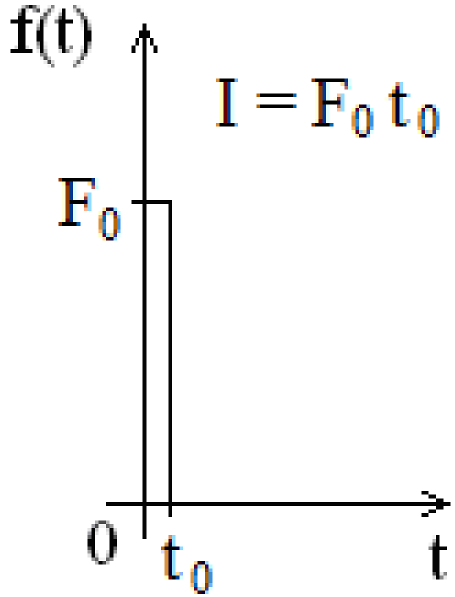
EXEMPLO – SISTEMA COM UM GDL SOB ENSAIO DE IMPACTO

Seja um dispositivo sob ensaio de impacto. Ele é modelado como um sistema com 1 gdl, com $m = 1\ \text{kg}$, $c = 0,5\ \text{kg/s}$ e $k = 4\ \text{N/m}$.



O impacto a ser exercido pelo martelo é modelado pela força impulsiva ao lado, em que $F_0 = 4\ \text{N}$ e $t_0 = 0,05\ \text{s}$.

O impulso I dessa força é igual ao produto $F_0 t_0$ e corresponde à intensidade da excitação.

Assim sendo, determinar:

(a) a receptância e a mobilidade preditas para o dispositivo;

(b) a vibração (deslocamento) predita para o dispositivo, tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo.

EXEMPLO – SISTEMA COM UM GDL SOB IMPACTO (cont.)

Na sequência, indicar como se pode, de forma elementar, obter

(c) a receptância e a mobilidade do dispositivo, caso se disponha apenas dos registros temporais da força e da vibração.

Solução: **(a)** Da expressão 7.65, tem-se que a receptância é dada por

$$\bar{H}(\omega)=\frac{\bar{X}(\omega)}{\bar{F}(\omega)}=\frac{1}{\left[\left(-\omega^2 m+k\right)+ic\omega\right]}\;.$$

Como, para o dispositivo em tela, $m=1\text{kg}$, $c=0,5\text{kg}/\text{s}$ e $k=4\text{N}/\text{m}$, tem-se

$$\bar{H}(\omega)=H(\omega)e^{i\psi_H(\omega)}=\frac{1}{\left[\left(-\omega^2+4\right)+i\left(0,5\right)\omega\right]}\ \text{m/N}$$

onde $H(\omega)$ é o módulo e $\psi_H(\omega)$ é argumento da receptância.

EXEMPLO – SISTEMA COM UM GDL SOB IMPACTO (cont.)

Já a mobilidade, conforme a expressão 7.66, é dada por

$$\bar{H}_V(\omega) = i\omega\bar{H}(\omega) = \frac{i\omega}{\left[\left(-\omega^2+4\right)+i\left(0,5\right)\omega\right]} \ \mathrm{m/(N.s)}\ .$$

(b) Modelando a força f(t) com o uso da função delta de Dirac $\delta(t)$, tem-se

$$f(t) = F_0 t_0 \delta(t)\ \mathrm{N} \quad \therefore \quad \bar{F}(\omega) = F_0 t_0\ \mathrm{N.s}\ \text{(função constante).}$$

Sabe-se que, na frequência, a vibração é dada por $\bar{X}(\omega) = \bar{H}(\omega)\bar{F}(\omega)$. Então,

$$\bar{X}(\omega) = \bar{H}(\omega)\bar{F}(\omega) = \frac{F_0 t_0}{\left[\left(-\omega^2 m + k\right)+ic\omega\right]} = \frac{4.0,05}{\left[\left(-\omega^2+4\right)+i\left(0,5\right)\omega\right]} \ \mathrm{m.s}\ .$$

EXEMPLO – SISTEMA COM UM GDL SOB IMPACTO (cont.)

A vibração (deslocamento) $\overline{X}(\omega)$ é uma função complexa da variável real e pode, assim, ser expressa por

$$\overline{X}(\omega) = X(\omega)e^{i\psi_X(\omega)},$$

onde $X(\omega)$ é o módulo e $\psi_X(\omega)$ é o argumento dessa vibração.

Já para a determinação da <u>vibração</u> no <u>domínio do tempo</u>, a expressão geral da receptância $\overline{H}(\omega)$, qual seja,

$$\overline{H}(\omega) = \frac{\overline{X}(\omega)}{\overline{F}(\omega)} = \frac{1}{\left[\left(-\omega^2 m + k\right) + ic\omega\right]}$$

deve ser manipulada, por conveniência.

EXEMPLO – SISTEMA COM UM GDL SOB IMPACTO (cont.)

De imediato, tem-se que

$$\bar{H}(\omega) = \frac{1}{\left[\left(-\omega^2 m + k\right) + ic\omega\right]} = \frac{1}{\left(i\omega c - \omega^2 m + k\right)} = \frac{1}{m\left(i\dfrac{\omega c}{m} - \omega^2 + \dfrac{k}{m}\right)}$$

$$= \frac{1}{m\left[\left(\dfrac{c^2}{4m^2} + 2\dfrac{c}{2m}i\omega - \omega^2\right) + \left(\dfrac{k}{m} - \dfrac{c^2}{4m^2}\right)\right]} = \frac{1}{m\left[\left(\dfrac{c}{2m} + i\omega\right)^2 + \dfrac{k}{m}\left(1 - \dfrac{c^2}{4km}\right)\right]}.$$

Ocorre que (ver cap. 4)

$$\frac{c}{2m} = \frac{c_c\zeta}{2m} = \frac{2m\omega_n\zeta}{2m} = \zeta\omega_n = \delta \quad \text{e} \quad \frac{c^2}{4km} = \frac{c^2}{4\left(\dfrac{k}{m}\right)m^2} = \frac{c^2}{4m^2\omega_n^2} = \frac{c^2}{c_c^2} = \zeta^2.$$

EXEMPLO – SISTEMA COM UM GDL SOB IMPACTO (cont.)

Portanto, como $\left(c/2m\right)=\delta$ e $\left(c^2/4m\right)=\zeta^2$, decorre que

$$\bar{H}(\omega)=\frac{1}{m\left[\left(\frac{c}{2m}+i\omega\right)^2+\frac{k}{m}\left(1-\frac{c^2}{4km}\right)\right]}=\frac{1}{m\left[\left(\delta+i\omega\right)^2+\omega_n^2\left(1-\zeta^2\right)\right]}.$$

Uma vez que $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=\nu$ (ver também cap. 4), resulta que

$$\bar{H}(\omega)=\frac{1}{m\left[\left(\delta+i\omega\right)^2+\nu^2\right]}\quad \text{e}$$

$$\bar{X}(\omega)=\bar{H}(\omega)\bar{F}(\omega)=\frac{F_0t_0}{m\left[\left(\delta+i\omega\right)^2+\nu^2\right]}.$$

EXEMPLO – SISTEMA COM UM GDL SOB IMPACTO (cont.)

Ora, mostra-se (vide cap. 7, exemplo 7.3) que

função	**transformada de Fourier**
$x(t)=\begin{cases} Ce^{-at}\text{sen}(bt),\ t\geq 0 \\ 0,\ t<0 \end{cases}$	$\bar{X}(\omega)=\dfrac{Cb}{\left[(a+i\omega)^2+b^2\right]}$

Comparando as expressões para $\bar{X}(\omega)$ dadas acima, quais sejam,

$$\bar{X}(\omega)=\frac{F_0 t_0}{m\left[(\delta+i\omega)^2+\nu^2\right]} \quad \text{e} \quad \bar{X}(\omega)=\frac{Cb}{\left[(a+i\omega)^2+b^2\right]},$$

pode-se relacionar

$$\frac{F_0 t_0}{m}=Cb\ , \quad \delta=a \quad \text{e} \quad \nu=b\ .$$

EXEMPLO – SISTEMA COM UM GDL SOB IMPACTO (cont.)

Substituindo $a = \delta$, $b = \nu$ e $C = \dfrac{F_0 t_0}{mb} = \dfrac{F_0 t_0}{m\nu}$ em

$$x(t) = Ce^{-at} \mathrm{sen}(bt) \quad (t \geq 0)$$

chega-se a

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{F_0 t_0}{m\nu} e^{-\delta t} \mathrm{sen}\left(\nu t\right), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} .$$

que é a vibração x(t) (deslocamento, em m) do dispositivo.

(c) Considere-se agora que f(t) e x(t) sejam medidos, por um sensor de força e um acelerômetro, respectivamente.

EXEMPLO – SISTEMA COM UM GDL SOB IMPACTO (cont.)

As transformadas de Fourier $\overline{F}(\omega)$ e $\overline{X}(\omega)$ podem ser obtidas pelo uso da transformada rápida de Fourier (FFT, do inglês "fast Fourier transform").

Trata-se de um algoritmo eficaz e eficiente, implementado em vários códigos computacionais e em analisadores digitais de sinais.

De posse dessas transformadas de Fourier, a receptância e a mobilidade podem, então, ser estimadas por

$$\overline{H}(\omega) = \frac{\overline{X}(\omega)}{\overline{F}(\omega)} \quad \text{e} \quad \overline{H}_V(\omega) = i\,\omega\overline{H}(\omega) \ .$$

Essas estimativas são aplicáveis para medições isentas de ruído. Isso, via de regra, não é o caso, demandando um processo de estimação mais apurado.