MOBILIDADE E CÍRCULO DE NYQUIST

Considere-se agora, a expressão geral da mobilidade, qual seja,

$$\overline{H}_V(\omega) = i\omega\overline{H}(\omega) = \frac{i\omega}{\left[\left(-\omega^2 m + k\right) + ic\omega\right]} \; .$$

Multiplicando numerador e denominador por $\left[(-\omega^2 m + k) - ic\omega\right]$, tem-se que

$$\overline{H}_V(\omega) = \frac{i\omega\left[\left(-\omega^2 m + k\right) - ic\omega\right]}{\left[\left(-\omega^2 m + k\right)^2 + (c\omega)^2\right]} = \frac{\left[c\omega^2 + i\omega\left(-\omega^2 m + k\right)\right]}{\left[\left(-\omega^2 m + k\right)^2 + (c\omega)^2\right]}, \quad \text{onde}$$

$$\mathrm{Re}\left(\overline{H}_V(\omega)\right) = \frac{c\omega^2}{\left[\left(k - \omega^2 m\right)^2 + (c\omega)^2\right]} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\left(\overline{H}_V(\omega)\right) = \frac{\omega\left(k - \omega^2 m\right)}{\left[\left(k - \omega^2 m\right)^2 + (c\omega)^2\right]} \; .$$

MOBILIDADE E CÍRCULO DE NYQUIST (cont.)

Definindo, a seguir,

$$M = \mathrm{Re}\left[\overline{H}_V(\omega)\right] - \left(\frac{1}{2c}\right) \quad \text{e} \quad N = \mathrm{Im}\left[\overline{H}_V(\omega)\right]$$

e usando as expressões acima, resulta que

$$M^2 + N^2 = \left\{\mathrm{Re}\left[\overline{H}_V(\omega)\right] - \left(\frac{1}{2c}\right)\right\}^2 + \left\{\mathrm{Im}\left[\overline{H}_V(\omega)\right]\right\}^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2,$$

que é a equação de um círculo de raio $(1/2c)$, com centro no ponto

$$\left(\ \mathrm{Re}\left[\overline{H}_V(\omega)\right] = (1/2c);\ \ \mathrm{Im}\left[\overline{H}_V(\omega)\right] = 0\ \right).$$

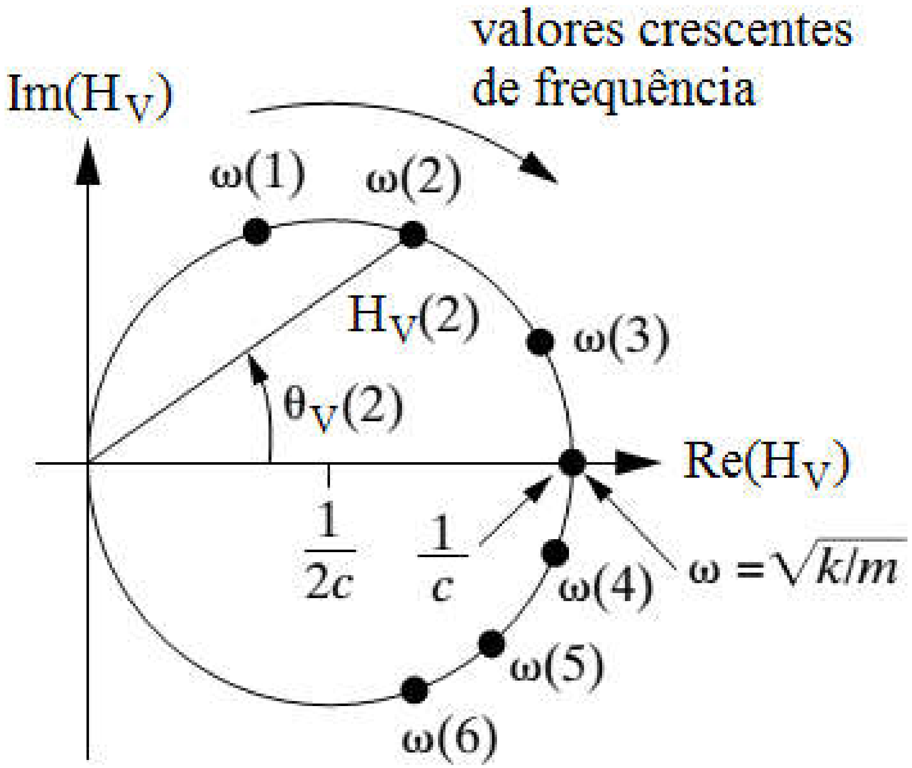
Ou seja, as <u>partes real e imaginária da mobilidade formam um círculo</u>, se dispostas <u>em</u> um <u>gráfico x-y</u>, ao longo de uma certa faixa de frequências.

CÍRCULO DE NYQUIST E FREQUÊNCIA NATURAL

Esse gráfico, visto abaixo, é conhecido como **círculo (diagrama) de Nyquist**.

A distância da origem a qualquer ponto no círculo de Nyquist fornece o <u>módulo</u>, ou magnitude, <u>da mobilidade</u>.

Já o ângulo formado entre o eixo das abscissas e a reta que liga a origem ao ponto de interesse fornece o <u>argumento</u>, ou fase, <u>da mobilidade</u>.



A **frequência natural** pode ser localizada através do ponto em que ocorre a intersecção do círculo com o eixo das abscissas $\left(\mathrm{Im}\left[\overline{\mathrm{H}}_{\mathrm{V}}(\omega)\right]=0\right)$.

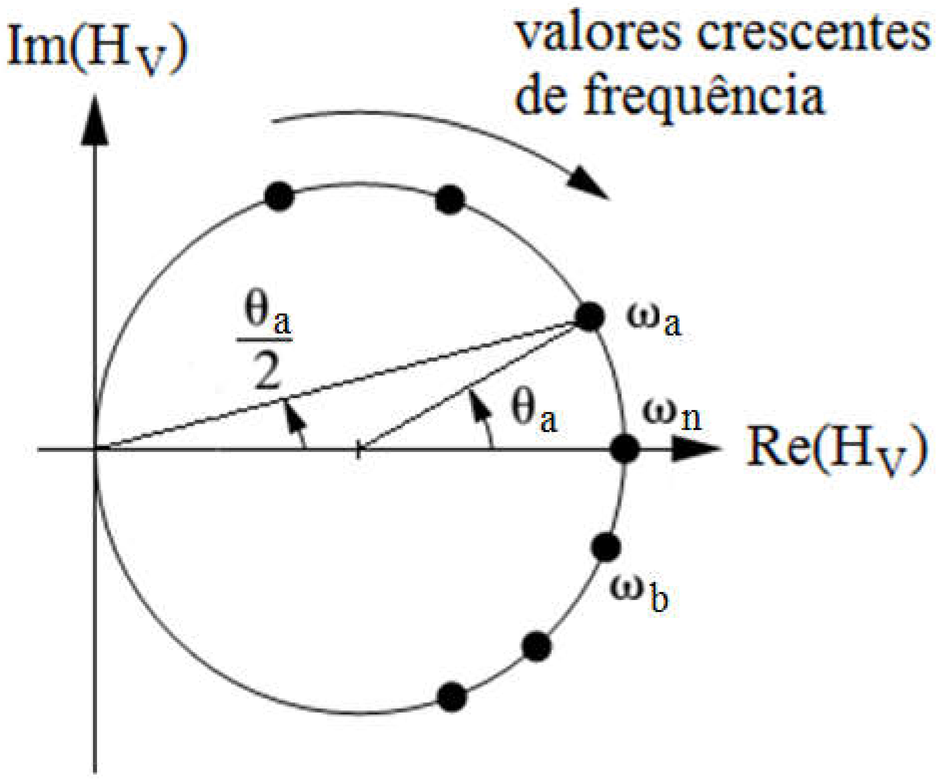
CÍRCULO DE NYQUIST E RAZÃO DE AMORTECIMENTO

Quanto à **razão de amortecimento**, ela pode ser estimada da seguinte forma.

Do círculo de Nyquist, mostrado abaixo, tem-se que

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\theta_a}{2}\right)=\frac{\mathrm{Im}\left[H_V(\omega_a)\right]}{\mathrm{Re}\left[H_V(\omega_a)\right]}=\frac{\left(k-\omega_a^2 m\right)}{c\omega_a}$$

$$=\frac{k\left(1-\omega_a^2\frac{m}{k}\right)}{2m\omega_n\zeta\omega_a}=\frac{1-\left(\frac{\omega_a}{\omega_n}\right)^2}{2\zeta\left(\frac{\omega_a}{\omega_n}\right)}=\frac{\omega_n^2-\omega_a^2}{2\zeta\omega_a\omega_n}.$$



Similarmente, $\mathrm{tg}\left(\frac{\theta_b}{2}\right)=\frac{\omega_b^2-\omega_n^2}{2\zeta\omega_b\omega_n}$.

CÍRCULO DE NYQUIST E RAZÃO DE AMORTECIMENTO (cont.)

Decorre que

$$\omega_b.\mathrm{tg}\left(\frac{\theta_b}{2}\right)+\omega_a.\mathrm{tg}\left(\frac{\theta_a}{2}\right)=\frac{\omega_b^2-\omega_n^2}{2\zeta\omega_n}+\frac{\omega_n^2-\omega_a^2}{2\zeta\omega_n}=\frac{\omega_b^2-\omega_a^2}{2\zeta\omega_n}.$$

Manipulando a expressão acima, obtém-se

$$\zeta=\frac{\omega_b^2-\omega_a^2}{2\omega_n\left[\omega_a.\mathrm{tg}\left(\theta_a/2\right)+\omega_b.\mathrm{tg}\left(\theta_b/2\right)\right]}$$

Caso se tome $\theta_a=\theta_b=90°$, resulta que

$$\boxed{\zeta=\frac{\omega_b-\omega_a}{2\omega_n}}$$

→ ajuste de círculo aos pontos experimentais permite melhor determinação.