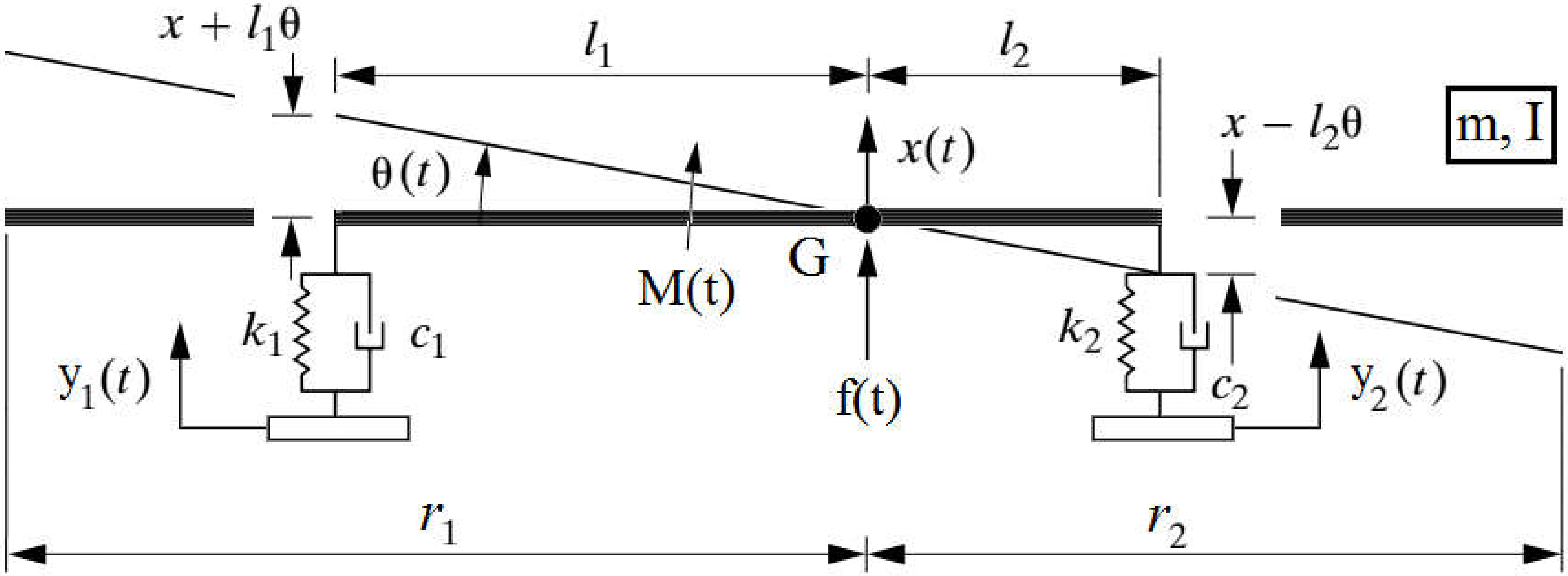
# MODELO COM 2 GRAUS DE LIBERDADE (BASE MÓVEL)

Um modelo com 2 graus de liberdade (gdl), considerando translação e rotação de um corpo rígido, é ilustrado abaixo. Esse modelo pode representar, de forma simplificada, um automóvel, ou uma motocicleta.




*Modelo com 2 gdl (base móvel)*

MODELO MATEMÁTICO

Considerando as forças que agem no modelo, de modo que

$$\sum F_x = m\ddot{x} \quad \text{e} \quad \sum M_\theta = I\ddot{\theta} \ ,$$

resultam as seguintes equações:

$$-k_1(x + l_1\theta - y_1) - k_2(x - l_2\theta - y_2) - c_1(\dot{x} + l_1\dot{\theta} - \dot{y}_1) - c_2(\dot{x} - l_2\dot{\theta} - \dot{y}_2) + f = m\ddot{x} \ (1)$$

$$-k_1(x + l_1\theta - y_1)l_1 + k_2(x - l_2\theta - y_2)l_2 - c_1(\dot{x} + l_1\dot{\theta} - \dot{y}_1)l_1 + c_2(\dot{x} - l_2\dot{\theta} - \dot{y}_2)l_2 + M = I\ddot{\theta} \ (2)$$

Rearranjando as equações acima, decorre que

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} + (c_1 l_1 - c_2 l_2)\dot{\theta} + (k_1 + k_2)x + (k_1 l_1 - k_2 l_2)\theta =$$

$$= f + c_1 \dot{y}_1 + c_2 \dot{y}_2 + k_1 y_1 + k_2 y_2 \quad (3)$$

$$I\ddot{\theta} + (c_1 l_1 - c_2 l_2)\dot{x} + (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2)\dot{\theta} + (k_1 l_1 - k_2 l_2)\, x + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)\theta =$$

$$= M + c_1 l_1 \dot{y}_1 - c_2 l_2 \dot{y}_2 + k_1 l_1 y_1 - k_2 l_2 y_2 \quad (4)$$

MODELO MATEMÁTICO EM FORMA MATRICIAL

Em forma matricial, as equações acima são representadas por

$$\mathrm{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathrm{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathrm{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (5)$$

onde, respectivamente, $\ddot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{f}$, dados por

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f + c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2 + k_1y_1 + k_2y_2 \\ M + c_1l_1\dot{y}_1 - c_2l_2\dot{y}_2 + k_1l_1y_1 - k_2l_2y_2 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

são os vetores de aceleração, velocidade, deslocamento e força.

Já M, C e K são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, dadas por

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_1l_1 - c_2l_2 \\ c_1l_1 - c_2l_2 & c_1l_1^2 + c_2l_2^2 \end{bmatrix}; \quad \mathrm{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_1l_1 - k_2l_2 \\ k_1l_1 - k_2l_2 & k_1l_1^2 + k_2l_2^2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$