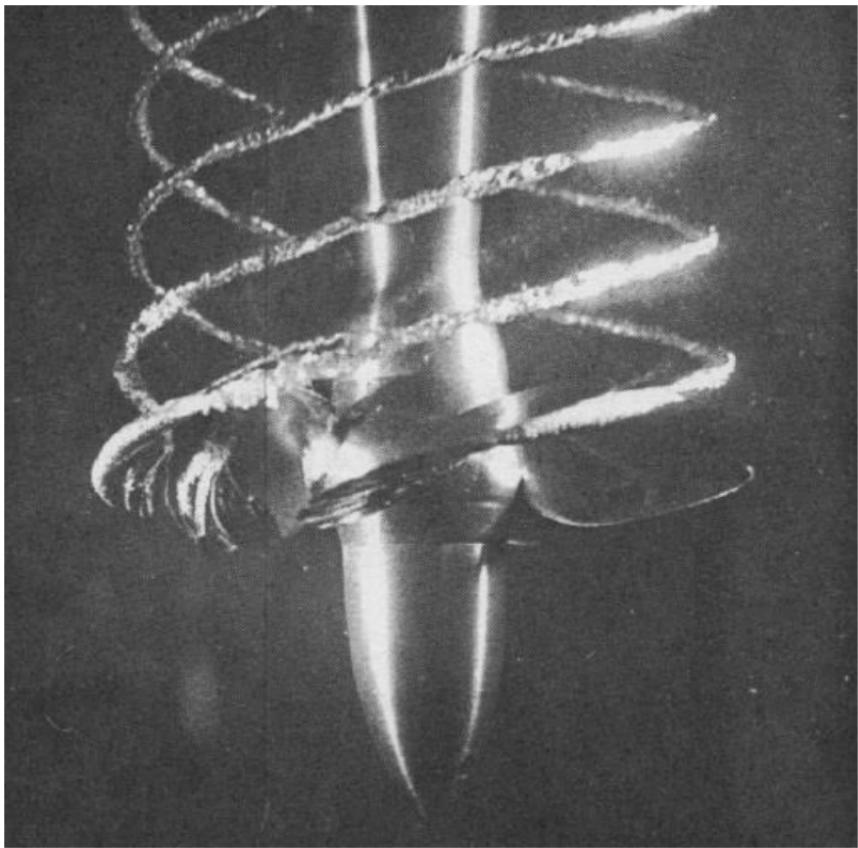


Fig. 8.1 - Cavitação em perfis de pás em vários níveis de desenvolvimento

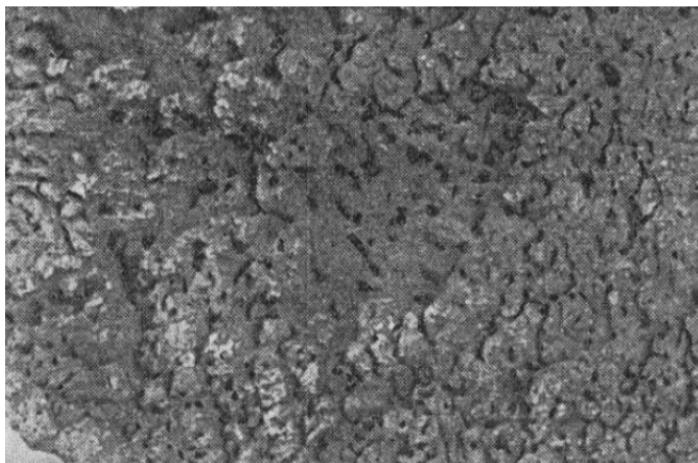
- a) Cavitação inicial - Formação e implosão de núcleos: os núcleos aparecem isolados.
- b) Cavitação zonal - Caracteriza-se pelo aparecimento e implosão dos núcleos junto com vórtices pulsantes do fluxo.
- c) Cavitação separada - Existe uma cavidade separada do líquido.
- d) Supercavitação - O espaço da cavidade é desenvolvido de um modo que fecha os contornos de saída da pá.





Tem-se as seguintes consequências sobre a máquina hidráulica com o fenômeno da cavitação, tanto para bombas quanto para turbinas:

- Queda do rendimento e da potência útil;
- Ruídos e vibrações excessivas;
- Erosão rápida e custos excessivos de manutenção;
- Fatiga do material das pás em outros pontos.









## 8.2) Altura estática de sucção e coeficiente de cavitação

A definição de altura estática de sucção,  $h_s$ , para uma determinada turbina instalada em um usina é ilustrada na figura 8.2, sendo este valor igual a diferença de nível entre o nível de jusante e o nível de referência na máquina, definido por norma (geralmente escolhe-se o nível do diâmetro de saída do rotor como referência).

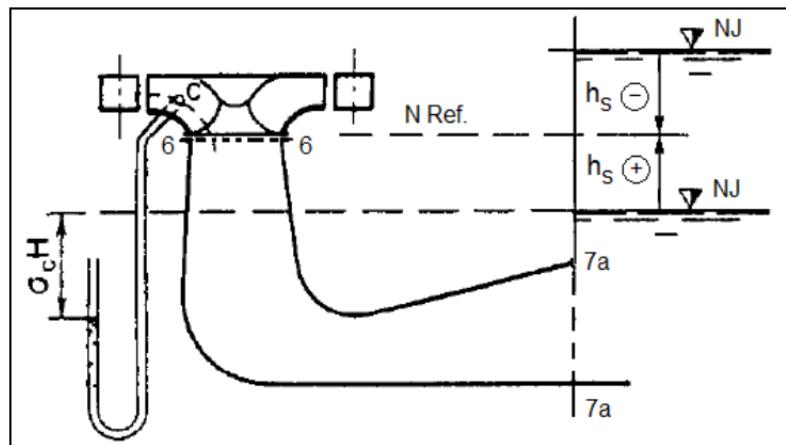


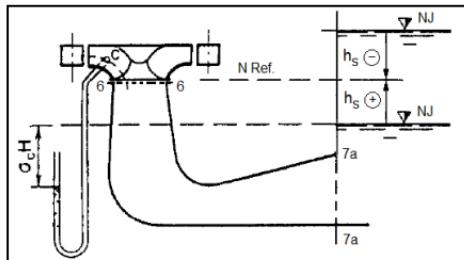
Fig. 8.2 - Definição de altura estática de sucção [2]

É importante observar que a altura estática de sucção pode variar devido as condições operacionais da usina (o que também ocorre para uma bomba hidráulica que segue a mesma definição) sendo que a altura estática é negativa quando a máquina está “afogada” (abaixo do nível de jusante) e positiva quando a máquina está “não afogada” (acima do nível de jusante).

Será a altura estática de sucção que definirá as condições para que uma máquina específica apresente ou não o fenômeno de cavitação.

Para se obter a equação que define a altura estática de sucção compara-se a pressão absoluta média no ponto crítico com a pressão de vaporização da água na temperatura dada, como mostrado a seguir.

Aplicando-se a equação de Bernoulli entre as seções 6 e 7a (seção de entrada e saída do tubo de sucção - ver Fig. 8.2), sendo,  $h_{suc}$ , a perda de carga neste tubo, tem-se:

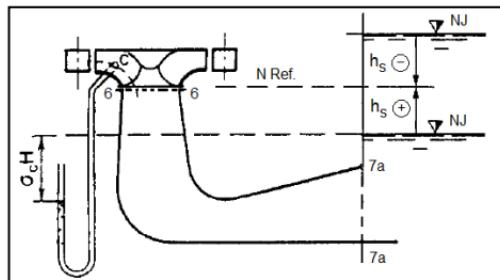


$$\frac{p_6}{\gamma} + Z_6 + \alpha_6 \frac{V_6^2}{2g} = \frac{p_{7a}}{\gamma} + Z_{7a} + \alpha_{7a} \frac{V_{7a}^2}{2g} + h_{suc} \quad [\text{mCA}]$$

Observando que a cota da seção 6 é aproximadamente igual a altura estática de sucção ( $Z_6 \approx h_s$ ) e considerando desprezível a perda de carga entre a seção de saída do tubo de sucção (7a) e o nível de jusante:

$$\frac{p_{7a}}{\gamma} + Z_{7a} = \frac{p_{atm}}{\gamma} \quad (Z_{7a} < 0),$$

temos que a pressão absoluta na seção de saída da turbina será igual a:



$$\frac{p_6}{\gamma} = \frac{p_{atm}}{\gamma} - h_s - \left( \alpha_6 \frac{V_6^2}{2g} - \alpha_{7a} \frac{V_{7a}^2}{2g} - h_{suc} \right) \quad [\text{mCA}]$$

A pressão mais baixa no rotor se dará em um ponto crítico entre as seções de entrada e a saída deste. Esta pressão pode ser correlacionada com

a pressão na seção de saída da turbina através de um coeficiente de perda  $k_{c-6}$  vezes a pressão dinâmica no ponto crítico:

$$\frac{p_c}{\gamma} = \frac{p_6}{\gamma} - k_{c-6} \frac{V_c^2}{2g}$$

Da mesma maneira, a perda por atrito no tubo de sucção pode ser correlacionada com a pressão dinâmica na seção de saída do rotor:

$$h_{suc} = k_{suc} \frac{V_6^2}{2g}$$

Assim, substituindo as duas expressões anteriores na equação para a pressão na seção de saída da turbina, obtém-se a pressão no ponto crítico:

$$\frac{p_c}{\gamma} = \frac{p_{atm}}{\gamma} - h_s - \left( \alpha_6 \frac{V_6^2}{2g} - \alpha_{7a} \frac{V_{7a}^2}{2g} - k_{suc} \frac{V_6^2}{2g} + k_{c-6} \frac{V_c^2}{2g} \right)$$

Pode-se mostrar [2] que a expressão nos parêntesis é proporcional a altura de queda sobre a turbina. Então, a mesma equação pode ser expressa na forma:

$$h_c = h_b - h_s - \sigma_{lim} \cdot H$$

A constante de proporcionalidade  $\sigma_{lim}$  é denominada coeficiente de cavitação, ou coeficiente de Thoma, e dependerá das condições de operação da máquina.

Na utilização prática do coeficiente de cavitação,  $\sigma_{lim}$ , este é usado para se determinar a altura estática de sucção máxima que deve trabalhar a máquina para que não ocorra o fenômeno e suas consequências.

O critério será manter a pressão no ponto crítico sempre acima da pressão de vaporização da água. Desta maneira a equação anterior se torna uma inequação considerando o critério definido, onde  $h_v$  é a pressão de vaporização da água na temperatura do escoamento:

$$h_c = h_b - h_s - \sigma_{lim} \cdot H > h_v$$

Consequentemente, a expressão acima se torna uma inequação que define o valor máximo para a altura estática de sucção para que não ocorra cavitação:

$$h_s < h_b - h_v - \sigma_{lim} H \quad \text{onde:}$$

$h_s$  = altura estática de sucção em [mCA]

$h_b$  = altura barométrica em [mCA]

$h_v$  = altura equivalente a pressão de vapor na temperatura do escoamento

$H$  = altura líquida de queda.

Para simplificar a expressão acima desprezamos  $h_v$  por ser muito pequeno em relação a  $h_b$ , e usaremos  $h_b$  em função da altitude local em relação ao nível do mar (A em [m]) da instalação, a qual permite determinar a altura estática de succão máxima que uma determinada máquina deve operar para que não ocorra cavitação:

$$h_s < 10,34 - \frac{A}{900} - \sigma_{lim} H$$

### **8.3) Ensaios de cavitação em turbinas**

Para se estabelecer o coeficiente de cavitação,  $\sigma_{lim}$ , de cada máquina, deve-se realizar ensaios de cavitação em modelos, cujos resultados podem ser utilizados para protótipos. A figura 8.3 mostra uma instalação típica de teste de cavitação, onde a pressão na superfície no reservatório de saída é controlada por uma bomba de vácuo.

Neste tipo de instalação de teste de cavitação, a altura estática de sucção imposta sobre a turbina é dada pela expressão:  $h_s = h_a + h_{vac}$  ( $h_a$  é um valor negativo, conforme figura e  $h_{vac}$  é sempre positivo).

Assim, ao aumentarmos o vácuo produzido pela bomba,  $h_s$  aumenta (como se a turbina estivesse cada vez menos afogada), e consequentemente, o coeficiente de cavitação para cada altura de sucção, dado pela expressão abaixo, diminui.

$$\sigma = \frac{10,34 - A/900 - h_s}{H}$$

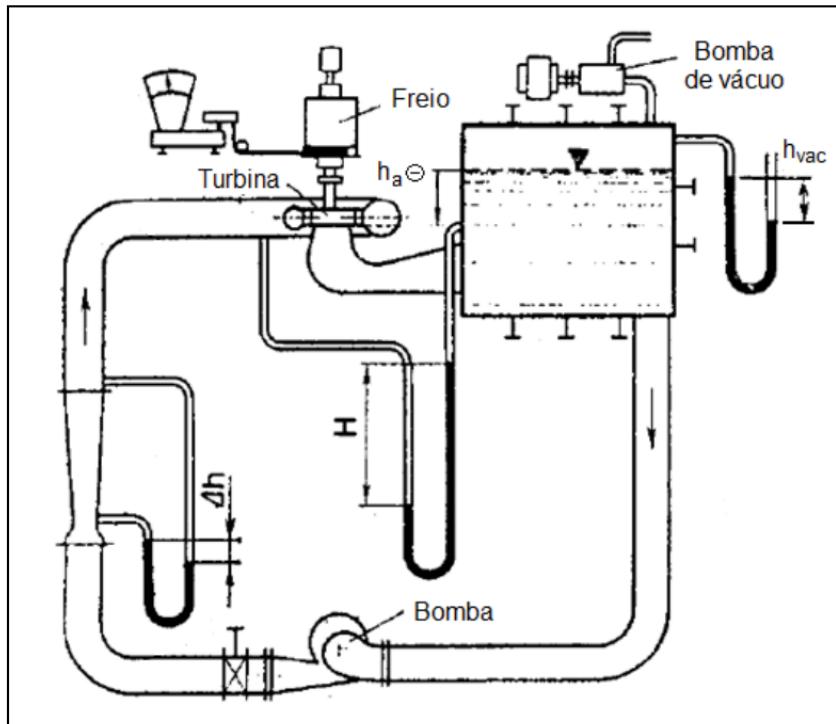


Fig. 8.3 - Instalação típica para teste de cavitação [2]

Neste tipo de bancada, a altura de queda,  $H$ , sobre a turbina é praticamente constante e será dada pela bomba, através de ajustes na rotação desta.

O principal objetivo de um teste de cavitação será obter o coeficiente de cavitação crítico, que corresponde aquele condição de funcionamento onde a eficiência começa a declinar em função da diminuição do coeficiente de cavitação (correspondente a elevação da altura estática de sucção), como mostra a figura 8.4 (rendimento em função do coeficiente de cavitação).

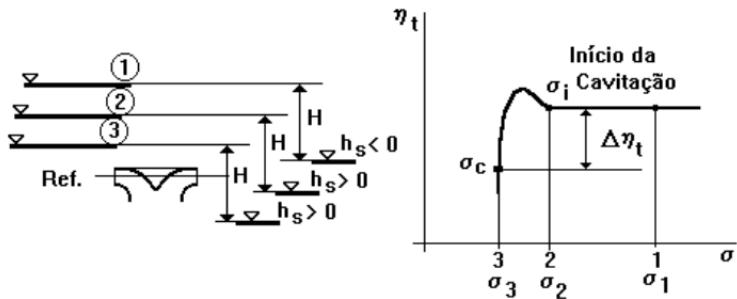


Fig. 8.4 - Ensaio de cavitação - Rendimento x Coef. de Thoma

O resultado típico de um teste de cavitação apresentado na figura 8.4 mostra o rendimento aumentando ligeiramente (não ocorre para todas as turbinas) com o decréscimo do coeficiente de cavitação, para em seguida sofrer uma queda abrupta.

O ponto 2 representa o inicio da cavitação e o coeficiente de cavitação neste ponto é chamado coeficiente de cavitação inicial,  $\sigma_i$ .

O ponto 3 representa o coeficiente de cavitação para uma queda de rendimento  $\Delta\eta_t$  de 2%, e este valor é chamado de coeficiente de cavitação crítico,  $\sigma_c$ . O valor de  $\sigma_{lim}$  é calculado a partir de  $\sigma_c$  com 15 a 30% de segurança:

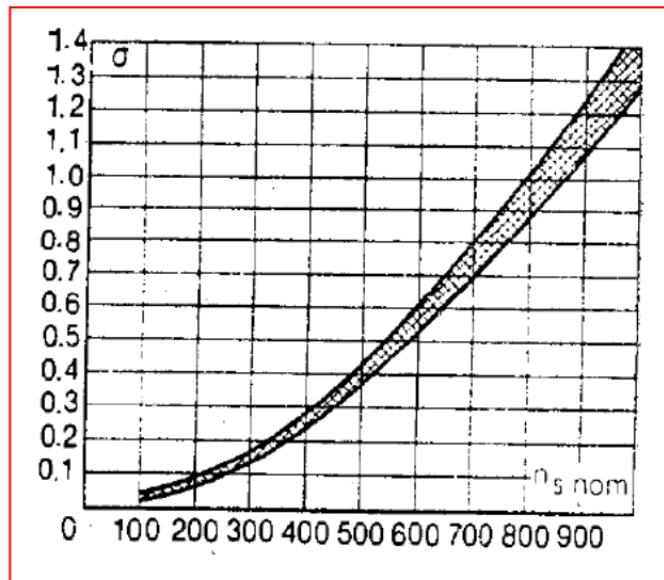
$$\sigma_{lim} = (1,15 \text{ a } 1,3) \sigma_c$$

### 8.3.1) Coeficiente de cavitação em função da rotação específica $n_s$

Pode-se mostrar ([1] [3]) que o coeficiente de cavitação,  $\sigma_{lim}$ , representa um número adimensional e possui valores próximos para máquinas semelhantes.

A seguinte equação [2] simples pode ser utilizada para expressar o coeficiente de cavitação em função da rotação específica de uma turbina hidráulica:

$$\sigma_{lim} = \frac{(n_s + 30)^{1,8}}{200.000}$$



## 8.5) Exemplos de cálculos

### 8.5.1) Cavitação em turbinas

8.5.1.1) Altura estática de succão: Calcule a altura estática mínima na sucção de uma turbina com coeficiente de cavitação limite igual a 0,2 , para esta máquina trabalhar em um local a 1.000 de altitude e com queda de 50 m.  
Solução:

$$h_s < 10,34 - \frac{A}{900} - \sigma_{lim} H$$

$$h_s < 9,22 - 10$$

$$h_s < 10,34 - \frac{1.000}{900} - 0,2 \times 50$$

$$h_s < -0,78 \quad (\text{máquina afogada})$$

8.5.1.2) Ocorrência de cavitação: Uma máquina foi instalada com altura estática na sucção igual a 2 [m] (não afogada). Se esta turbina possui coeficiente de cavitação limite igual a 0,1, e foi instalada em um local a 500 de altitude e com queda de 100 m, ela irá cavar?

$$h_s < 10,34 - \frac{500}{900} - 0,1 \times 100$$

$$h_s < 9,78 - 10 = -0,22 \text{ [m]}$$

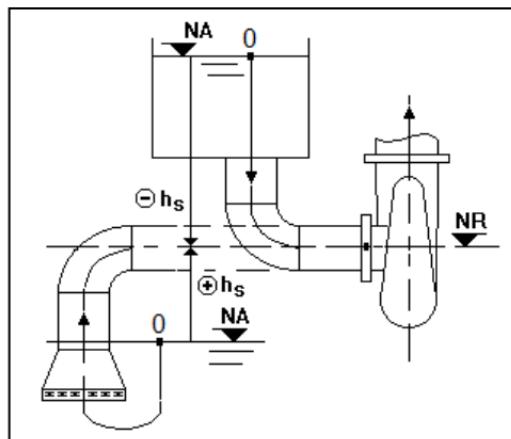
Irá cavar, pois  $h_s = 2 \text{ [m]}$  é maior que  $-0,22 \text{ [m]}$

## 8.4) Altura estática de sucção e NPSH em bombas hidráulicas

De maneira semelhante ao que ocorre em turbinas, a altura estática de sucção para bombas hidráulicas é o parâmetro operacional que caracteriza a ocorrência ou não do fenômeno de cavitação na máquina.

A equação utilizada para bombas, para cálculo da altura estática de sucção, leva em conta a perda de carga na tubulação de sucção,  $h_{p-s}$ , uma vez

que esta parte da instalação não faz parte da máquina propriamente dita.



Esta equação, que utiliza um coeficiente experimental NPSH (Net positive suction head), determinado para cada bomba hidráulica, ao invés do produto  $\sigma_{lim} \cdot H$  para turbinas, é:

$$h_s < h_b - h_v - h_{p-s} - \text{NPSH}$$

Fig. 8.5 - Instalação de bombeamento quanto a altura estática de sucção

Considerando que o termo relativo a pressão barométrica será igual ao utilizado para turbinas (reservatório de sucção da bomba aberto a atmosfera) e que a pressão de vaporização é desprezível, a expressão para  $h_s$  de bombas hidráulicas se torna:

$$h_s < 10,34 - \frac{A}{900} - h_{p-s} - NPSH$$

A figura 8.5 apresenta as condições de instalação de uma bomba hidráulica quanto a altura estática de sucção (bomba afogada  $h_s < 0$  - bomba não afogada  $h_s > 0$ ).

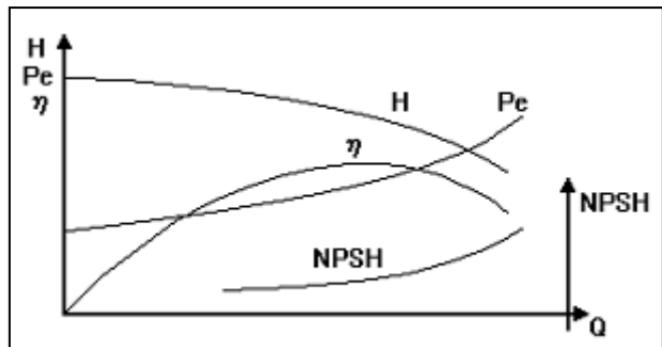


Fig. 8.6 - Curvas características de bomba ( $H$ ,  $P_e$ ,  $\eta$  e  $NPSH \times Q$ )

A figura 8.6 mostra um gráfico típico para uma bomba hidráulica, onde se mostra, em função da vazão: altura de elevação,  $H$ , potência de eixo,  $P_e$ , eficiência,  $\eta$  e o coeficiente  $NPSH$ .

## 8.5) Exemplos de cálculos

### 8.5.2) Cavitação em bombas

8.5.2.1) Altura estática de succão: Calcule a altura estática mínima na sucção de uma bomba com NPSH igual a 10, para esta máquina trabalhar em um local a 1.000 de altitude e com perda de carga de 0,5 m na sucção.

$$h_s < 10,34 - \frac{A}{900} - h_{p-s} - NPSH$$

$$h_s < 9,22 - 0,5 - 10$$

$$h_s < 10,34 - \frac{1.000}{900} - 0,5 - 10$$

$$h_s < -1,28 \quad (\text{máquina afogada})$$

8.5.2.2) Ocorrência de cavitação #1: Uma bomba hidráulica foi instalada com altura estática na sucção igual a 5 [m] (não afogada). Se esta bomba possui NPSH igual a 6, e foi instalada em um local a 500 de altitude e com perda de carga na sucção de 2 [m], esta bomba irá cavitar?

$$h_s < 10,34 - \frac{500}{900} - 2 - 6$$

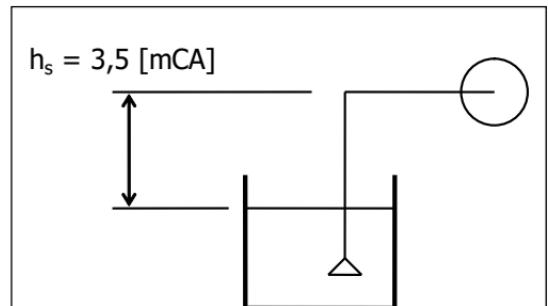
$$h_s < 9,78 - 8 = 1,78 \text{ [m]}$$

Irá cavitar, pois  $h_s = 5 \text{ [m]}$  é maior que  $1,78 \text{ [m]}$

Ocorrência de cavitação #2: Uma bomba modelo ANS 40-160 com rotor  $\varnothing$  174 [mm] (ver curva no item 9.13.1 ao final do Capítulo 9), está instalada em uma indústria fornecendo uma vazão  $Q_1 = 30$  [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] e uma altura de elevação  $H_1 = 13,3$  [mCA], com altura estática de succão de  $h_s = + 3,5$  (conforme esquema). Deseja-se modificar a tubulação de recalque desta bomba a fim de que ela passe a bombear água para um reservatório mais próximo que o anterior. Nesta nova situação teremos a vazão igual a  $Q_2 = 35$  [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] e a altura de elevação será  $H_2 = 12,4$  [mCA]. Verifique para os dois casos se haverá ou não cavitação na bomba. Considere perda de carga =  $h_{p-s} = 0,01 Q^2$  ( $h_{p-s}$  -[mCA] e  $Q$ -[l/s]). Solução :

Caso 1 :  $Q = 30$  [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] ,  $H = 13,3$  [mCA] ,  $h_{p-s} = 0,69$  [mCA]

Caso 2 :  $Q = 35$  [ $\text{m}^3/\text{h}$ ] ,  $H = 12,4$  [mCA] ,  $h_{p-s} = 0,945$  [mCA]



$$h_s \leq 9,3 - h_{p-s} - \text{NPSH}$$

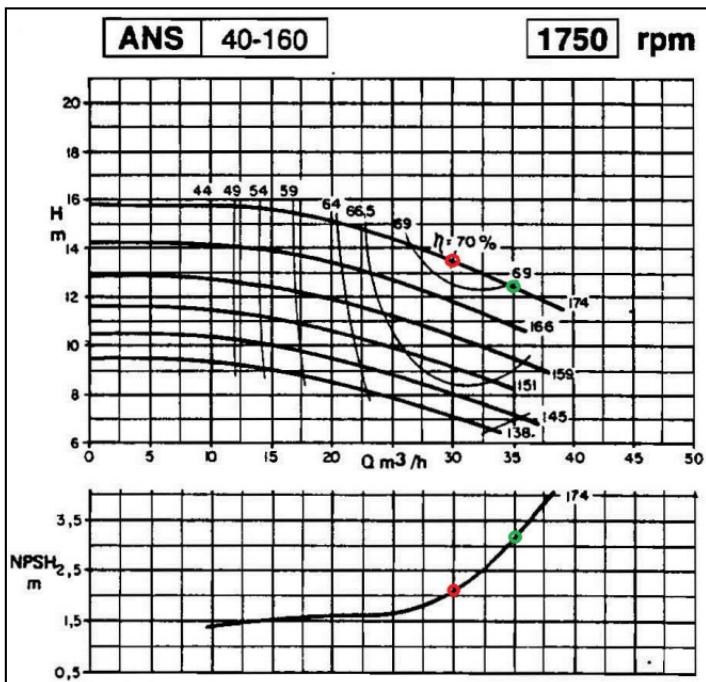
(Critério para que não haja cavitação na forma de inequação)

Caso 1 :  $h_s \leq 9,3 - 0,69 - 2,1 = 6,5$

Caso 2 :  $h_s \leq 9,3 - 0,945 - 3,2 = 5,1$

3,5 (instalação)  $\leq 6,5$  Não cava

3,5 (instalação)  $\leq 6,5$  Não cava



# **Capítulo 9 - Estudo de bombas e ventiladores**

## **9.1) Introdução**

As bombas hidráulicas e os ventiladores são instalados para trabalharem em determinado ponto de funcionamento, ao qual deve corresponder, se possível, ao de máximo rendimento da bomba. O usuário pode também modificar o ponto de funcionamento, para satisfazer as conveniências de sua instalação, quando por exemplo, necessitar de mais vazão.

Desta maneira, é possível que todas as grandezas envolvidas no funcionamento da bomba venham a variar. Ao estudo desta variabilidade dá-se a designação de estudo do desempenho das bombas sob variadas condições de funcionamento.

Para a realização destes estudos aliam-se os conhecimentos teóricos a resultados experimentais, obtidos em ensaios ou testes realizados nas próprias bombas, geralmente fornecidos pelos fabricantes de bombas.

Se uma bomba de grande porte foi construída e instalada, realizam-se ensaios de recepção, com a finalidade de verificar o cumprimento das condições firmadas em contrato, no que diz respeito às grandezas de funcionamento.

## **9.2) Curvas características do rotor (CCR)**

São as curvas que representam as grandezas de funcionamento de um rotor. Estas curvas variam conforme o tamanho, a rotação específica e outros parâmetros construtivos do rotor, espiral ou outros elementos da bomba ou ventilador.

Na figura 9.1 é apresentado estas características em função da rotação específica,  $n_s$ , para bombas.

Para o traçado destas curvas, a rotação foi tomada fixa. Se o ensaio for repetido para outros valores da rotação, obtém-se a família de curvas da bomba.

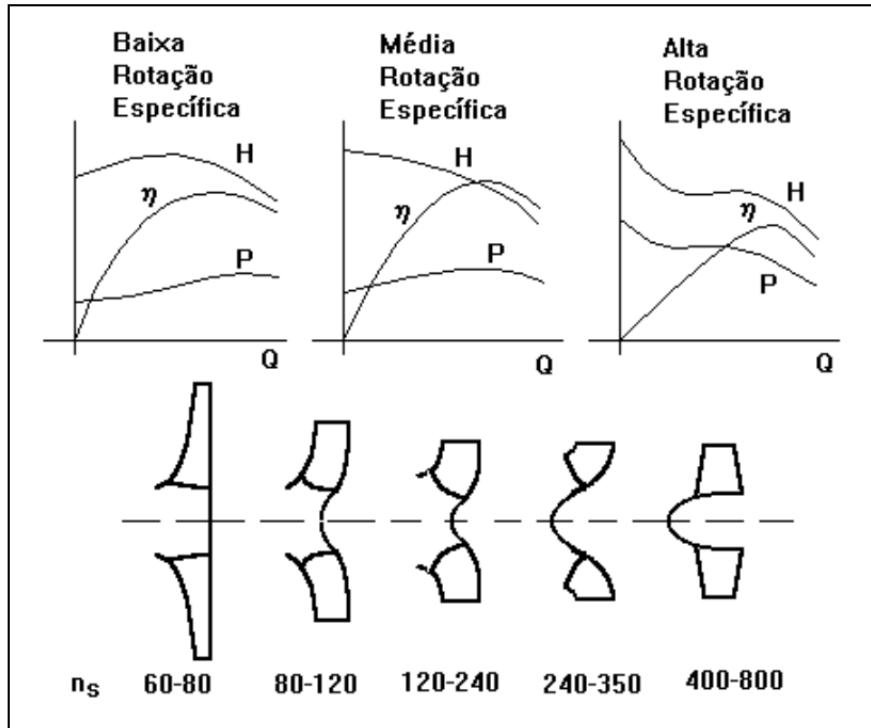


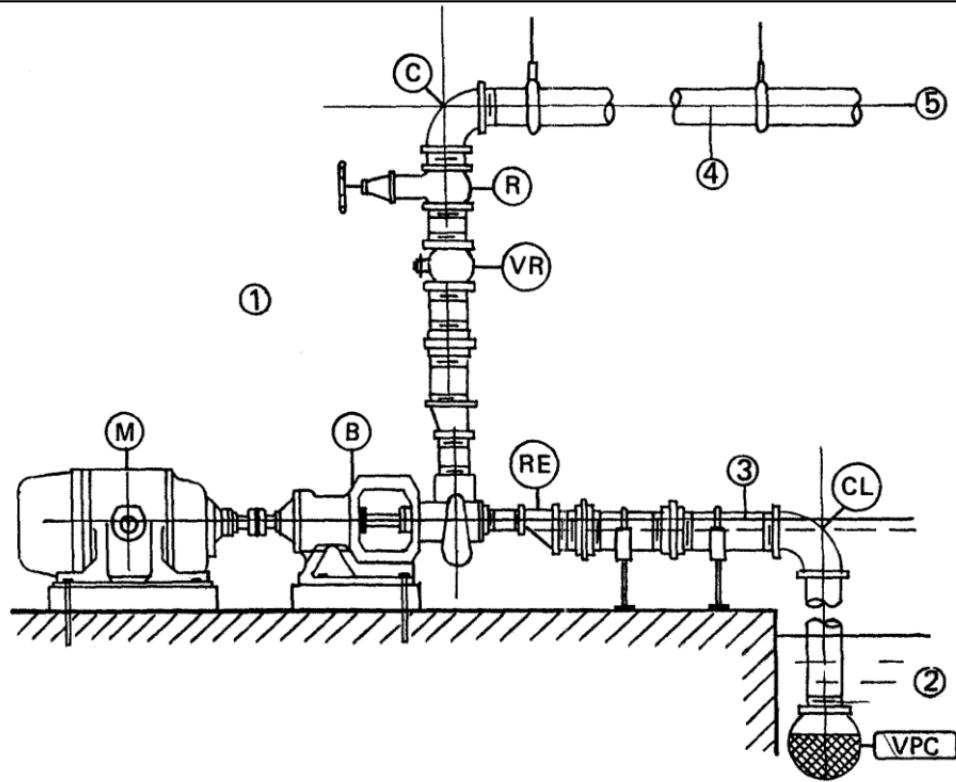
Fig. 9.1 - Curvas características do rotor de bomba (CCR)

A parte instável das curvas  $H = f(Q)$  e  $P = f(Q)$  em torno de 50% da vazão do ponto de projeto é típica para bombas axiais, como resultado da separação da camada limite e turbulência geradas pelo ângulo de incidência do fluido nesta faixa de vazão.

Examinando os gráficos, verifica-se que nas bombas radiais, a potência é mínima em shut-off (válvula de descarga fechada), ocorrendo o inverso com as bombas axiais. Isto impõe que a partida das bombas radiais se dê com a válvula de descarga fechada e a das bombas axiais com a válvula aberta.

Quando do encerramento de uma operação, basta desligar o motor das bombas axiais, devendo-se, entretanto, fechar a válvula de descarga previamente, em se tratando de bomba radial.

Se a bomba radial for de alta pressão, deve-se fechar parcialmente a válvula de descarga, desligar o motor e fechar rapidamente a válvula de descarga. Este procedimento evita a inversão de fluxo e atenua possíveis problemas decorrentes do golpe de aríete.

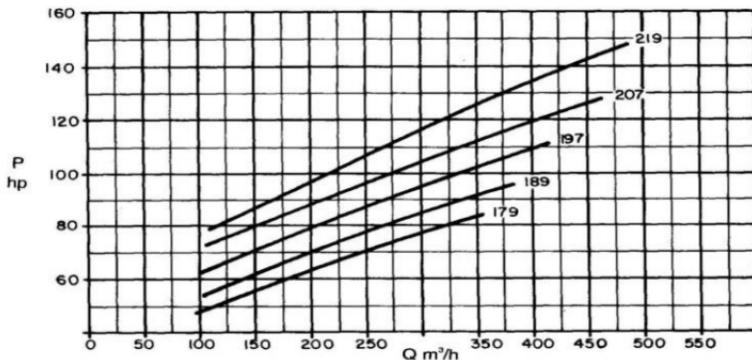
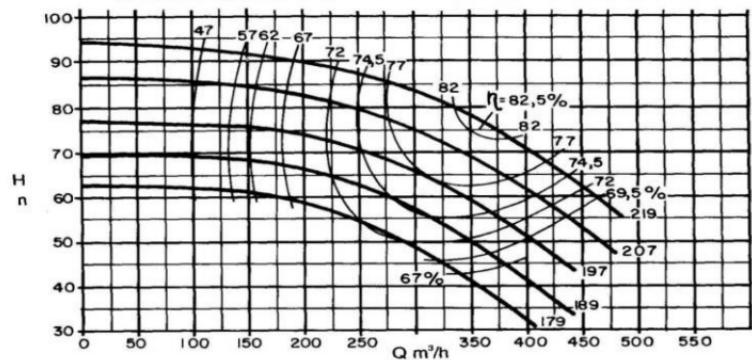


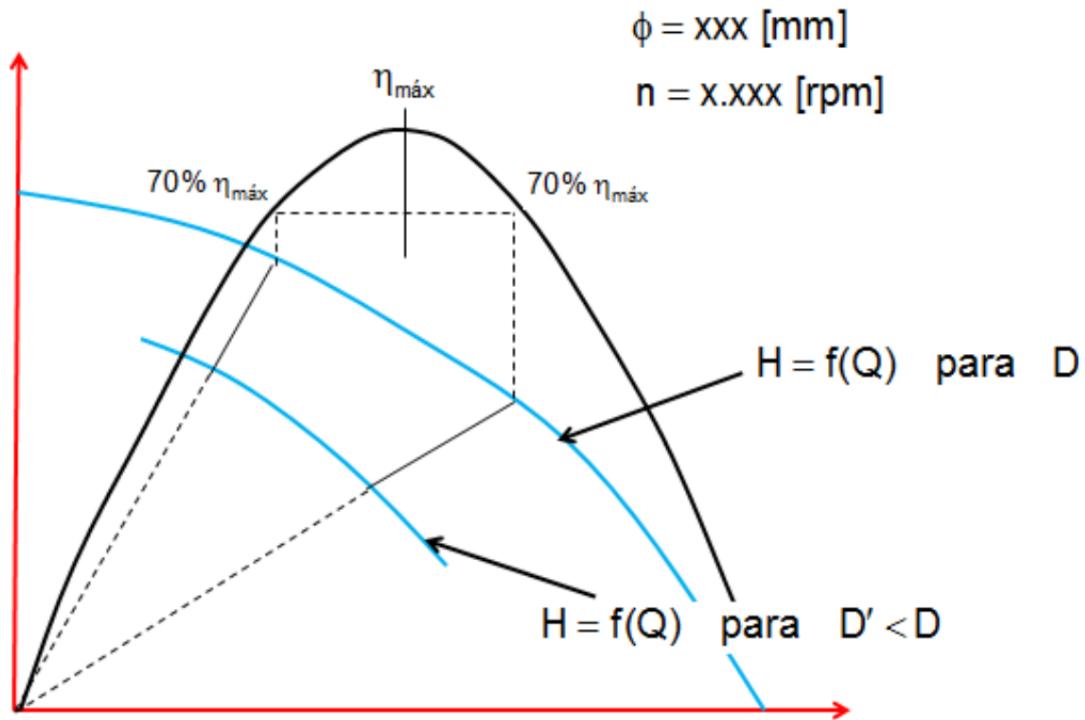
Velocidad Nominal  
Nom. Rotative Speed  
Velocidad Nominal

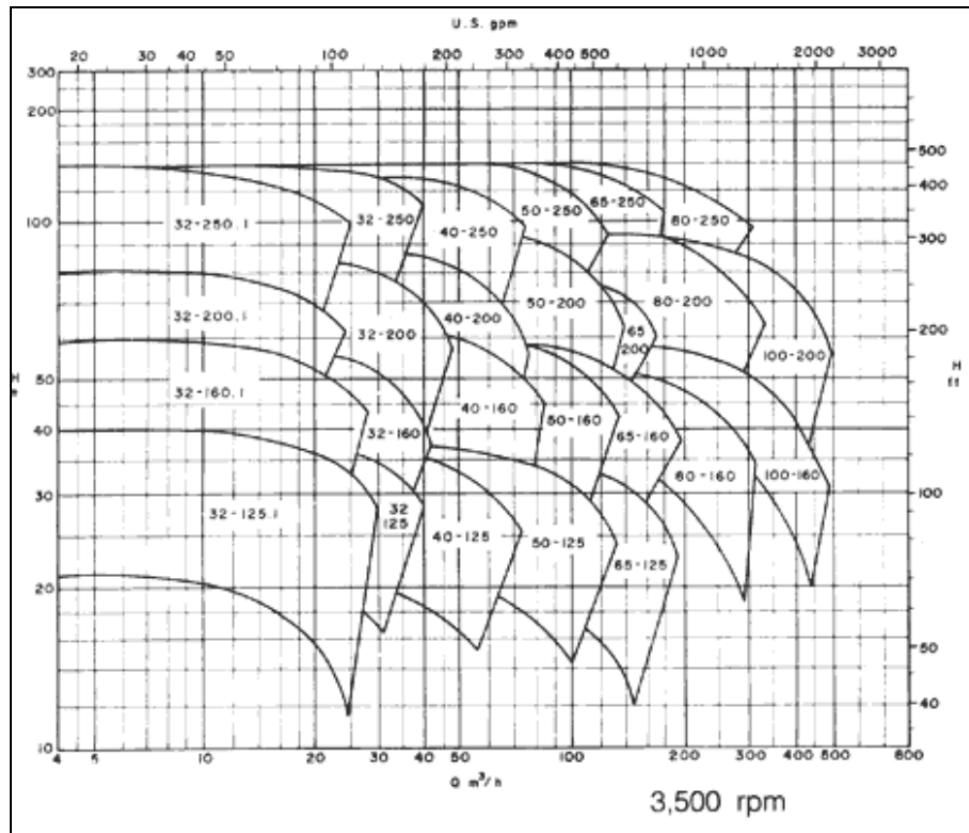
**3500 rpm**

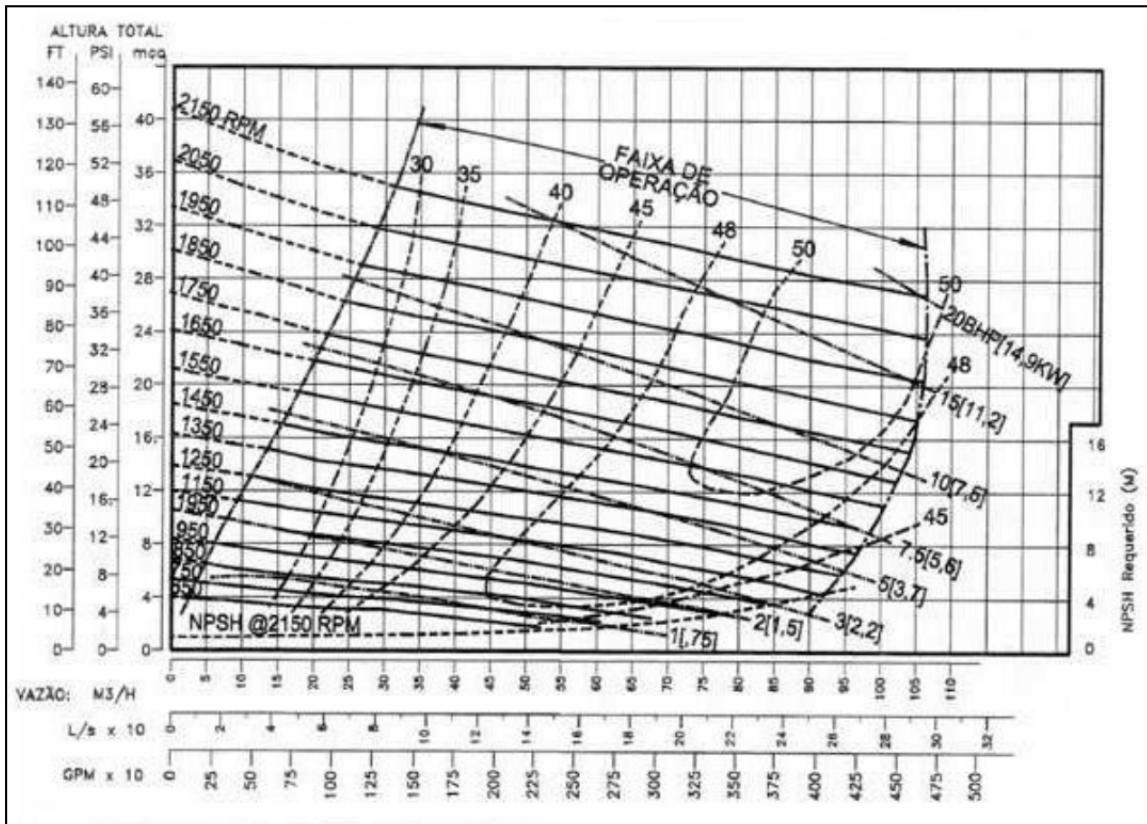
Tamaño  
Size  
Tamaño

**100-200**



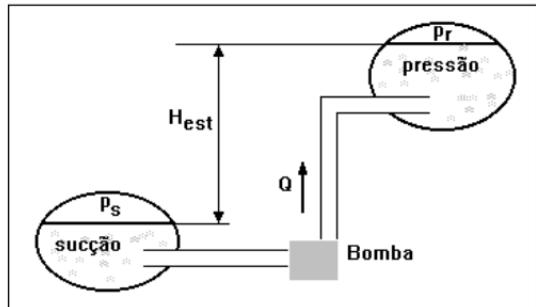






### 9.3) Curva característica da instalação (CCI)

A figura 9.2 representa dois reservatórios que são ligados entre si por tubulações, e um líquido qualquer que deverá ser bombeado do reservatório de sucção para o reservatório de pressão, também chamado de reservatório de recalque.



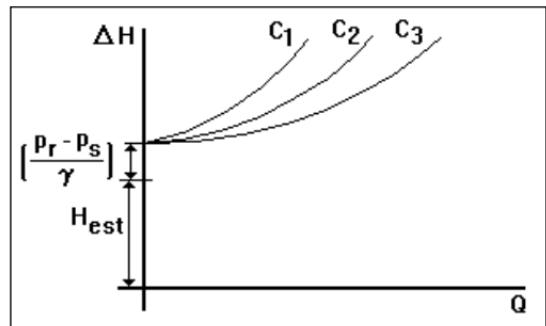
Para especificarmos a bomba hidráulica que bombeará o fluido devemos conhecer a curva característica da instalação.

Fig. 9.2 - Reservatórios interligados

Uma curva de instalação típica está apresentada na figura 9.3 , que indica a carga manométrica total,  $\Delta H$ , a ser fornecida ao fluido em função da vazão bombeada, sendo equivalente a somatória da altura estática,  $H_{est}$  , com a diferenças das pressões manométricas nos reservatórios  $p_r$  e  $p_s$  , e com a perda de carga relativa a vazão que passa pelas tubulações de sucção e recalque. Como a perda de carga será proporcional ao quadrado da vazão

para uma determinada tubulação, a carga manométrica total será calculada por:

$$\Delta H = H_{est} + \left( \frac{p_r - p_s}{\gamma} \right) + C.Q^2$$



onde a constante  $C$  depende da instalação, e é determinada a partir do comprimento equivalente e outros parâmetros.

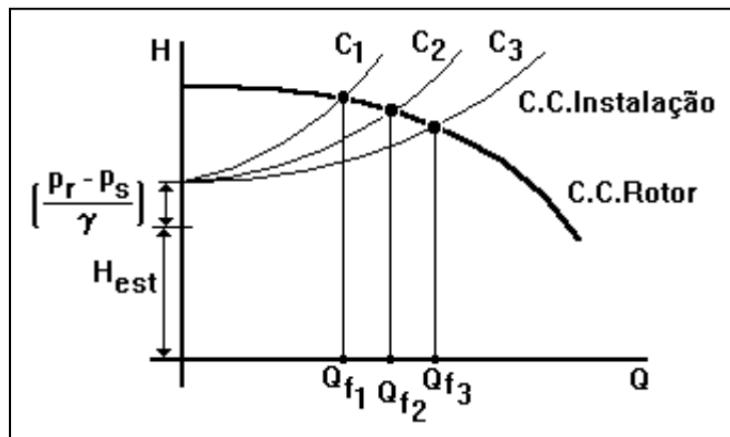
Fig. 9.3 - Curva característica de instalação

Portanto, a curva característica da instalação (CCI) será uma curva do tipo mostrada na figura 9.3, para uma determinada constante  $C$ .

A família de curvas da figura 9.3 representam curvas características da mesma instalação, quando alteramos a perda de carga que altera o coeficiente  $C$ . Portanto a curva com  $C_1$  representa maior perda de carga e a curva com  $C_3$  com menor perda de carga, o que pode ser conseguido através da abertura de uma válvula.

## 9.4) Ponto de funcionamento

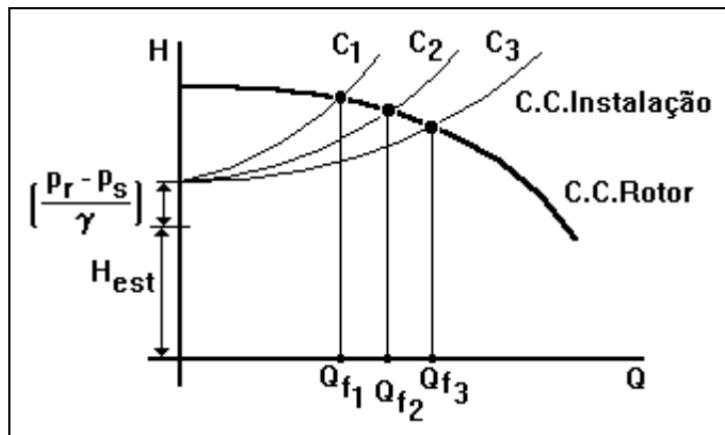
Plotando no mesmo gráfico, a curva característica da instalação e a curva característica do rotor definido para trabalhar naquela instalação, obteremos o ponto de funcionamento do sistema, onde as características energéticas da instalação serão supridas pelas da bomba.



A figura 9.4 representa uma bomba que pode operar em vários pontos de funcionamento desde que se altere as características da instalação ( $C_1, C_2, C_3$ ).

Fig. 9.4 - Ponto de funcionamento

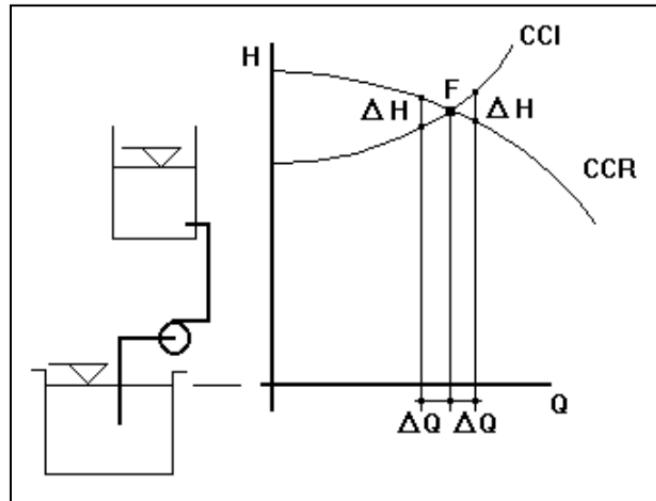
No ponto de funcionamento, a bomba fornecerá  $Q_f$ ,  $H_f$  e terá um rendimento  $\eta_f$ , que geralmente são diferentes dos valores nominais ótimos da máquina. Nesta situação o processo de bombeamento é estável e ocorre normalmente.



Veremos a seguir, que deve-se tomar alguns cuidados em alguns tipos de instalações e com alguns tipos de bombas que tendem a ter um serviço instável.

## 9.5) Serviço estável

Ao considerarmos a operação de uma bomba em uma instalação de altura constante (reservatório de grande área, por exemplo) podemos verificar se a operação é estável ou não, no ponto de funcionamento F (ver figura 9.5).



Fazendo a vazão aumentar de  $\Delta Q$  temporariamente, a altura necessária a instalação irá aumentar, e a altura de elevação da bomba irá diminuir, resultando em uma diferença de altura  $\Delta H$ .

Esta diferença de altura,  $\Delta H$ , irá forçar a uma redução da vazão, fazendo que a condição do escoamento retorne ao ponto F.

Fig. 9.5 - Serviço estável de bomba centrífuga

Ao fazermos a vazão diminuir de  $\Delta Q$ , a altura necessária a instalação irá diminuir, a altura de elevação da bomba irá aumentar, resultando em uma diferença de altura  $\Delta H$  favorável ao escoamento. Esta diferença de altura,  $\Delta H$ , irá forçar a um aumento da vazão, fazendo que a condição do escoamento retorne ao ponto F.

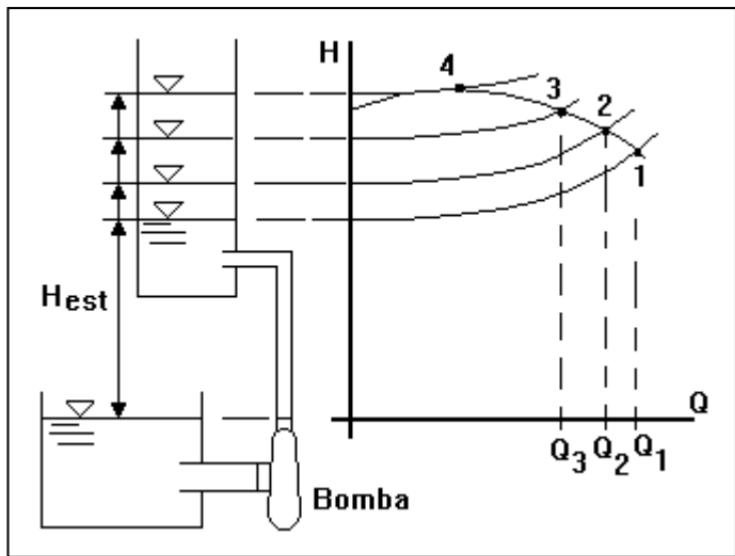
## 9.6) Serviço instável

A instalação esquematizada na figura 9.6 representa uma bomba empregada na alimentação de um tanque. Considerando as perdas na tubulação desprezível ( $C \approx 0$ ) , a curva característica da instalação irá se deslocando para cima a medida que o nível no tanque for se elevando.

Inicialmente o tanque de pressão está com nível baixo e a bomba trabalha no ponto 1, e em seguida no ponto 2. Se a saída da água no tanque de pressão não for maior que a água bombeada e a bomba não for controlada, a bomba irá trabalhar no ponto 3 e em seguida no ponto 4.

Neste ponto a bomba não consegue vencer a pressão devido a coluna de água, e o fluxo se reverte em sentido contrário bruscamente, até que a

coluna diminui e a bomba volta a trabalhar normalmente no ponto 3 ou próximo do ponto 4.



Este serviço é instável e causa grandes torques no eixo da bomba no instante em que o escoamento se reverte, ocasionando também sobrecarga no motor elétrico.

Uma solução é controlar automaticamente a bomba (fechando a válvula de saída ou desligando o motor elétrico) a partir do nível do tanque.

Fig. 9.6 - Serviço instável de bomba centrífuga

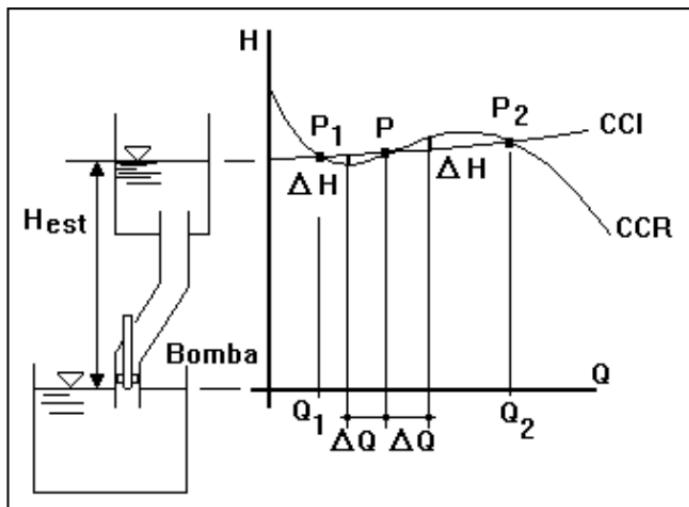
Neste caso outros cuidados devem ser tomados, como por exemplo, o uso de válvulas de retenção para não permitir golpes de pressão da água (golpe de ariete) sobre a bomba no momento que o motor for desligado ou o fechamento lento da válvula de saída da bomba.

Outro tipo de serviço instável está associado ao uso de bombas axiais, devido a forma típica da curva característica do rotor para este tipo de bomba.

Considerando uma instalação com bomba axial (Figura 9.7), que funcione inicialmente no ponto P. Aumentando a vazão de  $\Delta Q$ , a altura de elevação da bomba, H, irá aumentar mais do que altura do sistema (CCI), resultando em uma diferença  $\Delta H$  que será favorável ao aumento de vazão. As condições do escoamento não retornaram ao ponto inicial P, e tenderão a estabilizar no ponto  $P_2$ , onde as curvas da instalação e do rotor se encontram.

Se, ao contrário, considerarmos em um primeiro momento, uma diminuição da vazão  $\Delta Q$ , a altura de elevação da bomba irá diminuir também, porém em valores maiores do que a diminuição da altura do sistema (CCI), resultando em uma diferença  $\Delta H$  que será favorável ainda mais a diminuição da vazão. A tendência será a estabilização da vazão no ponto  $P_1$ .

Este tipo de instalação com este tipo de bomba induz a uma instabilidade das condições do escoamento, fazendo que o ponto de funcionamento se desloque de  $P_1$  para  $P_2$  e vice-versa, diante de uma pequena perturbação na vazão, o que é natural em sistemas hidráulicos.



A solução é especificar uma bomba que tenha o ponto de funcionamento além do ponto  $P_2$  equivalente a CCR da figura 9.7, ou seja, especificar uma bomba que forneça mais altura de elevação do que a bomba mostrada na figura 9.7.

Fig. 9.7 - Serviço instável de bomba axial

## 9.7) Associação de bombas e de ventiladores

Pode-se obter uma faixa maior de variação de vazão e de altura de elevação, associando-se bombas em paralelo ou em série. A figura 9.8 mostra esta associações utilizando duas bombas.

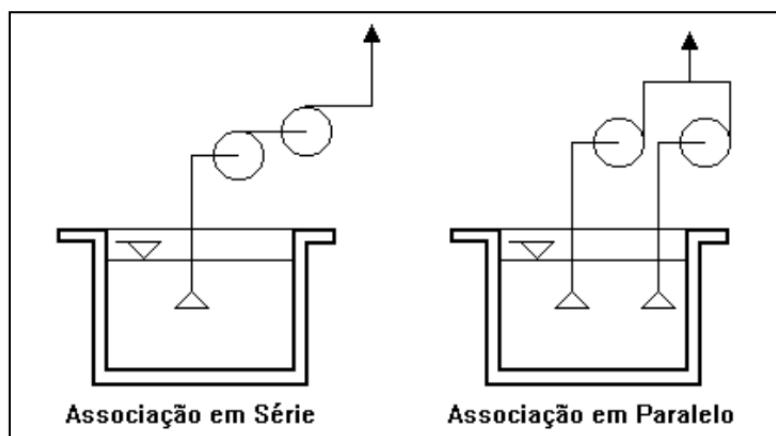


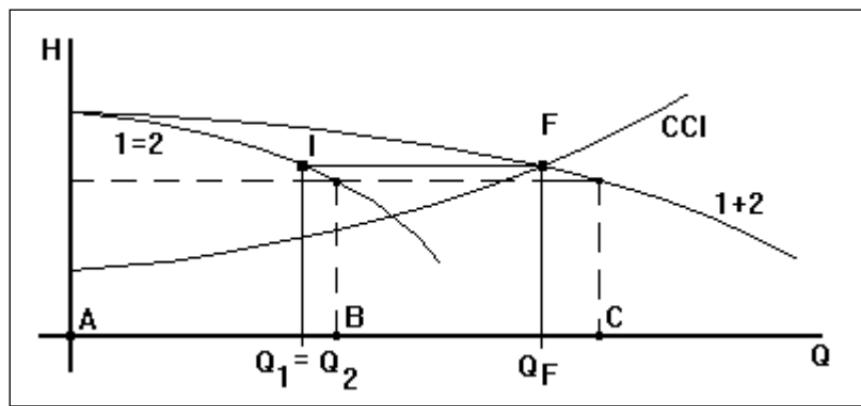
Fig. 9.8 - Associação de bombas

Nas instalações industriais de bombeamento pode-se encontrar associações de mais de duas bombas.

As associações de bombas implicam em uma curva característica da associação, diferente da curva característica de uma bomba isolada.

### 9.7.1) Associação de bombas em paralelo:

Na associação de bombas em paralelo, as vazões se somam para uma mesma altura de elevação.



Na figura 9.9 se mostra a curva resultante ( $1+2$ ) da associação de duas bombas iguais que possuem a mesma curva característica ( $1=2$ ).

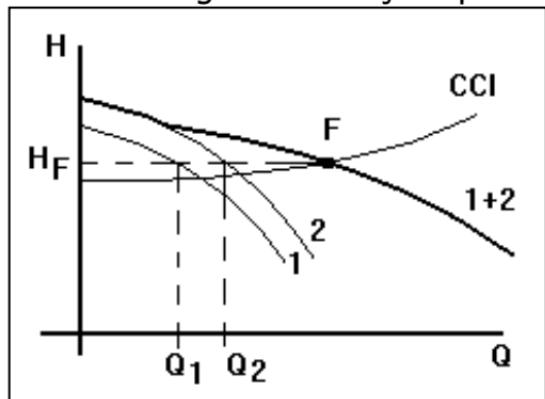
Fig. 9.9 - Associação de bombas iguais em paralelo

A curva da associação é obtida por pontos, por exemplo, o segmento  $AC=2 \times AB$ . O ponto F será então o ponto de funcionamento para uma instalação qualquer, sendo  $Q_F$  a vazão da associação de duas bombas iguais

em paralelo, e  $Q_1$  a vazão bombeada pela bomba 1 igual a  $Q_2$  vazão bombeada pela bomba 2.

Tanto a bomba 1 quanto a bomba 2 trabalham no ponto I da fig. 9.9 . Deste ponto I pode-se obter a potência, o rendimento total e outras grandezas da bombas 1 que serão equivalentes a bomba 2.

Em algumas situações pode-se associar bombas diferentes em paralelo.



O princípio para se determinar a curva da associação é o mesmo, como mostra a figura 9.10.

Porém, na região da curva característica da bomba 1 onde a pressão da bomba 2 é maior que da bomba 1 , deve-se considerar como nula a vazão da bomba 1.

Fig. 9.10 - Associação em paralelo de bombas diferentes

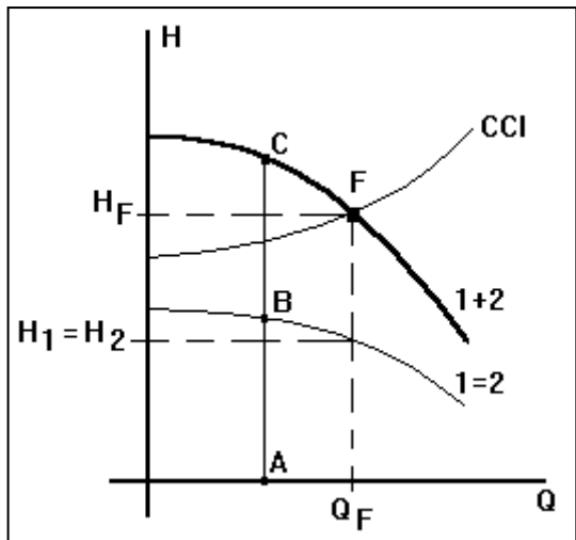
Deve-se evitar que o ponto de funcionamento fique sobre esta região, onde a pressão da bomba 2 é maior que a da bomba 1, pois como as duas estão em paralelo, haverá um fluxo da bomba 2 para a bomba 1, sobrecarregando a bomba 1.

#### 9.7.2) Associação de bombas em série

Neste caso, a curva resultante da associação de duas bombas iguais ( $1=2$ ) será obtida somando-se as alturas correspondentes para uma determinada vazão.

Graficamente (ver figura 9.11), a curva da associação ( $1+2$ ) em série é obtida para vários pontos de modo que o comprimento do segmento AC (altura de elevação da associação) é igual a 2 vezes AB (altura de elevação de uma bomba).

Este tipo de associação não envolve problemas quando se associa bombas diferentes, sendo que deve-se ter cuidado com o ponto de funcionamento de cada uma das bombas isoladas.



Dessa maneira, não deve-se associar bombas muito diferentes.

Um cuidado especial deve ser tomado com relação a pressão na segunda ou terceira bomba em série, pois a pressão nos últimas bombas pode ser maior que a capacidade de resistência dos materiais da máquina.

Fig. 9.11 - Associação em série de bombas iguais

Este tipo de associação é tipicamente interessante para atender demandas de alta pressão como pode ser observado na figura 9.11, onde uma máquina isolada (bomba 1 ou 2) não atenderia a curva característica da instalação. As bombas de múltiplos estágios são como bombas em série, porém montadas em um mesmo eixo, com a vantagem de que não necessitam de caixa espiral, para cada rotor, porém utilizam uma peça especial para guiar o escoamento de um estágio (rotor) para outro.

## 9.8) Associação de instalações

O objetivo deste item é mostrar como podemos determinar curva característica de instalação quando temos, por exemplo, diversas ramificações e reservatórios para atender com o uso de uma determinada bomba ou associação.

### 9.8.1) Associação em série:

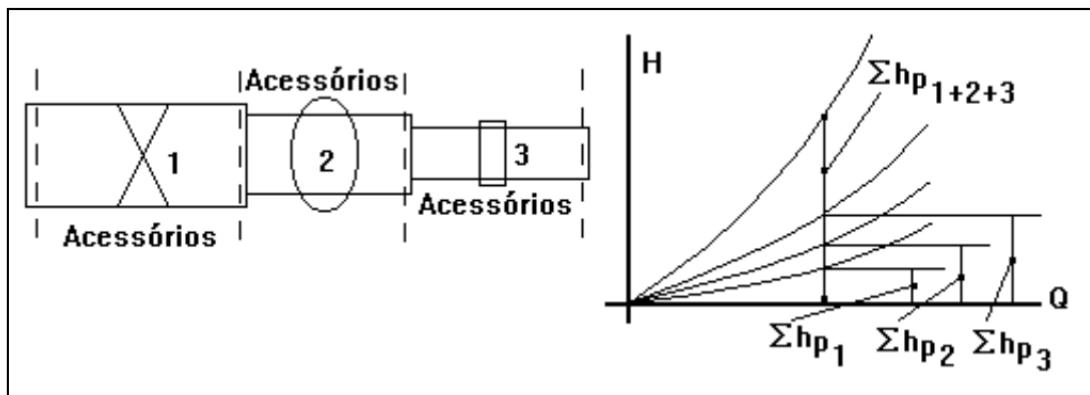


Fig. 9.12 - Associação de instalações em série

### 9.8.2) Associação em paralelo:

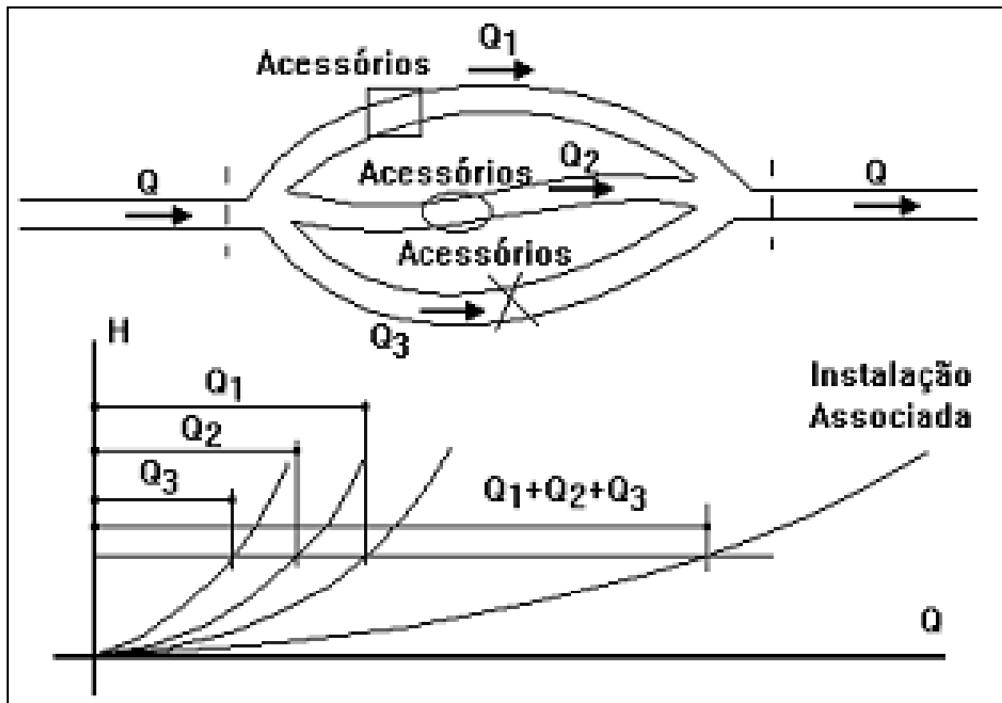


Fig. 9.13 - Associação de instalações em paralelo

### 9.8.3) Associações ramificadas:

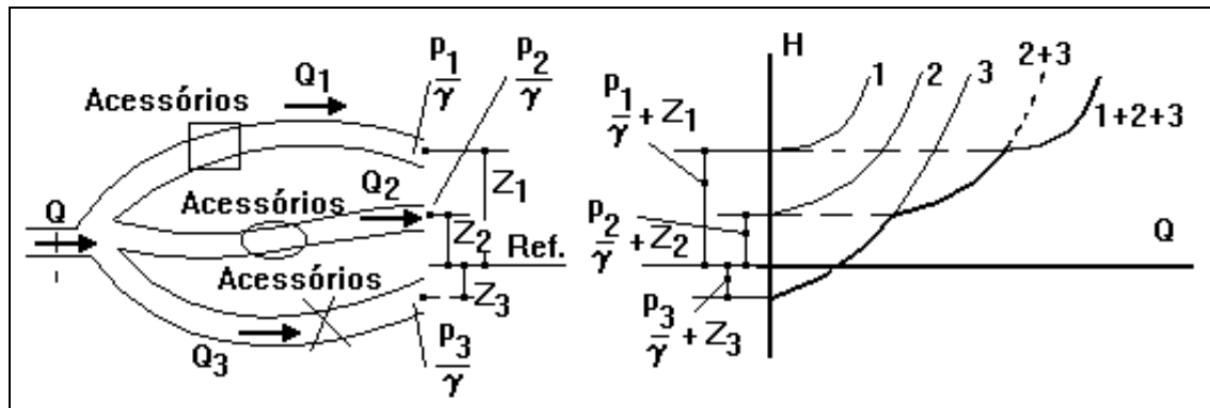


Fig. 9.14 - Associação de instalações em paralelo ramificadas

#### 9.8.4) Associações complexas:

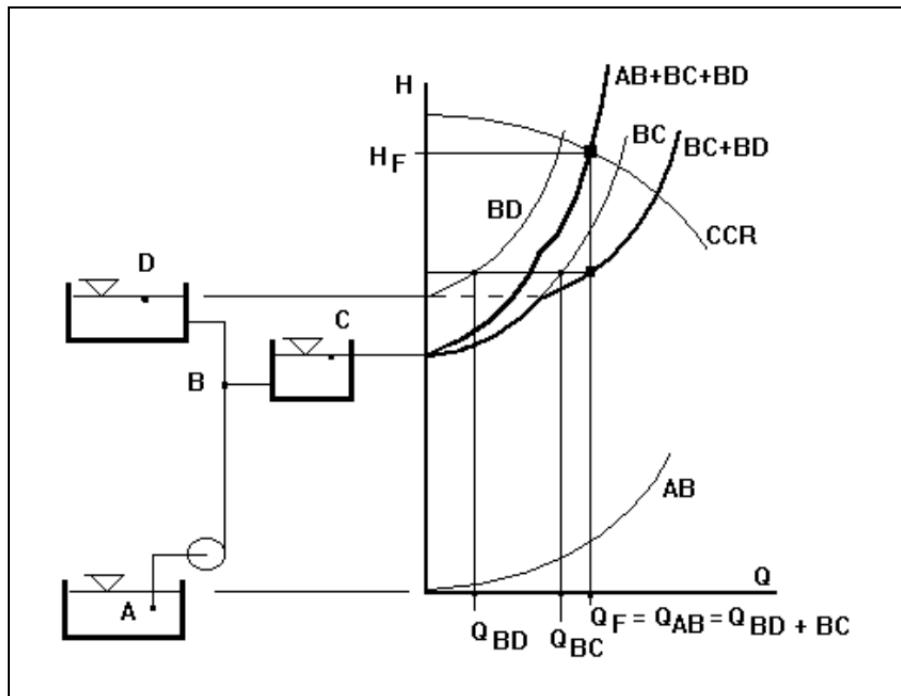


Fig. 9.15 - Associação de instalações complexa

## **9.12) Exemplos de cálculos**

### **9.12.1) Ponto de funcionamento:**

Dispomos de 4 tipos de bombas em estoque, conforme curvas em anexo (ver item 9.13.1). Todas estão montadas com rotor de diâmetro máximo, podendo, se necessário, ser substituído. Precisa-se atender uma instalação definida pela curva característica dada pelos pontos na tabela abaixo:

$Q \text{ [m}^3/\text{h}]$	0	10	20	30	40
$H \text{ [m]}$	10	12	16	22	30

Sabendo-se que a vazão necessária deve ser no mínimo  $25 \text{ [m}^3/\text{h}]$ , defina qual é a bomba mais econômica em termos de consumo de energia, especificando seu modelo, rotação, diâmetro. Indique também as características altura e vazão no ponto de funcionamento e o consumo em kWh para um mês (720 horas) de trabalho da bomba. Solução:

- 1) Tipo ANS 40-125 : Não atende, pois CCR do rotor de maior diâmetro está abaixo da CCI.
- 2) Tipo ANS 40-160 : Não atende, pois CCR do rotor de maior diâmetro apresentará ponto de funcionamento com vazão abaixo da vazão mínima especificada de  $25 \text{ [m}^3/\text{h}]$ .

3) Tipo ANS 40-200 : Foram obtidos cinco pontos de funcionamento, porém somente o rotor de diâmetro 209 [mm] atende a vazão mínima de 25 [m<sup>3</sup>/h].

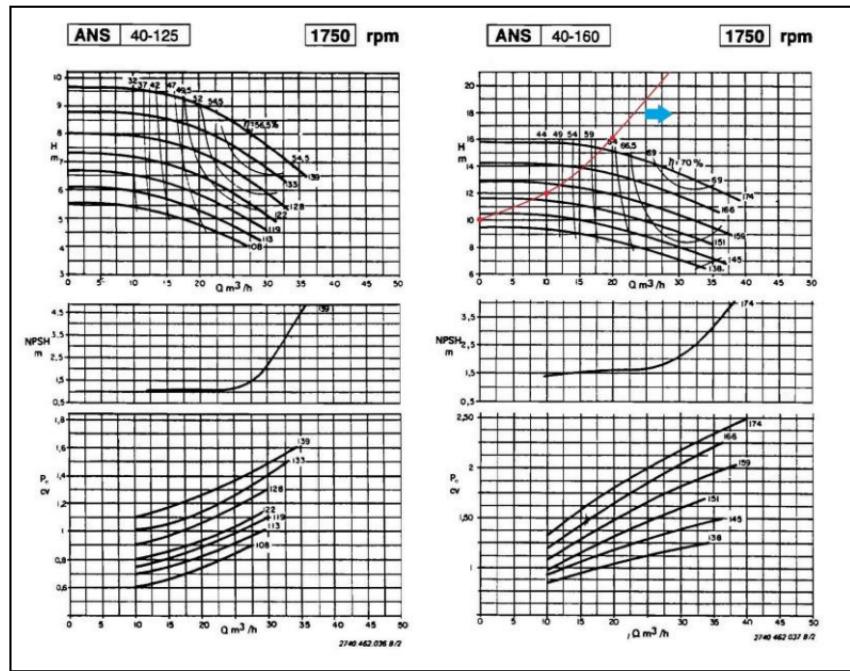
$\phi$ [mm]	Q[m <sup>3</sup> /h]	H [mCA]	$\eta$ [%]	Pe [CV]*	Pe [kW]**	Ec [kWh]	C (Ec/Q)
173	16,0	14,0	46,0	1,8	1,32	952	59,5
182	18,0	15,0	49,0	2,0	1,50	1.080	60,0
192	21,5	16,5	52,5	2,5	1,83	1.321	61,5
202	23,5	18,0	55,0	2,8	2,09	1.504	64,0
209	27,0	20,0	58,0	3,4	2,53	1.821	67,4

4) Tipo ANS 40-250 : Foram obtidos seis pontos de funcionamento, sendo que os rotores de diâmetro maiores que 218 [mm] atendem a vazão mínima de 25 [m<sup>3</sup>/h].

$\phi$ [mm]	Q[m <sup>3</sup> /h]	H [mCA]	$\eta$ [%]	Pe [CV]*	Pe [kW]**	Ec [kWh]	C (Ec/Q)
208	22,5	17,0	52,5	2,5	1,98	1.425	63,3
218	25,0	18,5	52,8	3,0	2,38	1.713	68,5
227	27,5	20,0	53,1	3,7	2,81	2.025	73,6
238	30,0	22,0	53,4	4,5	3,36	2.417	80,6
250	32,5	24,0	53,7	5,3	3,95	2.841	87,4
260	36,0	27,0	54,0	6,3	4,89	3.520	97,8

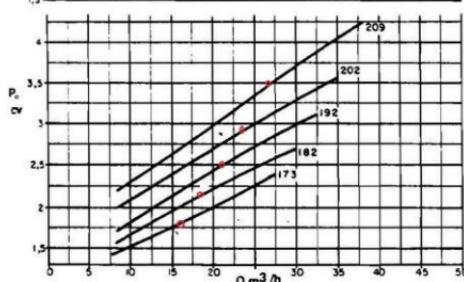
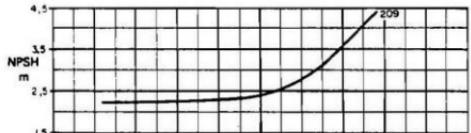
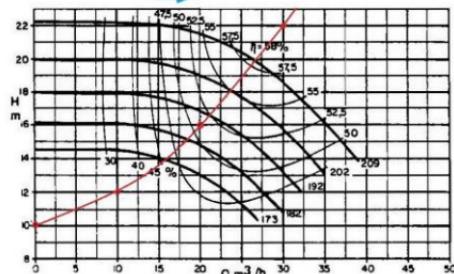
\* Obtido do gráfico \*\* Calculado a partir da potência hidráulica e do rendimento

Pode-se escolher o tipo ANS 40-250 com o rotor de diâmetro 218, pois na vazão mínima a ser atendida este possui a menor relação entre energia consumida e vazão bombeada (C) igual a 68,5 [kWh/m<sup>3</sup>/h].



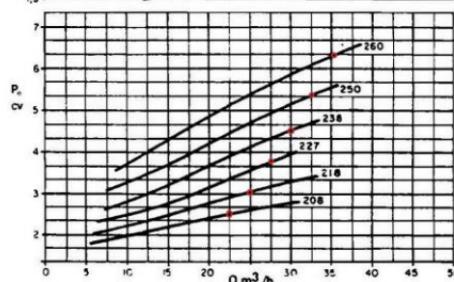
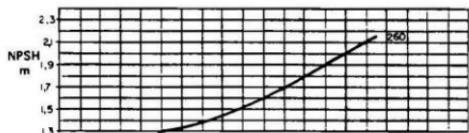
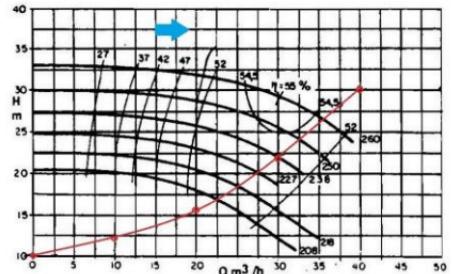
**ANS 40-200**

**1750 rpm**



**ANS 40-250**

**1750 rpm**



### 9.12.2) Associação de bombas

Necessitamos bombear água em uma instalação onde a altura estática é  $H_{est} = 15$  [mCA] atendendo a uma vazão máxima possível e com o máximo rendimento possível. Para isto utilizaremos 2 bombas iguais associadas em paralelo. Especifique qual será o diâmetro da bomba a ser utilizada (dentro das opções mostradas no gráfico do item 9.13.2) para realizar este trabalho, e identifique o ponto de funcionamento (Valores de  $Q$ ,  $H$ ,  $P$  e  $\eta$ ) para uma bomba isoladamente. Considere:

- perda de carga na sucção =  $h_{p-s} = 0,075 Q^2$  ( $h_{p-s}$  -[mCA] e  $Q$ -[l/s])
- perda de carga no recalque =  $h_{p-r} = 0,11 Q^2$  ( $h_{p-r}$  -[mCA] e  $Q$ -[l/s])

Solução:

Partindo da equação,  $H = H_{est} + h_{p-s} + h_{p-r}$ , somamos as equações para as perdas na sucção e no recalque, sendo que a altura estática é 15 [mCA], obtemos a curva da instalação ,  $H = 15 + 0,185 Q^2$  . ( $Q$  é a vazão total, igual a duas vezes a vazão de uma bomba  $Q_B$  )

Utilizando a equação da instalação ( $H = 15 + 0,185 Q^2$ ) podemos obter a curva equivalente da instalação para uma bomba isolada de uma associação com duas bombas iguais, substituindo  $Q$  na equação por  $2 Q_B$  :  $H = 15 + 0,74 Q_B^2$  .

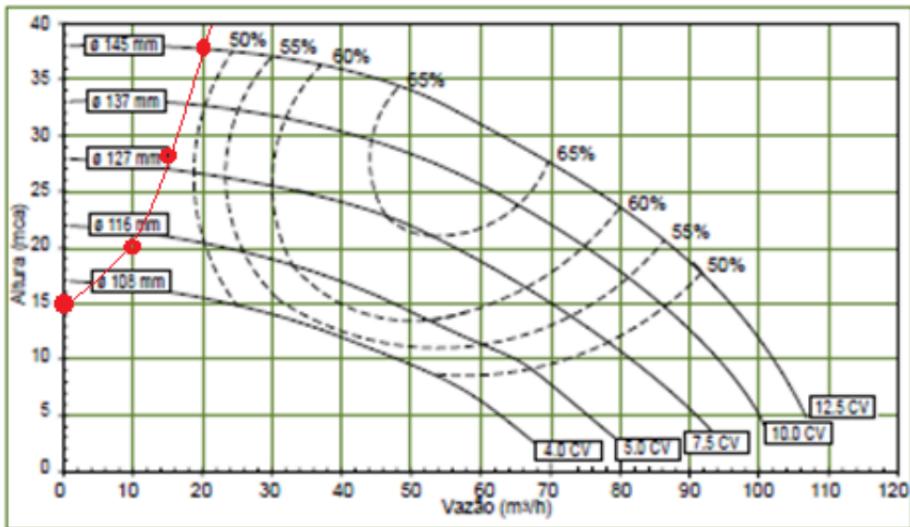
Este procedimento é utilizado visando possibilitar a plotagem, no gráfico da curva  $H=f(Q)$  de uma bomba, da curva da instalação equivalente e assim obtermos o ponto de funcionamento para uma bomba.

Note-se que o gráfico  $H=f(Q)$  disponível da bomba apresenta a unidade da vazão em  $[m^3/h]$  enquanto que a equação da instalação equivalente para uma bomba requer que a unidade de vazão seja em  $[l/s]$ .

Usando  $Q_B [l/s] = Q_B [m^3/h] \times 1.000/3.600$ , transformamos a equação da instalação equivalente com dado de vazão em  $[l/s]$  para  $[m^3/h]$  :  $H = 15 + 0,74 Q_B^2$  ( $Q_B$  em  $[l/s]$ ) =>  $H = 15 + 0,057 Q_B^2$  ( $Q_B$  em  $[m^3/h]$ ).

Para facilitar a plotagem da curva da instalação equivalente no gráfico da bomba montamos a seguinte tabela de pontos :

$Q [m^3/h]$	$H [m]$
0	15,0
10	20,7
15	27,8
20	37,8



Observa-se do gráfico da bomba, onde se marcou a curva da instalação equivalente para uma bomba, que o ponto de funcionamento, para qualquer diâmetro de rotor está posicionado em situação desfavorável, com rendimento abaixo, mas próximo, de 50% e com vazão abaixo de 20 [m<sup>3</sup>/h] por bomba.

Caso seja escolhido o rotor de diâmetro 145 [mm] as condições de funcionamento da instalação e de uma bomba serão, respectivamente :  $Q = 40$  [m<sup>3</sup>/h] e  $Q_B = 20$  [m<sup>3</sup>/h],  $H = 37,8$  [mCA],  $\eta_t = 48\%$  e  $P_e = 5,8$  [CV].

## **9.9) Bombas para aplicações especiais**

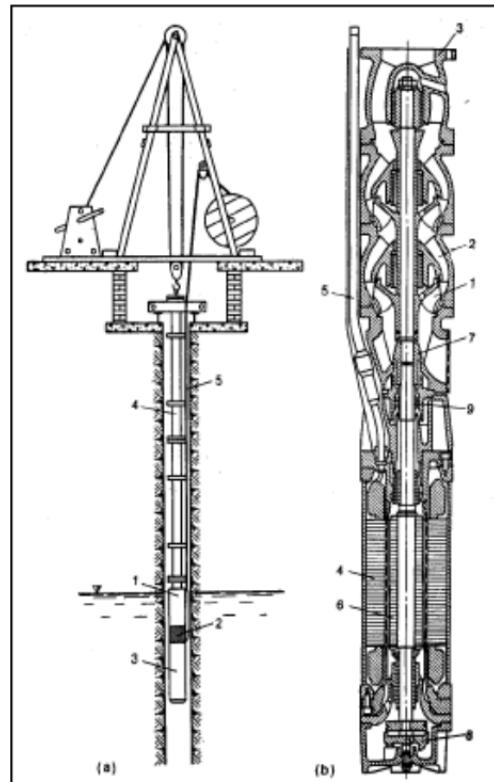
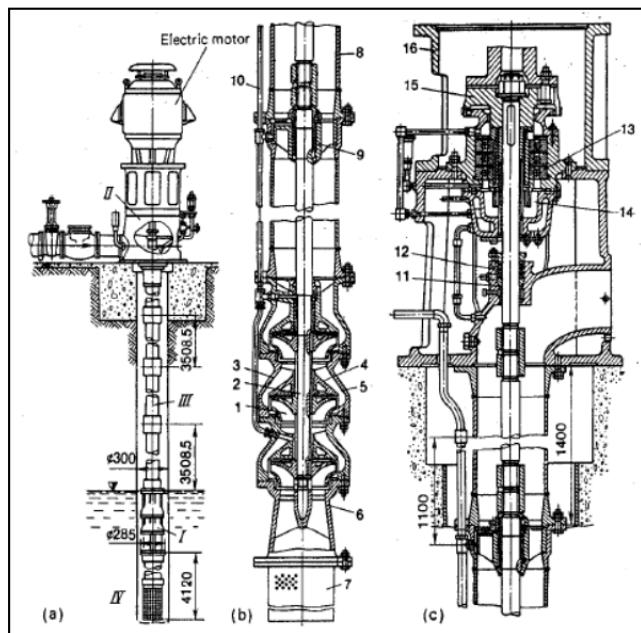
Diversos tipos de aplicações especiais exigem bombas de projeto apropriado. Dentre uma série de casos pode-se citar cinco tipos de aplicações que merecem destaque:

- a) bombeamento a partir de poços profundos,
- b) bombeamento de pastas e polpas  
(líquido com grande quantidade de sólidos em suspensão),
- c) bombas em múltiplos estágios (rotores em série),
- d) bombas de rotores duplos e
- e) injetores.

### **9.9.1) Bombas para poços profundos**

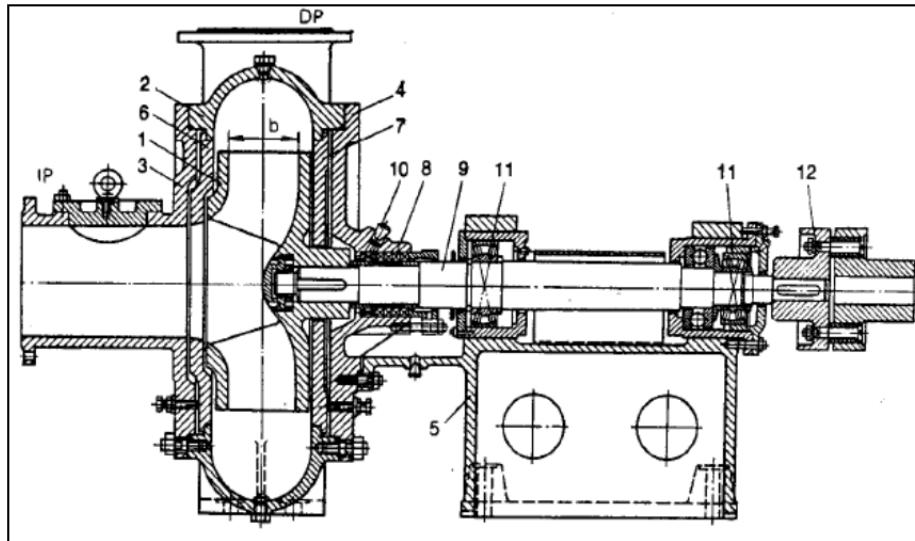
Estes tipos de bombas são projetadas para retirar água de poços em profundidades geralmente acima de 20 [m]. Também chamadas de bombas submersíveis, são utilizadas em suprimento de água, redução do nível do lençol freático e drenagem de solo. Existem dois tipos mais comuns:

a) bombas com eixo de transmissão e b) bombas com motor submerso.

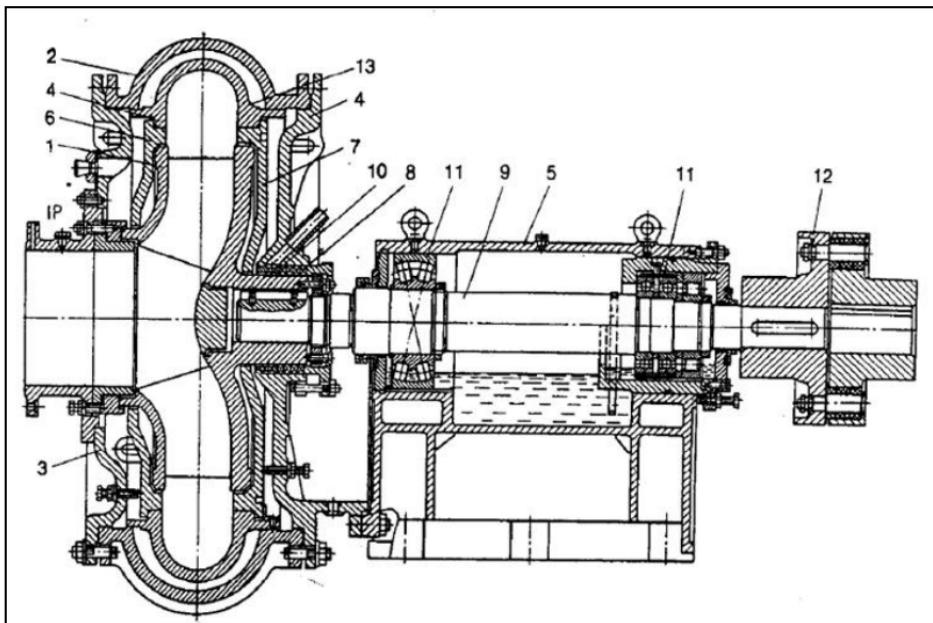


### 9.9.2) Bombas para pastas e polpas

São bombas projetadas para transferir lamas, pastas e polpas, e outras misturas com grande quantidade de sólido em suspensão na água. São utilizadas na indústria de mineração, construção civil, indústria de papel e celulose e etc.



As principais características deste tipo de bomba são: a) rotores de canais largos para permitir a passagem de sólidos de maiores dimensões e de materiais amortecedores de impacto, b) carcaça com peças de desgastes para substituição rápida (partes que se deterioraram devido a erosão por abrasão).

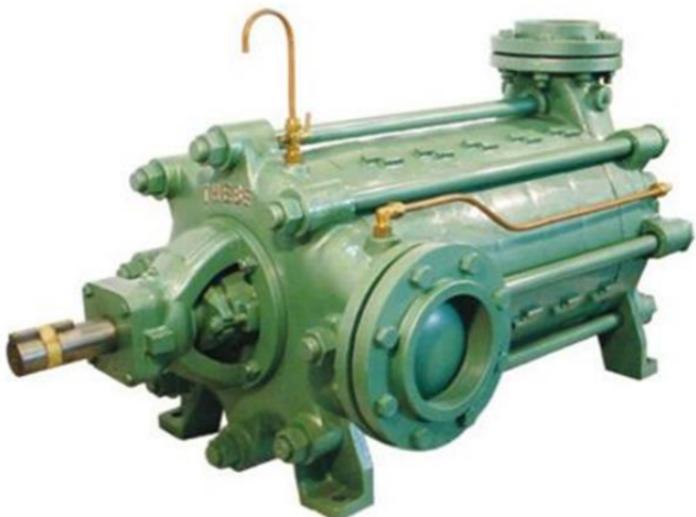


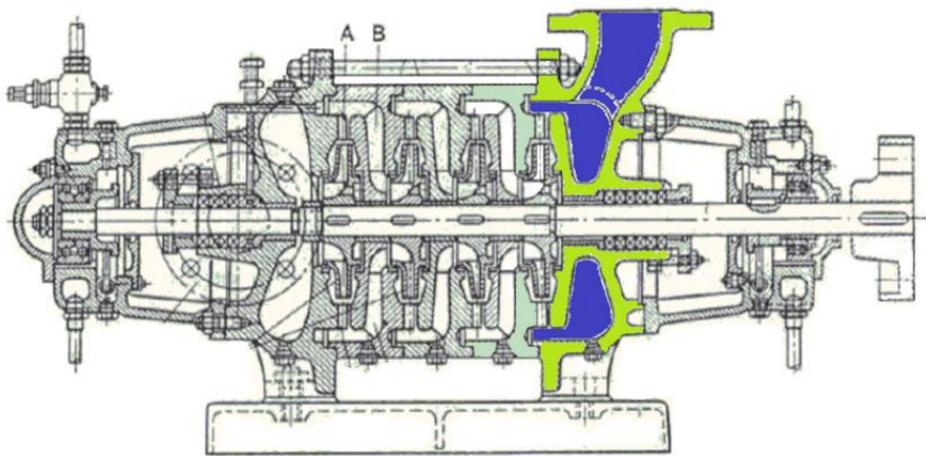


### 9.9.3) Bombas de múltiplos estágios

São aquelas bombas construídas para desenvolver grandes diferenças de pressão em que vários rotores são montados em série dentro de uma mesma carcaça, em um único eixo: típica bomba utilizada para alimentação de caldeiras.

O fluxo ao longo da sequência de rotores dentro da bomba configuração uma instalação de rotores em série, sendo que são utilizadas pás guias fixas entre um rotor e outro (entre estágios), para anular a componente tangencial na saída de cada estágio.





A-A

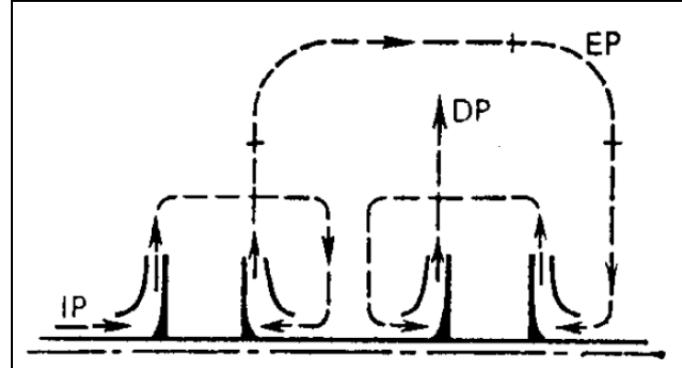
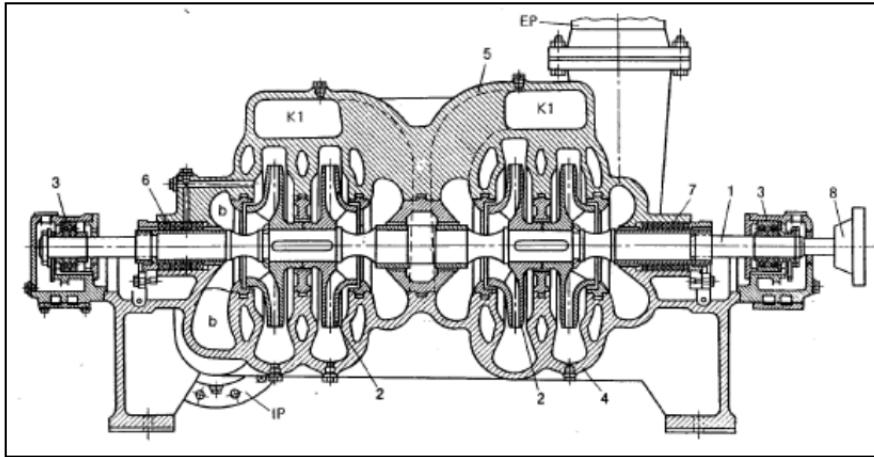


Guide vanes

B-B

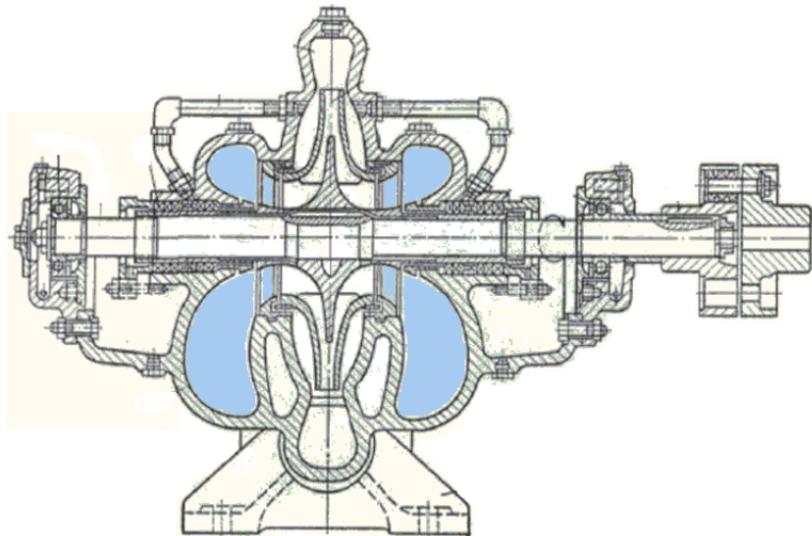


Backward curved  
vanes

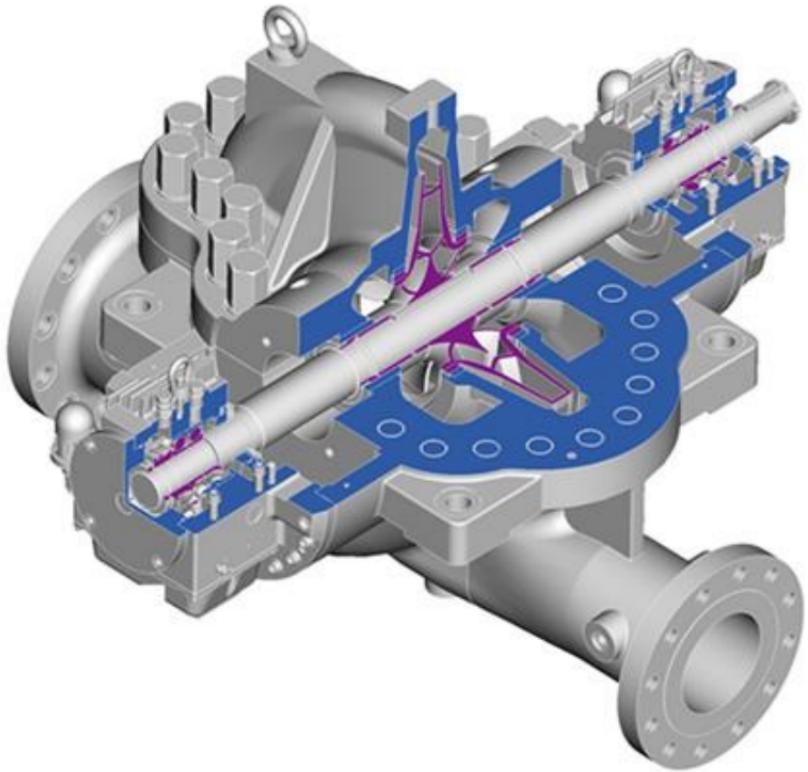


#### 9.9.4) Bombas de rotor duplo

Neste caso as bombas são montadas em paralelo visando desenvolver grandes vazões utilizando uma mesma carcaça, também em um único eixo. A aplicação típica deste tipo de bomba se encontra nas instalação de abastecimento de água nos centros urbanos.



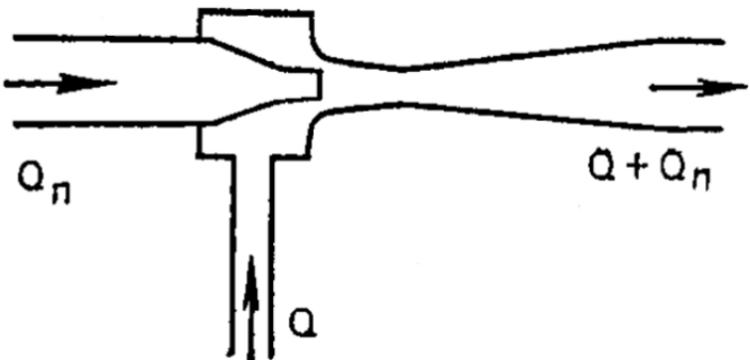




### 9.9.5) Bomba tipo injetor

A bomba tipo injetor funciona através do princípio de Venturi. Em um bocal convergente-divergente a bomba tipo injetor converte a pressão de um fluido ativo em velocidade na parte convergente, na qual se cria uma região de baixa pressão que succiona o fluido a ser bombeado.

Após a passagem na garganta convergente, a mistura de fluidos se expande na parte divergente da bomba, a velocidade é reduzida e a pressão aumenta novamente.



## **9.10) Correção de grandezas devido a alteração de fluido**

Em aplicações práticas é muito comum a necessidade de bombeamento de fluidos de viscosidade acima da viscosidade da água, que é o fluido usado para levantamento de curvas das bombas hidráulicas.

Com o aumento da viscosidade as perdas por atrito e por choques aumentarão significativamente, o que afetará o funcionamento da máquina, ou seja, suas grandezas serão alteradas, inclusive a potência de acionamento.

Geralmente, para as bombas de dimensões menores estes efeitos serão mais acentuados do que nas bombas maiores.

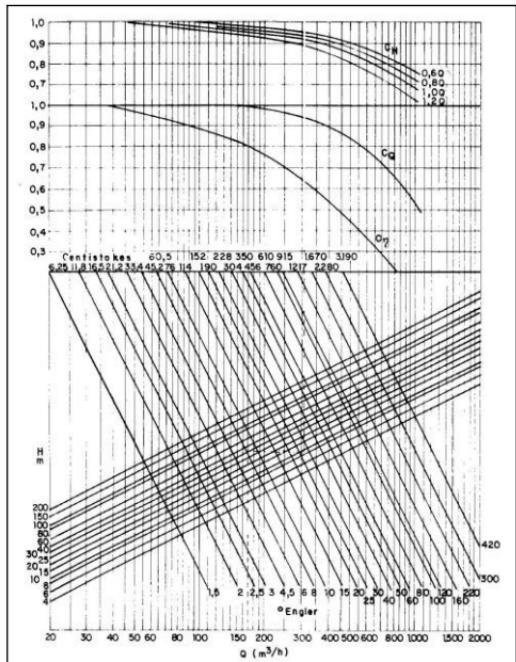
Existem várias maneiras de realizar a correção de grandezas de bombas devido a aplicação em fluidos de viscosidade diferente, neste curso será utilizado o método mais conhecido, o método apresentado no "Standards for Centrifugal Pumps" - Hydraulic Institute.

Resumidamente, trata-se de um gráfico aplicável somente a bombas centrífugas, destinadas ao bombeamento de óleo, com rotor aberto ou fechado, não podendo ser aplicado a fluidos não newtonianos, tais como pastas de papel, esgoto e outros. A figura 9.16 apresenta este gráfico em unidades SI.

A utilização do gráfico visa obter coeficientes de correção para eficiência, vazão e altura de elevação.

Estes coeficientes de correção permitirão o traçado da curva característica de uma determinada bomba quando utilizada com um fluido mais viscoso, com base na curva de funcionamento obtida com água,

Figura 9.16 - Gráfico para correção de viscosidade



Como exemplo, utilizamos a curva de funcionamento da bomba XXX, 3500 [RPM] com rotor de 134 [mm], da figura 9.17.

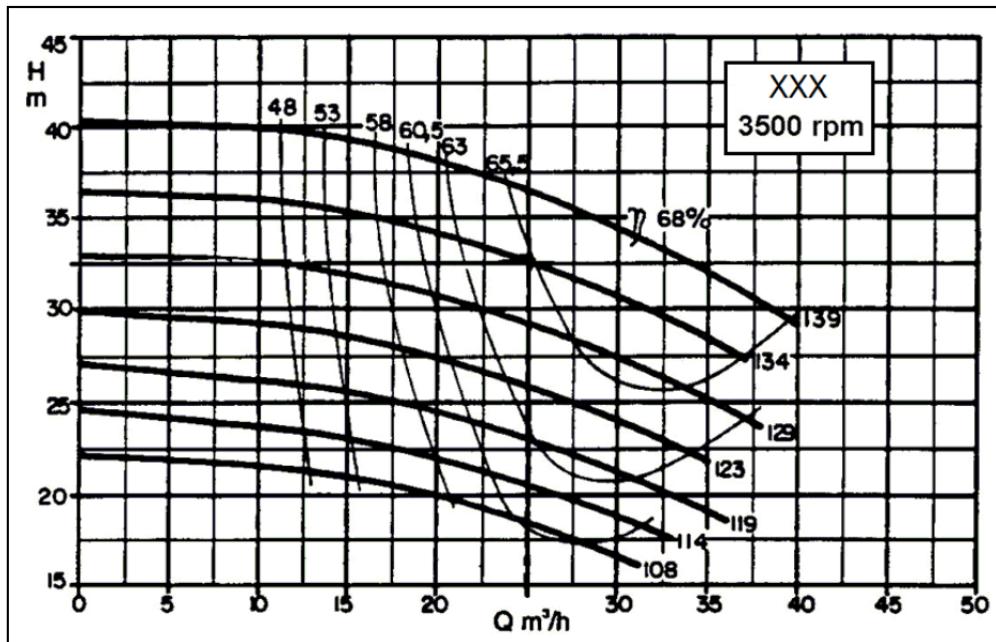


Figura 9.17 - Curva da bomba (testada com água)

Primeiramente determina-se os valores das grandezas características do ponto de rendimento máximo (para o diâmetro escolhido) e os respectivos valores das grandezas para 60%, 80% e 120% da vazão do ponto de maior rendimento.

Os valores obtidos da curva da bomba testada com água estão apresentados na Tabela 9.1 (valores aproximados). Caso não esteja disponível a curva de potência da bomba pode-se calcular os respectivos valores utilizando os valores de eficiência para cada ponto.

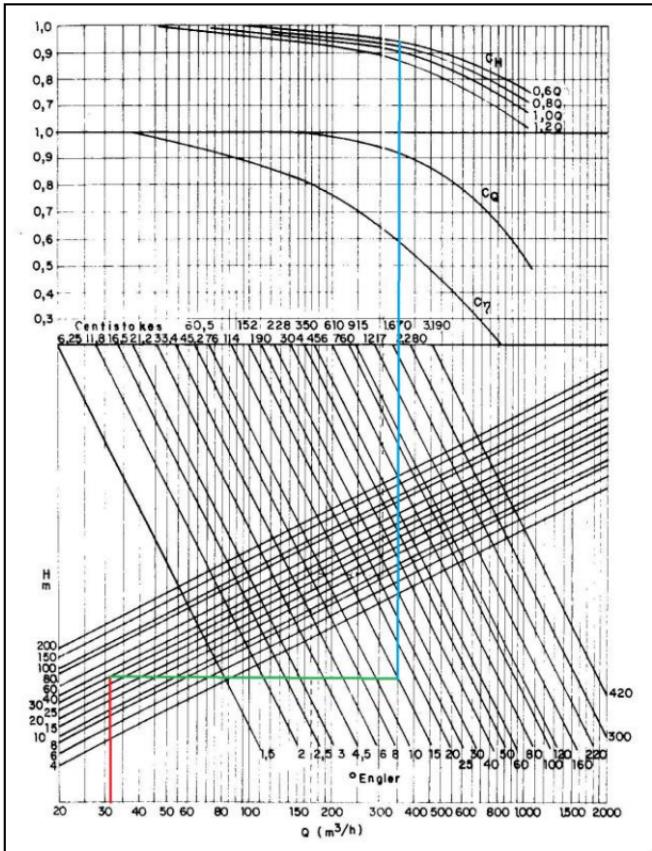
	Q [m <sup>3</sup> /h]	H [m]	η %	P <sub>e</sub> [kW]
0,6 Q <sub>max-η</sub>	19,2	34	60,5	2,94
0,8 Q <sub>max-η</sub>	25,6	32	66,0	3,38
1,0 Q <sub>max-η</sub>	32,0	30	67,0	3,90
1,2 Q <sub>max-η</sub>	38,4	26	64,0	4,25

Tabela 9.1 – Pontos da curva característica para água

Neste exemplo será construída as curvas  $Q$ ,  $H$ ,  $\eta$  e  $P_{ef}$  para um fluido com viscosidade cinemática de 114 cSt (114 vezes a viscosidade da água a 20 [°C]) e densidade 0,80.

Para determinar os fatores de correção deve-se seguir o procedimento gráfico:

- a) a partir do valor de  $Q$  para o melhor rendimento, sobe-se uma linha vertical até encontrar valor de  $H$ , altura de elevação para o melhor rendimento,
- b) a partir deste ponto, traça-se uma linha horizontal até encontrar com a linha respecitva a viscosidade do fluido que se deseja obter as curvas corrigidas e,
- c) a partir deste ponto sobe-se uma linha vertical até cruzar as curvas de  $C_\eta$  ,  $C_Q$  e as de  $C_H$  , estes pontos definirão os fatores de correção de cada grandeza de funcionamento.



Observa-se que existe um único fator de correção para as vazões e para os rendimentos totais, e valores diferentes de fator de correção para cada altura de elevação correspondente aos pontos de 60, 80, 100 e 120% da vazão de ótimo rendimento.

A potência efetiva será corrigida através de:

$$P_{\text{ef}} = \frac{g \rho Q H}{\eta_t} \quad \text{ou}$$

$$P_{\text{ef-visc}} = d_{\text{visc}} \frac{C_Q C_H}{C_{\eta}} P_{\text{ef-água}}$$

Figura 9.18 - Exemplo de determinação de fatores

Os fatores de correção obtidos foram:  $C_Q = 0,92$  ,  $C_\eta = 0,6$  ,  $C_{H0,6Q} = 0,94$  ,  $C_{H0,8Q} = 0,92$  ,  $C_{H1,0Q} = 0,90$  e  $C_{H1,2Q} = 0,86$ .

Os resultados após as correções são apresentados na Tabela 9.2 e na figura 9.19.

	$Q_v$ [m <sup>3</sup> /h]	$H_v$ [m]	$\eta_v$ %	$P_{e-v}$ [kW]
$0,6 Q_{max-\eta}$	17,7	32,0	36,3	3,39
$0,8 Q_{max-\eta}$	23,6	29,4	39,6	3,81
$1,0 Q_{max-\eta}$	29,4	27,0	40,2	4,31
$1,2 Q_{max-\eta}$	35,3	22,4	38,4	4,48

Tabela 9.2 – Curva característica para o fluido mais viscoso.

### Grandezas de funcionamento com água e com fluido viscoso

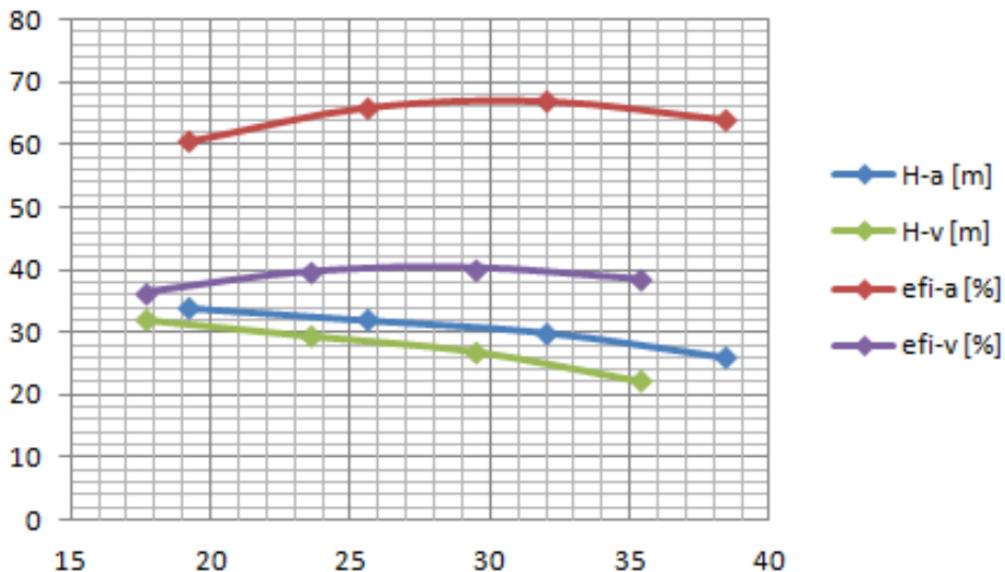


Figura 9.19 – Curva característica da bomba com água e com fluido mais viscoso.