MATLAB

EM

VIBRAÇÕES MECÂNICAS

O QUE É O MATLAB?

O MATLAB ("MATrix LABoratory") é um ambiente computacional com diversos programas, que pode ser usado para a resolução de uma variedade de problemas científicos e de engenharia, tais como:

diferenciação e integração numérica, equações diferenciais ordinárias e parciais, ajuste de curvas, equações não lineares e otimização;

→ também pode resolver muitos tipos de problemas simbolicamente.

O MATLAB é bastante conveniente para cálculo e programação bem como para geração de gráficos.

Pode-se executar uma única declaração ou uma lista de declarações, reunidas num arquivo de programa ("script file").

DADOS E OPERAÇÕES ELEMENTARES

O único tipo de dado no MATLAB é uma matriz de valores complexos. Assim, escalares, vetores com elementos inteiros e matrizes com valores reais são tratados como casos especiais de matrizes complexas.

Os símbolos usados nas operações aritméticas básicas de adição, subtração, multiplicação, divisão e exponenciação são, respectivamente,

+, –, *, / e ^ .

Em qualquer expressão, os cálculos são executados da esquerda para a direita, sendo que a exponenciação tem a prioridade mais alta, seguida pela multiplicação e pela divisão (com prioridades iguais) e então pela adição e pela subtração (também com prioridades iguais).

PRECISÃO E VARIÁVEIS

PRECISÃO

O MATLAB usa precisão dupla durante os cálculos, mas fornece os resultados na tela em formato mais reduzido. Essa característica pode ser alterada com a utilização do comando *format*.

VARIÁVEIS

Quando o MATLAB encontra um novo nome de variável, ele automaticamente cria a variável e aloca o espaço apropriado.

O nome deve começar com uma letra, seguida por letras, dígitos e “underscores”. São usados os primeiros 63 caracteres. Letras maiúsculas e minúsculas são distinguidas. Nomes reservados não são aceitos.

CRIAÇÃO DE VETORES E MATRIZES

Antes de realizar operações aritméticas tais como adição e multiplicação de matrizes, essas matrizes devem ser criadas, da seguinte forma:

VETOR LINHA

≫ A = [1 2 3]

Um vetor linha, com n elementos, é tratado como uma matriz (1 x n), ficando seus elementos entre colchetes e separados por espaços ou vírgulas.

Se não for acrescentado um ponto e vírgula no final da linha, o MATLAB apresenta os resultados da linha na tela, após ela ter sido lida.

CRIAÇÃO DE VETORES E MATRIZES (cont.)

VETOR COLUNA

$\gg$ A = [1; 2; 3] ou $\gg$ A = [1 2 3]'

Um vetor coluna, com n elementos, é tratado como uma matriz (n x 1). Seus elementos podem ser digitados em uma única linha, usando ponto e vírgula para separá-los.

Alternativamente, pode ser usado um vetor linha, com um apóstrofo no colchete da direita, que representa a operação de transposição. Assim, o vetor linha torna-se um vetor coluna.

CRIAÇÃO DE VETORES E MATRIZES (cont.)

MATRIZ

Para inserir uma matriz, por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

a seguinte especificação pode ser usada:

$\gg$ A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]

VETORES COM ESTRUTURA ESPECIAL

Em certos casos, a estrutura especial de um vetor é usada para especificá-lo de uma maneira mais simples. Por exemplo,

≫ A = 1:10

representa o vetor linha

$A = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10]$,

enquanto

≫ A = 2:0.5:4

representa o vetor linha

$A = [2.0\ \ 2.5\ \ 3.0\ \ 3.5\ \ 4.0]$.

MATRIZES ESPECIAIS

Algumas matrizes especiais também são referenciadas de maneira especial. Dessa forma, o comando

$\gg$ A = eye(3)

implica uma matriz identidade de ordem 3, qual seja,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

MATRIZES ESPECIAIS (cont.)

Já o comando

$\gg$ A = ones(3)

implica uma matriz quadrada de ordem 3, com todos os seus elementos iguais a 1, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

MATRIZES ESPECIAIS (cont.)

O comando

$\gg$ A = zeros(2,3)

implica uma matriz 2 x 3, com todos os seus elementos iguais a 0, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

OPERAÇÕES ELEMENTARES COM MATRIZES

Matrizes podem somadas, subtraídas e multiplicadas pelo uso dos sinais

$+$, $-$ e $*$,

respectivamente.

Por exemplo, para somar as matrizes A e B, de modo a obter a matriz C, usa-se a declaração

$\gg C = A + B$

FUNÇÕES MATLAB

O MATLAB tem um grande número de funções embutidas, tais como

sqrt(x) – raiz quadrada de x

sin(x) – seno de x

cos(x) – cosseno de x

tan(x) – tangente de x

log10(x) – logaritmo de x na base 10

ln(x) – logaritmo neperiano de x

exp(x) – função exponencial de x

FUNÇÕES MATLAB (cont.)

Para gerar um vetor y que contenha 11 valores associados com a função

$$y = e^{-2x} \cos x \ ,$$

com

$$x = 0,\ 0.1, 0.2, ..., 1.0 \ ,$$

digita-se o seguinte:

≫ x = 0:0.1:1

≫ y = exp(-2*x).*cos(x)

O ponto antes do sinal de multiplicação permite que os valores das funções exponencial e cosseno sejam multiplicados em correspondência.

NÚMEROS COMPLEXOS

O MATLAB considera a álgebra de números complexos automaticamente.

Os símbolos i e j podem ser usados para representar a parte imaginária, sem necessidade de um asterisco entre eles e um número. Por exemplo,

≫ z = 1 – 3i

gera a variável complexa z, cuja a parte real é 1 e a parte imaginária é –3.

O módulo e o argumento (em radianos) de um número complexo z = a + ib podem ser determinados da seguinte forma:

≫ mz = abs(z)   (módulo de $z = \sqrt{a^2 + b^2}$)

≫ az = angle(z)   (argumento de $z = \arctan\left(b/a\right)$)

ARQUIVOS M

Como visto até agora, o MATLAB pode ser usado em modo interativo, com a digitação imediata de cada comando pelo teclado. Nesse modo, ele executa as operações como se fosse uma calculadora mais avançada.

Contudo, se o mesmo conjunto de comandos tiver que ser repetido várias vezes, com valores diferentes dos parâmetros de entrada, desenvolver um programa será mais rápido e eficiente.

Um programa MATLAB consiste em uma sequência de instruções de interesse, escritas em um módulo próprio e então executadas como um único bloco de comandos.

Um arquivo de programa é dito “script file” ou “m-file” (arquivo m).

ARQUIVOS M (cont.)

É necessário dar um nome ao arquivo de programa, que deverá terminar com a extensão .m (um ponto seguido da letra m). Um arquivo m típico, denominado fibo.m, é dado a seguir:

```
% m-file to compute Fibonacci numbers
f=[1 1];
i=1;
while f(i) + f(i+1) < 1000
   f(i+2)=f(i)+f(i+1);
   i=i+1;
end
```

ARQUIVOS M (cont.)

Um arquivo m também pode ser usado para escrever funções (subrotinas), que serão utilizadas por outros programas.

Nesse caso, a geração do arquivo se dá de forma independente, mas a execução ocorre a partir da linha de comando, ou no programa principal.

Por exemplo, a solução de uma equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

pode ser determinada com a utilização da seguinte função:

ARQUIVOS M (cont.)

```
function [x1, x2]=raizes_quadraticas(a,b,c)
% função para encontrar as raízes de uma equação quadrática
dis=b^2-4*a*c;  % dis = discriminante
if (dis < 0.0)
  x1=(-b+i*sqrt(-dis))/(2*a);
  x2=(-b-i*sqrt(-dis))/(2*a);
  disp('As raízes são complexas conjugadas.');
elseif (abs(dis) < 1e-8)  % dis = 0.0
  x1=-b/(2*a);    x2=-b/(2*a);
  disp('As raízes são idênticas.');
```

```
else (dis > 0.0)
  x1=(-b+sqrt(dis))/(2*a);
  x2=(-b-sqrt(dis))/(2*a);
  disp('As raízes são reais e distintas.');
end
```

Para a = 2, b = 2 e c = 1, essa função, através do comando

$\gg$ [x1,x2] = raizes_quadraticas(2,2,1)

fornecerá o seguinte resultado:

As raízes são complexas conjugadas.

$x1 = -0.5000 + 0.5000i \quad x2 = -0.5000 - 0.5000i$

GERAÇÃO DE GRÁFICOS

Para gerar um gráfico em MATLAB, define-se um vetor de valores da variável independente x (vetor x) e um vetor de valores da variável dependente y, correspondente aos valores de x (vetor y).

Na sequência, o gráfico x-y pode ser gerado com o comando $\mathrm{plot}(x, y)$.

Para gerar, por exemplo, o gráfico da função $y = x^2 + 1$, na faixa $0 \le x \le 3$, os seguintes comandos devem ser utilizados:

```
≫x = 0:0.2:3;
≫y = x.^2 + 1;
≫ plot(x,y)
```

GERAÇÃO DE GRÁFICOS (cont.)

Note que as duas primeiras linhas acima geram os vetores x e y (com incrementos de 0,2 para x), enquanto a terceira linha gera o gráfico (conectando os pontos por linhas retas, que é a opção padrão).

Já as cinco linhas abaixo permitem a representação gráfica dos eixos x e y, junto com a montagem da grade.

```
≫hold on
≫x1 = [0 3]; y1 = [0 0]; x2 = [0 0]; y2 = [0 10];
≫plot(x1,y1,’-b’,x2,y2,'-b')
≫grid on
≫hold off
```

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Para a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, o MATLAB tem diversas funções construídas com base nos métodos de Runge-Kutta.

A função MATLAB **ode23** implementa uma combinação de métodos de Runge-Kutta de segunda e terceira ordens, enquanto a função **ode45** tem como base uma combinação de métodos de quarta e quinta ordens.

Para usar essas funções na resolução de uma equação diferencial ordinária de ordem n, a equação deve ser previamento convertida para um sistema de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

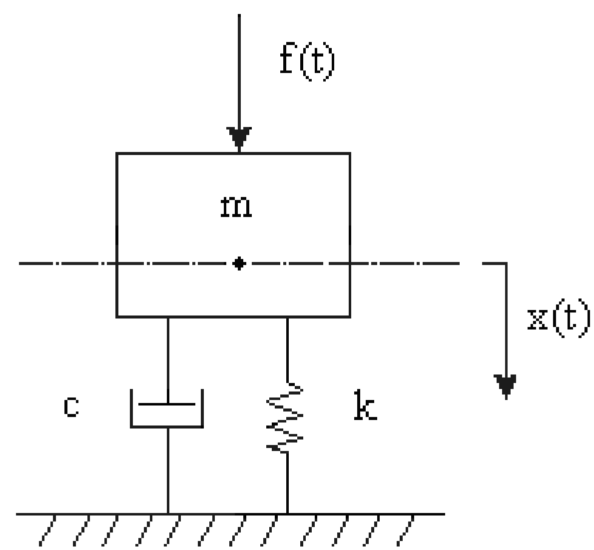
SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (cont.)

Como exemplo, considere a resolução do problema de valor inicial composto pela equação diferencial ordinária (EDO)

$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f}$ ou, na forma padrão, $\boxed{\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f}$,

junto com as condições iniciais $\boxed{x(0) = x_0 \text{ e } \dot{x}(0) = v_0}$.

Essa equação descreve o comportamento de um sistema mecânico com um grau de liberdade, como ilustrado na figura ao lado.



SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (cont.)

Para resolver esse problema numericamente, transforma-se a EDO num sistema de 2 equações de ordem 1, pela definição das variáveis de estado

$$x_1(t) = x(t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = \dot{x}(t) \;,$$

onde $x_1(t)$ representa o deslocamento e $x_2(t)$ a velocidade.

Com base nessas definições, tem-se que

$$\boxed{\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{e} \quad \dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}f} \;, \text{com} \; \boxed{x_1(0) = x_0 \;\text{ e }\; x_2(0) = v_0} \; \text{(ci's).}$$

Para um sistema com m = 100 kg, c = 100 kg/s, k = 2000 N/m, x_0 = 0,01 m, v_0 = 0,1 m/s e f(t) = 150sen(6t), o programa e a função correspondentes em MATLAB serão os seguintes:

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (cont.)

a) programa solumgdl (programa principal)

```
% solução numérica de sistema com 1 gdl sob excitação harmônica
clc
clearvars
close all
ts=[0 15];
ci=[0.01  0.1];
[t,x]=ode45('seh',ts,ci);
plot(t,x(:,1))
xlabel('tempo (s) ')
ylabel('deslocamento (m)')
grid on
```

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (cont.)

b) função seh (rotina auxiliar, não executável)

```
function f=seh(t,x)
% sistema de 1 gdl sob excitação harmônica, ci's não nulas
m=100; c=100; k=2000; % sistema
f0=150; wf=6; % força
f=[x(2); -(c/m)*x(2)-(k/m)*x(1)+(1/m)*f0*sin(wf*t)];
```

A função denominada seh contém o sistema de equações de primeira ordem, correspondente à equação diferencial de interesse.

Nela também são incluídos os parâmetros do sistema e as características de amplitude e frequência da força atuante sobre o sistema.

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (cont.)

Como resultado da execução do programa solumgdl, que contém as subrotinas ode45 e seh, obtém-se o gráfico abaixo.