EXEMPLO – VIBRAÇÃO PERIÓDICA EM VÁLVULA (RAO, 2009)

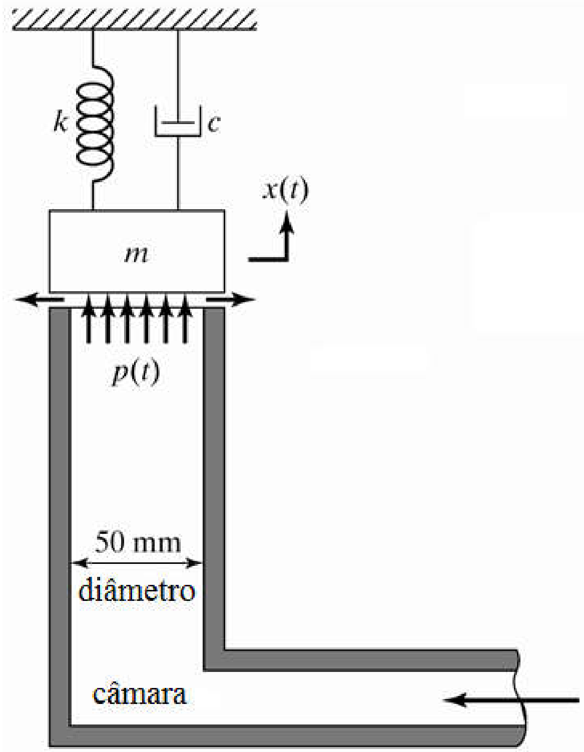
Sejam uma válvula hidráulica e sua haste elástica modeladas como um sistema massa-mola-amortecedor viscoso, como mostra a figura ao lado.

Além das forças da mola e do amortecedor, há a força de pressão do fluido, que é exercida sobre o corpo da válvula e muda com o seu grau de abertura.

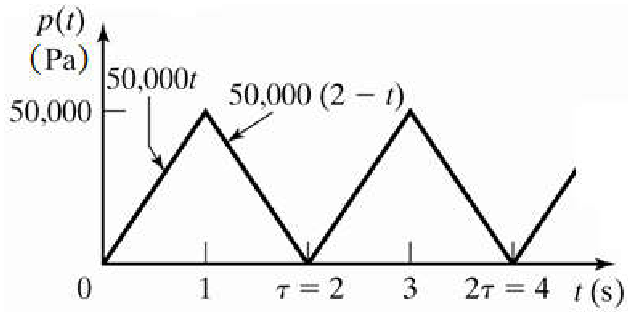
Determinar a resposta em regime permanente da válvula quando a pressão na câmara varia como indicado no gráfico abaixo.

Considerar, no sistema em foco, os seguintes parâmetros:

m = 0,25 kg, c = 10 kg/s e k = 2500 N/m.



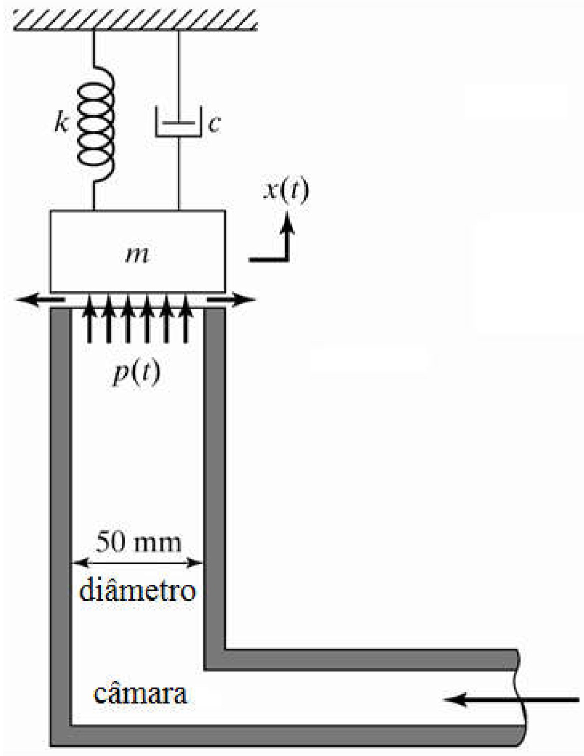
Válvula hidráulica sob excitação periódica (fonte: Rao, 2009)



Excitação periódica (fonte: Rao, 2009)

EXEMPLO – VIBRAÇÃO PERIÓDICA EM VÁLVULA (RAO, 2009) (cont.)

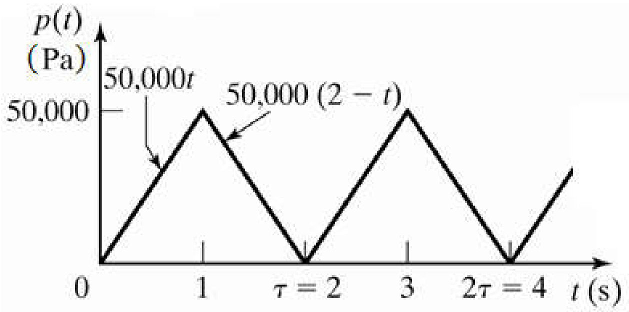
Como ilustrado ao lado, a válvula está sujeita a uma força f(t), dada por $f(t) = Ap(t)$, onde A é a área da seção transversal da câmara, cujo valor é



Válvula hidráulica sob excitação periódica (fonte: Rao, 2009)

$$A = \frac{\pi(0,05)^2}{4} = 6,25x10^{-4}\pi\ m^2\ ,$$

e p(t), vista abaixo, é a pressão que age sobre a válvula.



Excitação periódica (fonte: Rao, 2009)

Como a pressão p(t) é periódica, de período T igual a 2 s, f(t) também é periódica, com o mesmo período. A frequência fundamental de f(t) é $\omega_1 = 2\pi/T = \pi$ rad/s.

EXEMPLO – VIBRAÇÃO PERIÓDICA EM VÁLVULA (RAO, 2009) (cont.)

A força periódica f(t) pode ser representada em série de Fourier, de modo que

$$f\left(t\right) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left[A_j\cos(\omega_j t) + B_j \mathrm{sen}(\omega_j t)\right] = F_0 + \sum_{j=1}^{\infty} F_j\ \mathrm{sen}\left(\omega_j t + \phi_{fj}\right)\ \mathrm{N}$$

Recordando que $\omega_j \triangleq j\omega_1$, tem-se que os coeficientes A_0, A_j e B_j são dados por

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 50000At\,dt + \int_1^2 50000A(2-t)dt\right] = 25000A\ \mathrm{N}\ ;$$

$$A_j = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos(\omega_j t)dt = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 50000At\cos(j\pi t)dt + \int_1^2 50000A(2-t)\cos(j\pi t)dt\right]$$

$$= \frac{100000A}{j^2\pi^2}\left[\cos(j\pi) - 1\right]\ \mathrm{N}\ ;$$

EXEMPLO – VIBRAÇÃO PERIÓDICA EM VÁLVULA (RAO, 2009) (cont.)

$$B_j = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)dt = \left[\int_0^1 50000At\,\mathrm{sen}(j\pi t)dt + \int_1^2 50000A(2-t)\,\mathrm{sen}(j\pi t)dt\right] = 0.$$

Como, na série de Fourier, para $j = 1, 2, 3, ...$, sabe-se que

$$F_0 = A_0 \ , \ F_j = \sqrt{(A_j^2 + B_j^2)} \ \text{e} \ \phi_{fj} = \mathrm{arctg}\left(A_j/B_j\right) \ ,$$

decorre, para $j = 1, 3, 5, ...$ (o que ocorre com os demais termos ?), que

$$F_0 = 25000A \ \mathrm{N} \ , \ F_j = \sqrt{(A_j^2 + B_j^2)} = \left|A_j\right| = \frac{2x10^5 A}{j^2\pi^2} \ \mathrm{N} \ \text{e} \ \phi_{fj} = -\pi/2 \ \mathrm{rad} \ .$$

Considerando, então, apenas os primeiros três termos não nulos da série, obtém-se

$$\boxed{f\left(t\right) = 25000A + \frac{2x10^5 A}{\pi^2}\mathrm{sen}\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2x10^5 A}{9\pi^2}\mathrm{sen}\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \ \mathrm{N}}.$$

EXEMPLO – VIBRAÇÃO PERIÓDICA EM VÁLVULA (RAO, 2009) (cont.)

Em correspondência, a resposta permanente da válvula é dada por

$$x_p(t) = X_0 + \sum_{j=1}^{3} X_j \ \mathrm{sen}\left(\omega_j t + \phi_{xj}\right) \ \mathrm{m}$$

onde $X_j = F_j \ H\left(\varepsilon_j\right) = \dfrac{F_j}{k} \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\varepsilon_j^2\right)^2 + \left(2\zeta\varepsilon_j\right)^2}}$, $\varepsilon_j = \omega_j / \omega_n$,

$$\phi_{xj} = \phi_{Dj} + \phi_{fj} \ , \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\phi_{Dj} = \mathrm{tg}\phi_D\left(\varepsilon_j\right) = -2\zeta\varepsilon_j \Big/ \left(1-\varepsilon_j^2\right) \ .$$

Para o sistema analisado, a frequência natural e a razão de amortecimento são

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2500}{0,25}} = 100 \ \mathrm{rad/s} \ \ \text{e} \ \ \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{10}{2.0,25.100} = 0,2 \ \text{(regime?)} \ .$$

EXEMPLO – VIBRAÇÃO PERIÓDICA EM VÁLVULA (RAO, 2009) (cont.)

Dessa forma, as razões entre frequências são calculadas por

$$\varepsilon_j = \omega_j / \omega_n = j\pi/100$$

Tem-se, então, que

$$X_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{25000A}{2500} = 1,96x10^{-2}\ \text{m}$$

$$X_1 = F_1\ H(\varepsilon_1) = \frac{2x10^5 A}{\pi^2.2500} \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\pi/100)^2\right]^2 + \left[2.0,2(\pi/100)\right]^2}} = 1,59x10^{-2}\ \text{m}$$

$$X_3 = F_3\ H(\varepsilon_3) = \frac{2x10^5 A}{9\pi^2.2500} \frac{1}{\sqrt{\left[1-(3\pi/100)^2\right]^2 + \left[2.0,2(3\pi/100)\right]^2}} = 1,77x10^{-3}\ \text{m}$$

EXEMPLO – VIBRAÇÃO PERIÓDICA EM VÁLVULA (RAO, 2009) (cont.)

$$\mathrm{tg}\phi_{D1} = \mathrm{tg}\phi_D(\varepsilon_1) = -2.0,2.(\pi/100)\Big/\left[1-(\pi/100)^2\right] = -\ 0,0126 \text{ rad}$$

$$\rightarrow \quad \phi_{x1} = -\ 0,0126-(\pi/2) = -\ 1,58 \text{ rad} \ .$$

$$\mathrm{tg}\phi_{D3} = \mathrm{tg}\phi_D(\varepsilon_3) = -2.0,2.(3\pi/100)\Big/\left[1-(3\pi/100)^2\right] = -\ 0,0380 \text{ rad}$$

$$\rightarrow \quad \phi_{x3} = -\ 0,0380-(\pi/2) = -\ 1,61 \text{ rad} \ .$$

Portanto, a vibração permanente pode ser escrita como

$$\boxed{x_p(t) = 1,96\mathrm{x}10^{-2} + 1,59\mathrm{x}10^{-2}\,\mathrm{sen}(\pi t - 1,58) + 1,77\mathrm{x}10^{-3}\,\mathrm{sen}(3\pi t - 1,61) \text{ m}} \, .$$

Questiona-se, agora, se há a possibilidade de ocorrer ressonância em decorrência de algum harmônico de ordem superior na excitação?

EXEMPLO – VIBRAÇÃO PERIÓDICA EM VÁLVULA (RAO, 2009) (cont.)

Para se responder essa questão, calcula-se, inicialmente, a razão entre frequências pertinente. Ela seria $\varepsilon_j \cong 1$, o que levaria a $j \cong 100/\pi$, ou seja, $j = 32$.

Ocorre que $F_{32} = 0$ e, portanto, $X_{32} = 0$.

Para frequências próximas ($\varepsilon_{31} = 0,974$ e $\varepsilon_{32} = 1,04$), tem-se que

$$X_{31} = \frac{2x10^5 A}{31^2 \pi^2 .2500} \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(31\pi/100\right)^2\right]^2 + \left[2.0,2\left(31\pi/100\right)\right]^2}} = 4,21x10^{-5} \text{ m} ;$$

$$X_{33} = \frac{2x10^5 A}{33^2 \pi^2 .2500} \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(33\pi/100\right)^2\right]^2 + \left[2.0,2\left(33\pi/100\right)\right]^2}} = 3,69x10^{-5} \text{ m} .$$

Face ao obtido acima, <u>não se antecipa manifestação de ressonância</u>.