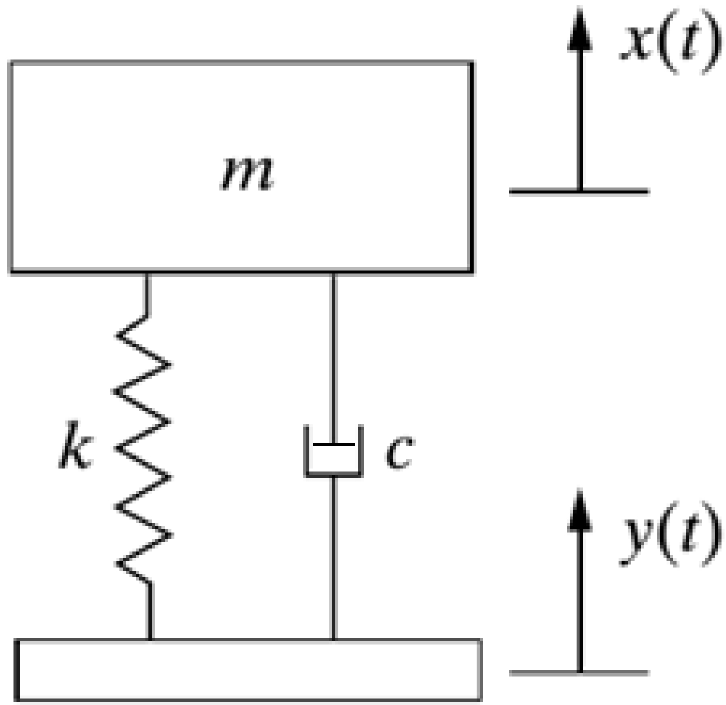
EXCITAÇÃO PELA BASE

Frequentemente, máquinas e componentes de máquinas são excitados através de seus suportes, que podem ser modelados por molas e amortecedores viscosos.

Como exemplo, tome-se o caso de um automóvel, que, dentre outras fontes, também é excitado pela superfície da pista em que ele se desloca, através de sua suspensão.



Esses casos são conhecidos como casos de **excitação pela base**. Ilustra-se ao lado o modelo correspondente para um sistema em translação, com um grau de liberdade, em que o movimento da base é contemplado.

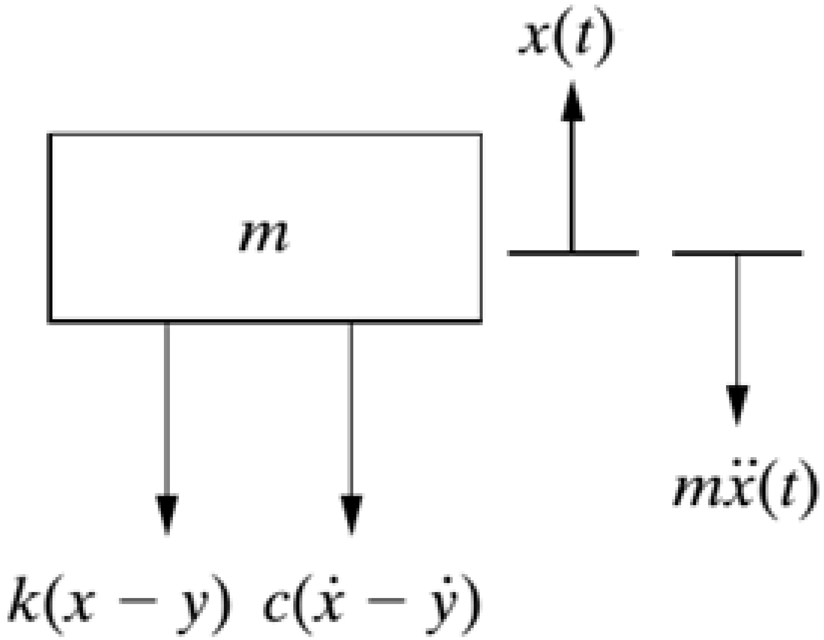
MODELAGEM MATEMÁTICA

O diagrama de corpo livre associado ao modelo em questão é mostrado abaixo. Aplicando-se a 2ª. lei de Newton, obtém-se

$$-c(\dot{x}-\dot{y})-k(x-y)=m\ddot{x} \qquad \text{ou} \qquad m\ddot{x}+c(\dot{x}-\dot{y})+k(x-y)=0$$

Resulta, então, que

$$\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky} \quad (1)$$



Seja agora um deslocamento da base tal que

$$\boxed{y(t)=Y\text{sen}(\omega t)} \quad (2)$$

onde: Y é a amplitude do deslocamento;

ω é a frequência.

De (2) em (1), decorre que $\quad m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\omega Y\cos(\omega t)+kY\text{sen}(\omega t) \quad (3)$

MODELAGEM MATEMÁTICA (cont.)

Na equação (3), qual seja, $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\omega Y\cos(\omega t) + kY\mathrm{sen}(\omega t)$,

pode-se combinar os termos à direita num único termo harmônico.

Assim, $c\omega Y\cos(\omega t) + kY\mathrm{sen}(\omega t) = W\mathrm{sen}(\omega t + \phi_w)$, onde

$$W = \sqrt{(c\omega Y)^2 + (kY)^2} = Y\sqrt{(c\omega)^2 + (k)^2} \quad \text{e} \quad \phi_w = \mathrm{arctg}\left(c\omega Y / kY\right) = \mathrm{arctg}\left(c\omega / k\right).$$

Como $(c\omega/k) = (c\omega/m\omega_n^2) = (2\zeta\varepsilon)$, decorre que

$$\boxed{W = kY\sqrt{1 + (2\zeta\varepsilon)^2}} \quad (4) \qquad \text{e} \qquad \boxed{\phi_w = \mathrm{arctg}\left(2\zeta\varepsilon\right)} \quad (5)$$

Assim, a **equação de movimento** passa a ser

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = w(t) = W\mathrm{sen}(\omega t + \phi_w)} \quad (6)$$

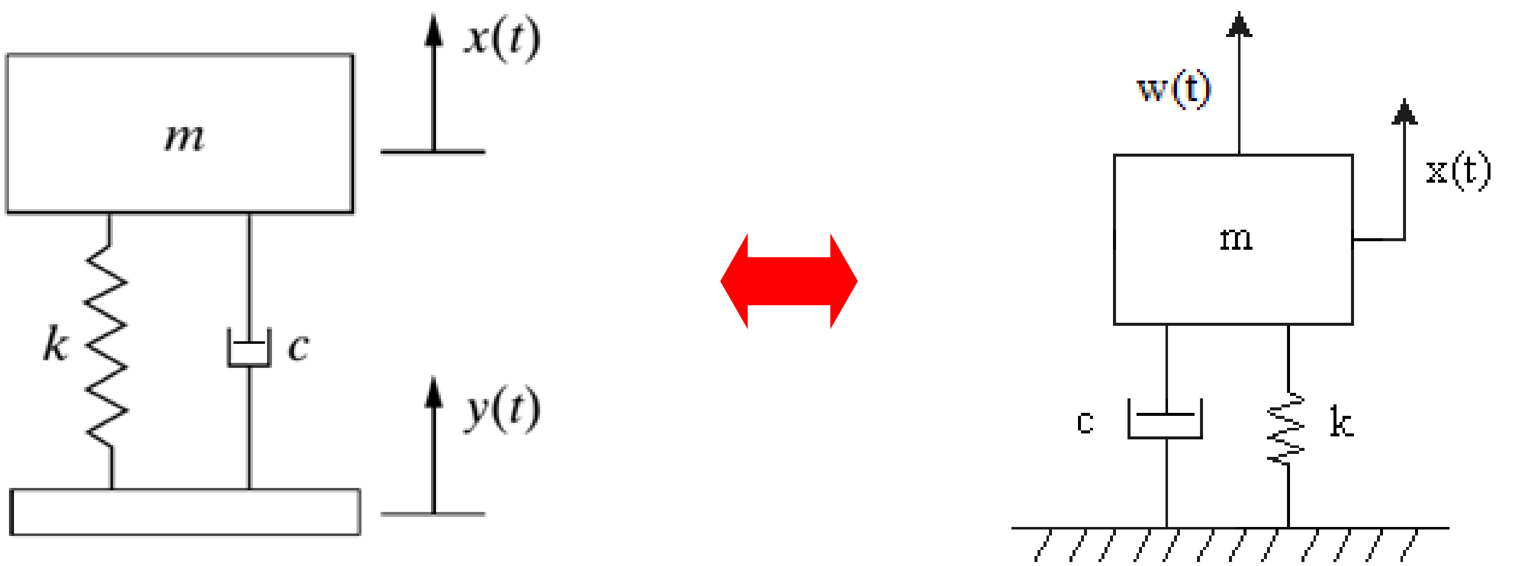
MODELAGEM MATEMÁTICA (cont.)

Na equação de movimento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = w(t) = W\mathrm{sen}(\omega t + \phi_w) \qquad (6)$$

pode-se entender a função w(t), associada ao deslocamento y(t) da base, como uma única força harmônica, que atua sobre o sistema de interesse.

Então, pode-se fazer a equivalência entre modelos ilustrada na figura abaixo.



VIBRAÇÃO (DESLOCAMENTO) PERMANENTE

Nesse caso, a vibração (deslocamento) permanente do sistema será dada por

$$\boxed{x_p(t) = X\mathrm{sen}(\omega t + \phi_x)} \quad (7)$$

onde $X = \dfrac{W}{k}\dfrac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^2 + (2\zeta\varepsilon)^2}} = \dfrac{kY\sqrt{1+(2\zeta\varepsilon)^2}}{k}\dfrac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^2 + (2\zeta\varepsilon)^2}}$. Portanto,

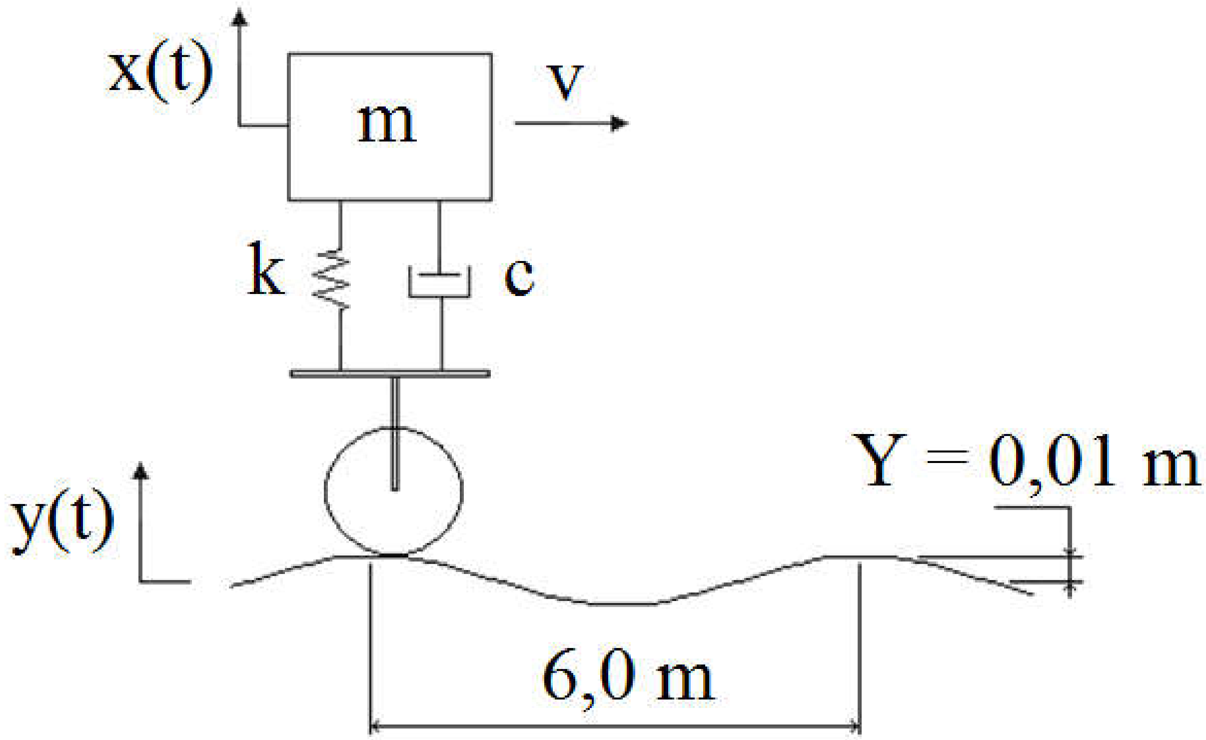
$$\boxed{X = Y\frac{\sqrt{1+(2\zeta\varepsilon)^2}}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^2 + (2\zeta\varepsilon)^2}}} \quad (8)$$

Já a diferença de fase é $\phi_D = \phi_x - \phi_w \quad \rightarrow \quad \phi_x = \phi_D + \phi_w$. Assim sendo,

$$\boxed{\phi_x = \mathrm{arctg}\left[(-2\zeta\varepsilon)/(1-\varepsilon^2)\right] + \mathrm{arctg}\left(2\zeta\varepsilon\right)} \quad (9) \quad (\rightarrow \text{vídeo ensaio sistemas sdof})$$

EXERCÍCIO – AUTOMÓVEL EM PISTA ONDULADA

Seja um automóvel, modelado como um sistema com 1 grau de liberdade, movendo-se com velocidade constante v, em km/h, ao longo de uma pista ondulada, como ilustrado ao lado.



A superfície da pista é descrita por

$$y(t) = 0{,}01\,\mathrm{sen}(\omega_b t) \;,$$

onde

$$\omega_b = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.\left[\frac{v(km/h)}{6m}\right]\left(\frac{1000m}{1km}\right)\left(\frac{1h}{3600s}\right) = 0{,}2909v \;\; (rad/s).$$

EXERCÍCIO – AUTOMÓVEL EM PISTA ONDULADA (cont.)

Ou seja, a velocidade do automóvel irá determinar a frequência da excitação harmônica associada à pista ondulada (que é, nesse caso, a base).

Sabe-se que a constante de rigidez equivalente do sistema de suspensão é igual a 4×10^4 N/m e a constante de amortecimento equivalente é igual a 2×10^3 kg/s.

Levantar o efeito da velocidade na amplitude de vibração permanente do automóvel, bem como o efeito do valor de sua massa.

Considerar os seguintes valores:

→ v = 20, 40, 60, 80 e 110 km/h;

→ m = 1007 e 1585 kg.

Para qual das massas a suspensão está mais adequada?

(→ vídeo carros em pista de teste)