

NÚMEROS E FUNÇÕES COMPLEXAS

CONTEXTUALIZAÇÃO

Números complexos ocorrem frequentemente na análise de vibrações, vindos da solução de equações diferenciais através de suas equações características.

Em particular, a solução homogênea de um sistema de um grau de liberdade, dada pela Eq. (4.4), é dependente dos valores de λ , satisfazendo a equação algébrica

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (\text{A.1})$$

Esta é uma equação quadrática familiar, que tem como solução

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk} \quad (\text{A.2})$$

As raízes dadas pela Eq. (A.2) serão complexas se $c^2 - 4mk < 0$ (radicando negativo), o que corresponde ao caso de amortecimento subcrítico.

CONTEXTUALIZAÇÃO (cont.)

Defina-se, então, simbolicamente

$$i = \sqrt{-1} \quad (\text{A.3})$$

de modo que

$$i^2 = -1 \quad (\text{A.4})$$

Assim, tem-se que

$$\sqrt{c^2 - 4mk} = \sqrt{(-1)(4mk - c^2)} = \sqrt{i^2(4mk - c^2)} = i\sqrt{4mk - c^2} \quad (\text{A.5})$$

onde $\sqrt{4mk - c^2} > 0$.

Esta representação permite que as duas raízes da Eq. (A.1) sejam dadas por

$$-\frac{c}{2m} - i\frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2} \quad e \quad -\frac{c}{2m} + i\frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2} \quad (\text{A.6})$$

NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

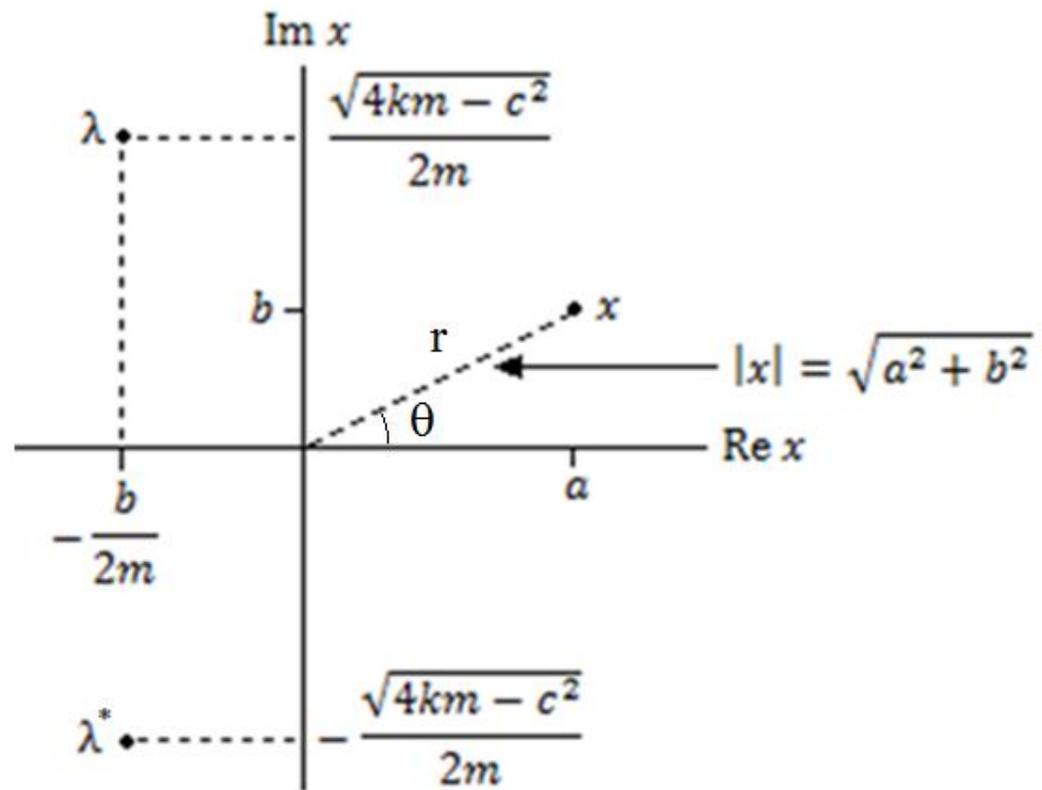
Um **número complexo** qualquer x pode ser escrito como $x = a + ib$.

O **número real** a é a **parte real** de x , enquanto o **número real** b é a **parte imaginária** de x .

Usa-se $\text{Re } x$ para indicar a parte real ($\text{Re } x = a$) e $\text{Im } x$ para a parte imaginária ($\text{Im } x = b$).

Os números complexos podem ser representados no plano como ilustrado na Fig. A.1, ao lado.

Essa representação é denominada **diagrama de Argand**.



NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA (cont.)

Os números complexos $a + ib$ e $a - ib$ são chamados, entre si, de **conjugados**.

A notação x^* é usada para denotar o conjugado de um número complexo x . Isto é,

$$\text{se } x = a + ib, \text{ então } x^* = a - ib.$$

As raízes da Eq. (A.1) aparecem como um par de números complexos conjugados, como se vê na Eq. (A.6) (caso de amortecimento subcrítico).

Outras propriedades dos números complexos são o seu **módulo**, indicado por $|x|$, e o seu **argumento**, indicado por $\arg(x)$. Eles são tais que

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{A.7}$$

$$\arg(x) = \theta = \arctan(b/a) \tag{A.8}$$

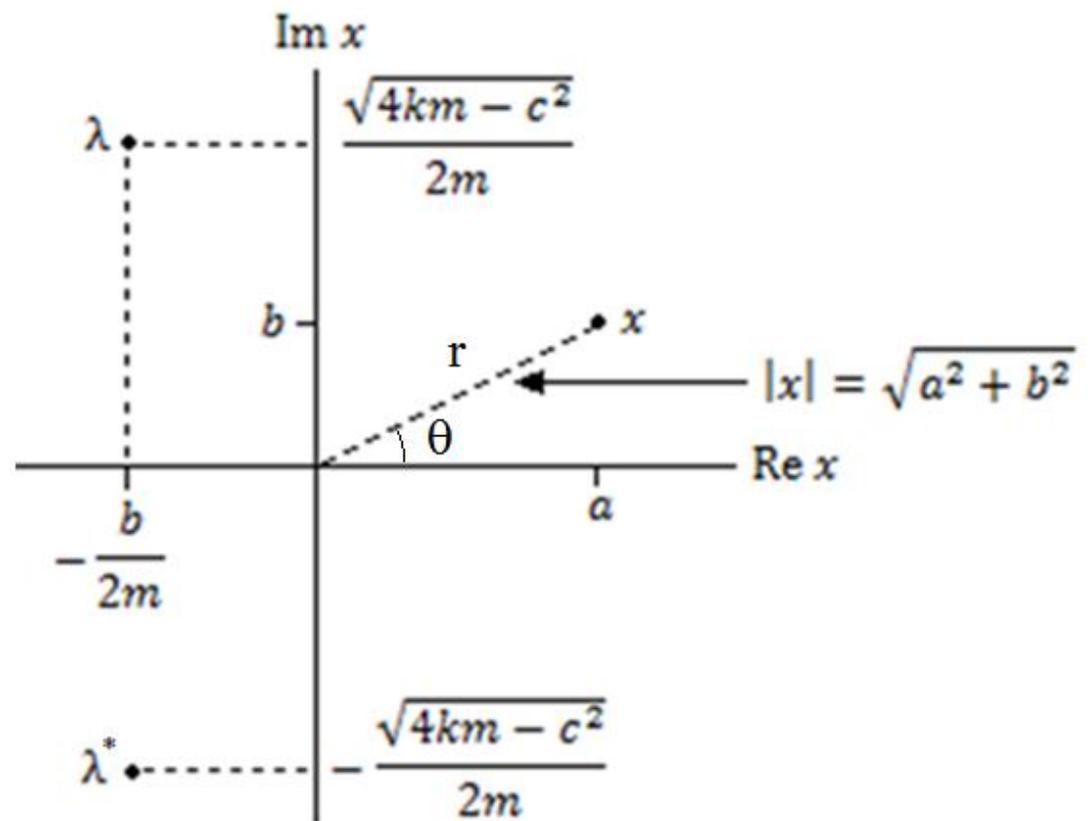
NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA (cont.)

O módulo de um número complexo é, na Fig. A.1, a distância r da origem até o ponto associado a x . Já o argumento é o ângulo θ cuja tangente é (b/a) .

Nota-se, na Fig. A.1, que os conjugados aparecem na mesma linha vertical, pois possuem a mesma parte real.

Nota-se também que eles possuem o mesmo módulo $|x|$.

Por vezes, um número complexo x é denotado por \bar{x} , para realçar sua condição.



MANIPULAÇÃO

Números complexos são manipulados de forma específica, usando a aritmética de números reais e seguindo regras similares às empregadas para vetores.

A **adição de dois números complexos** é definida simplesmente pela adição das partes reais e das partes imaginárias correspondentes, como entidades separadas.

Em particular, se $x = a + ib$ e $y = c + id$, então

$$x + y = (a + c) + i(b + d) \quad (\text{A.9})$$

De maneira consistente, sendo β um número real, então

$$\beta x = \beta a + i\beta b \quad (\text{A.10})$$

expressa o **produto de um número real por um número complexo**.

MANIPULAÇÃO (cont.)

A **multiplicação de dois números complexos** é tal que, para os números complexos genéricos x e y definidos anteriormente, tem-se que

$$x.y = (a + ib).(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \quad (\text{A.11})$$

onde se usa a definição de que β vezes (i) , com β real, é igual a $i\beta$.

Assim sendo, $\text{Re } xy = (ac - bd)$ e $\text{Im } xy = (ad + bc)$.

O produto de x com seu conjugado x^* se torna um número real, uma vez que

$$x.x^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Isso pode ser ligado à definição do módulo de x , dada pela Eq. (A.7), posto que

$$|x|^2 = a^2 + b^2 = x.x^* \quad (\text{A.12})$$

que, como já se viu, é um número real.

MANIPULAÇÃO (cont.)

Com a adição (e, conseqüentemente, a subtração) e a multiplicação definidas, é importante definir a divisão de um número complexo por outro.

Primeiro, nota-se que a **identidade multiplicativa** de um número complexo é simplesmente o número real 1 (ou seja, $1x = x$, para todo número complexo x). Já o **inverso de um número complexo** $x = a + ib$ é dado por

$$(a + ib)^{-1} = \frac{1}{(a + ib)} = \frac{(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(a - ib)}{a^2 + b^2} \quad (\text{A.13})$$

sendo $x = a + ib \neq 0$.

Observa-se que

$$(a + ib)^{-1}(a + ib) = \frac{(a - ib)}{a^2 + b^2}(a + ib) = 1 .$$

MANIPULAÇÃO (cont.)

A equação (A.13) permite a formulação da **divisão de dois números complexos**.

Para tanto, considere-se a divisão de y por x , tal que

$$\frac{y}{x} = \frac{c + id}{a + ib} = (c + id)(a + ib)^{-1} \quad (\text{A.14})$$

Da Eq. (A.13) para a inversa de x , tem-se que

$$\frac{y}{x} = (c + id) \frac{(a - ib)}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} [(ac + bd) + i(ad - cb)] \quad (\text{A.15})$$

para $x \neq 0$.

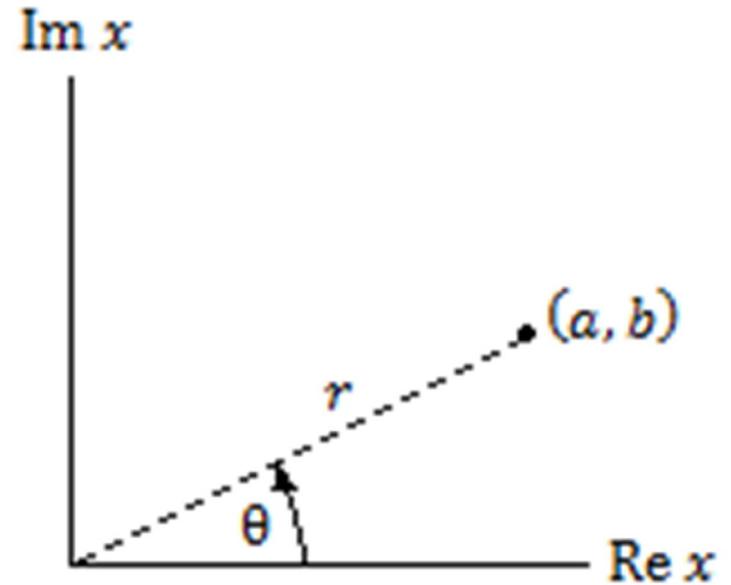
Observa-se que $x = 0$ se e somente se $a = b = 0$.

FORMA POLAR

Um **número complexo** x pode também ser representado em **coordenadas polares**, como ilustrado na Fig. A.2, ao lado.

Nela, r é o **módulo** e θ é o **argumento** de x .

Como $r = |x| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arctan(b/a)$, o número complexo x pode ser escrito como



$$x = a + ib = (r \cos \theta) + i(r \sin \theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} \quad (\text{A.16})$$

em que

$$e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{A.17})$$

FORMA POLAR (cont.)

A partir da equação (A.17), pode-se mostrar que

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right) \quad (\text{A.18}) \quad \text{e} \quad \text{sen } \theta = \frac{1}{2i} \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta} \right) \quad (\text{A.19})$$

Essas equações são referidas como **fórmulas de Euler**.

Essas fórmulas, para funções trigonométricas, podem ser comparadas com as fórmulas correspondentes para funções hiperbólicas, que são

$$\cosh \theta = \frac{1}{2} \left(e^{\theta} + e^{-\theta} \right) \quad (\text{A.20}) \quad \text{e} \quad \sinh \theta = \frac{1}{2} \left(e^{\theta} - e^{-\theta} \right) \quad (\text{A.21})$$

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

A formulação algébrica acima exposta para números complexos pode ser estendida para funções reais de variáveis complexas, funções complexas de variáveis reais e funções complexas de variáveis complexas.

Um exemplo de função real de variável complexa é dada pela Eq. (A.7), em que

$$f(x) = |x| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Essa é uma **função real de variável complexa** porque x é complexa e $f(x)$, que é o módulo de x , é real.

Outro exemplo é dado pela Eq. (A.8), qual seja,

$$\arg(x) = \theta = \arctan(b/a).$$

Essa função corresponde ao argumento de x .

FUNÇÕES COMPLEXAS DE VARIÁVEIS REAIS

Em vibrações, lida-se corriqueiramente com **funções complexas** cuja **variável independente é real**.

Se x , agora, for uma variável real e $f(x)$ tomar valores complexos, então $f(x)$ poderá ser, de forma geral, expressa por

$$f(x) = u(x) + iv(x) \quad (\text{A.22})$$

onde $u(x)$ e $v(x)$ são funções reais.

A função conjugada será

$$f^*(x) = u(x) - iv(x) \quad (\text{A.23})$$

A multiplicação de funções complexas segue o padrão dado pela equação (A.11) para números complexos.

FUNÇÕES COMPLEXAS DE VARIÁVEIS REAIS (cont.)

E assim todas as fórmulas desenvolvidas anteriormente para números complexos se aplicam para funções complexas.

Em particular,

$$|f(\mathbf{x})| = \sqrt{f(\mathbf{x})f^*(\mathbf{x})} = \sqrt{u^2(\mathbf{x}) + v^2(\mathbf{x})} \quad (\text{A.24})$$

e, para valores de \mathbf{x} em que $f(\mathbf{x}) \neq 0$,

$$\frac{1}{f(\mathbf{x})} = \frac{1}{u^2(\mathbf{x}) + v^2(\mathbf{x})} [u(\mathbf{x}) - iv(\mathbf{x})] \quad (\text{A.25})$$

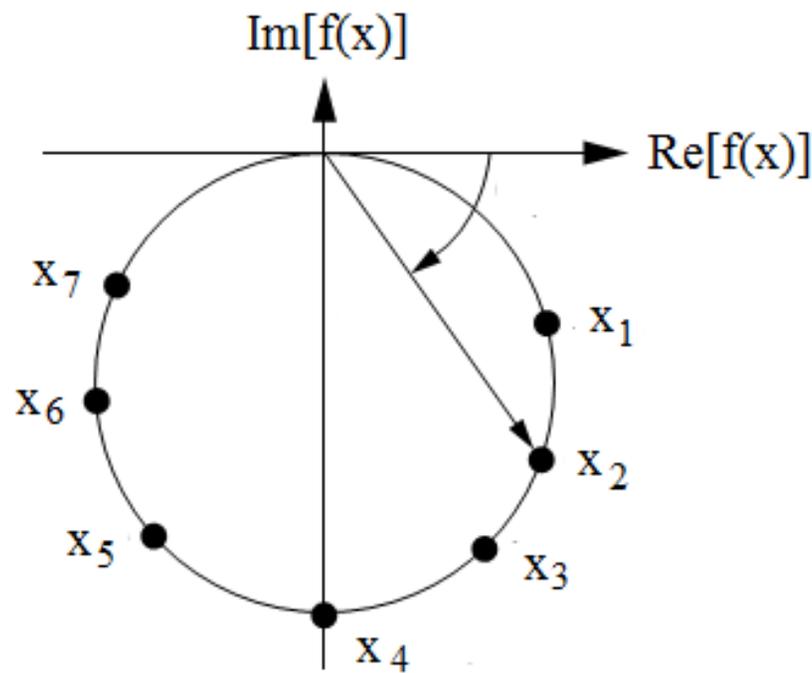
satisfazendo a relação

$$f(\mathbf{x}) \left[\frac{1}{f(\mathbf{x})} \right] = 1.$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES COMPLEXAS

Há representações gráficas de funções complexas de variáveis reais que são frequentemente utilizadas na análise de vibrações.

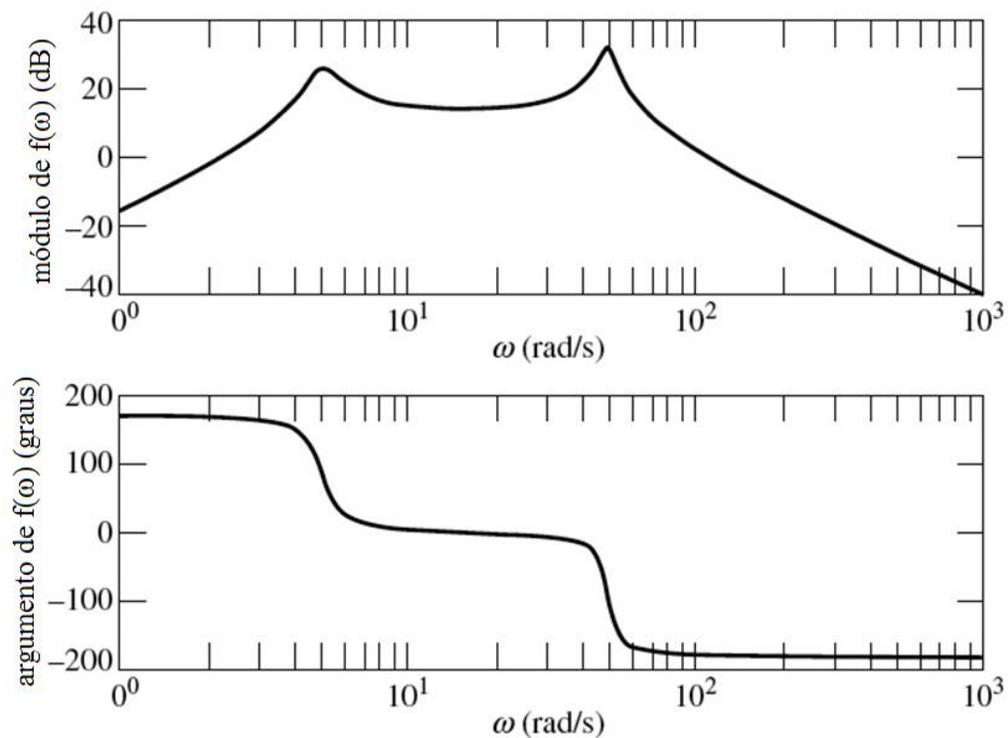
Uma dessas é traçar $u(x)$ por $v(x)$, como ilustrado na Fig. A.3 abaixo, para diferentes valores da variável real x . Esse gráfico é dito um **gráfico de Nyquist**.



REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES COMPLEXAS (cont.)

Outra representação é examinar separadamente o módulo $\sqrt{u^2(x) + v^2(x)}$ e o argumento $\arctan[v(x)/u(x)]$, em função de x , como ilustrado na Fig. A.4 abaixo.

Esses gráficos são denominados **diagramas de Bode**.



FUNÇÕES COMPLEXAS DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

Em geral, uma **função de variável complexa** também será **complexa**. Uma teoria de limites, diferenciação e integração pode ser definida, seguindo, com algumas precauções, as mesmas linhas das funções de variáveis reais.

A maior diferença é que as partes real e imaginária da função complexa devem ter derivadas contínuas de todas as ordens no ponto determinado, mas a função em si pode não ser derivável. É necessário cuidado no cálculo de funções complexas.

Todas as **expressões** desenvolvidas anteriormente **para números complexos** também **se aplicam para funções complexas da variável complexa**.

A representação gráfica dessas funções se torna difícil, pois tanto o argumento quanto a função requerem duas dimensões. Contudo, as representações vistas acima para funções complexas da variável real também são empregadas aqui.