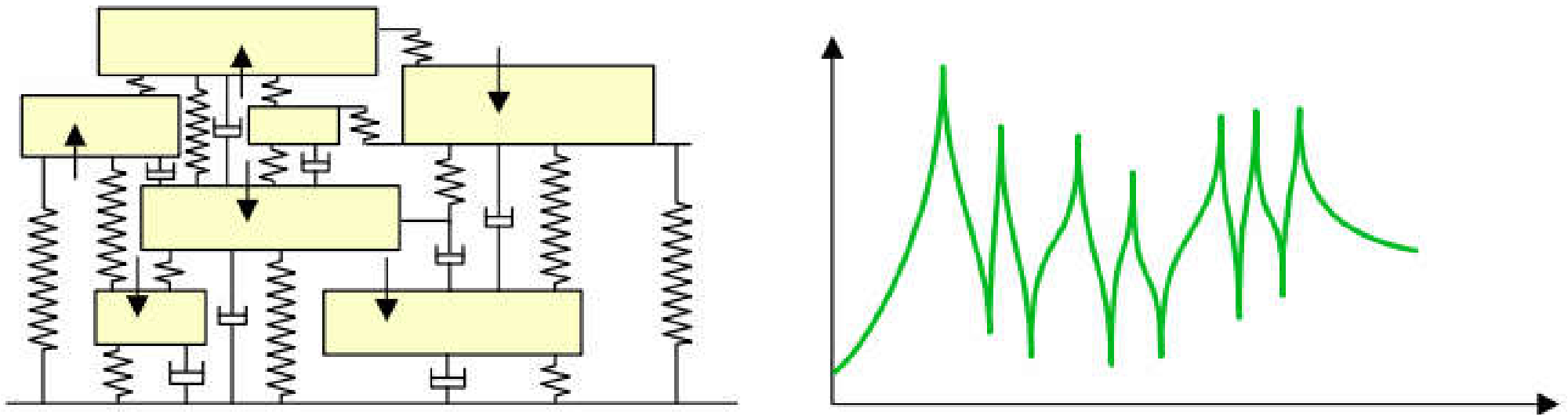


# SISTEMAS MECÂNICOS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

## INTRODUÇÃO

- Modelagem matemática abrangente de sistemas mecânicos complexos
- várias coordenadas independentes são requeridas na descrição do movimento
- equações resultantes são acopladas, retratando o que ocorre no movimento



*Sistema com múltiplos graus de liberdade: (a) Modelo (b) FRF (Copyright © Brüel & Kjær).*

## SISTEMAS COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

– Ideal para exposição inicial de conceitos

– Modelo aproximado para

→ prédio de duas lajes

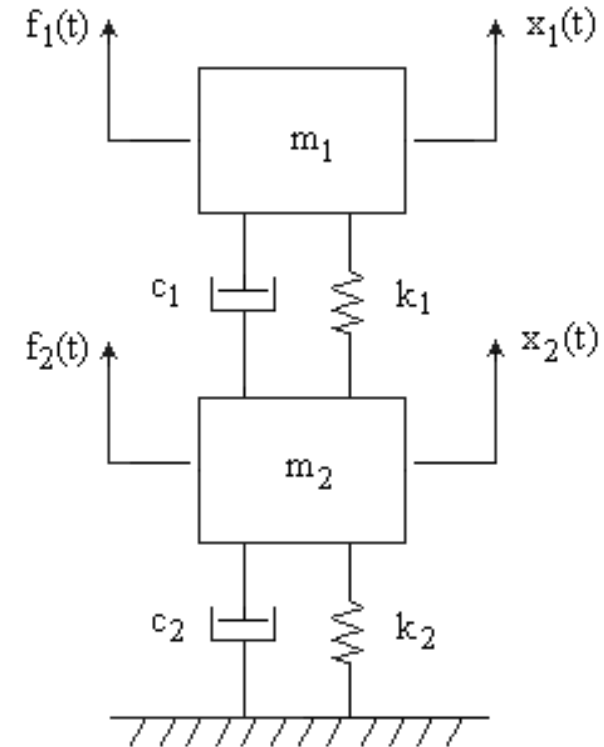
→ braço de ser humano

→ suspensão de veículo

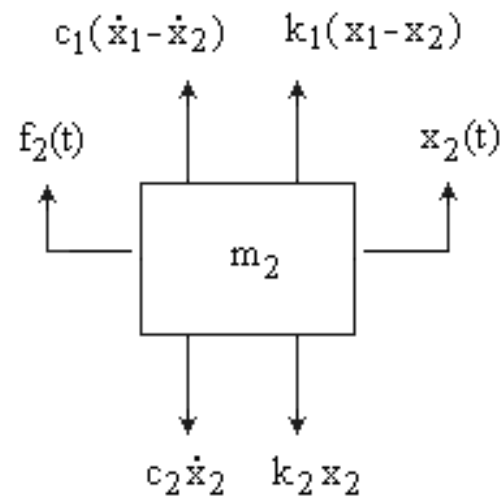
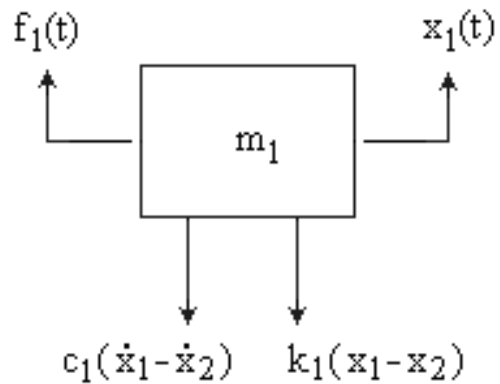
→ sistema primário + neutralizador

– Equações de movimento obtidas via DCLs e 2<sup>a</sup>. lei de Newton

– Representação consolidada via matrizes e vetores



## SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE (cont.)



**DCLs**

– Pela aplicação da **2ª. lei de Newton** em cada massa na **direção vertical**, resulta que

$$f_1 - c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_1 - x_2) = m_1\ddot{x}_1$$

$$f_2 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) - c_2\dot{x}_2 - k_2x_2 = m_2\ddot{x}_2$$

– Rearranjando as **equações** acima, tem-se que

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 - c_1\dot{x}_2 + k_1x_1 - k_1x_2 = f_1 \quad (9.1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_1\dot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_2 - k_1x_1 + (k_1 + k_2)x_2 = f_2$$

– Em associação, as **condições iniciais** são

$$x_1(0) = x_{10} \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10} \quad x_2(0) = x_{20} \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20} \quad (9.3)$$

## SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE (cont.)

– Equações de movimento e condições iniciais

Equações de movimento – Eq. (9.1)	Condições iniciais – Eq. (9.3)
$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 - c_1 \dot{x}_2 + k_1 x_1 - k_1 x_2 = f_1$	$x_1(0) = x_{10} \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}$
$m_2 \ddot{x}_2 - c_1 \dot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_2 - k_1 x_1 + (k_1 + k_2) x_2 = f_2$	$x_2(0) = x_{20} \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$

→ As **equações** acima são **acopladas**: movimento de  $m_1$  afeta  $m_2$  e vice-versa!

→ Essas equações não podem ser resolvidas de forma independente.

– Em **forma matricial**, as **equações de movimento** podem ser expressas por

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}}$$

→ parâmetros do sistema em matrizes; excitações e respostas em vetores;

→ aplicável a sistemas com qq. número finito de graus de liberdade (gdl).

## SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE (cont.)

$\boxed{M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}}$  Equações de movimento em representação matricial

– **Matrizes simétricas de massa (ou inércia), amortecimento e rigidez**

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

– **Vetores de deslocamento, velocidade, aceleração e força**

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

– **Vetores de condições iniciais**

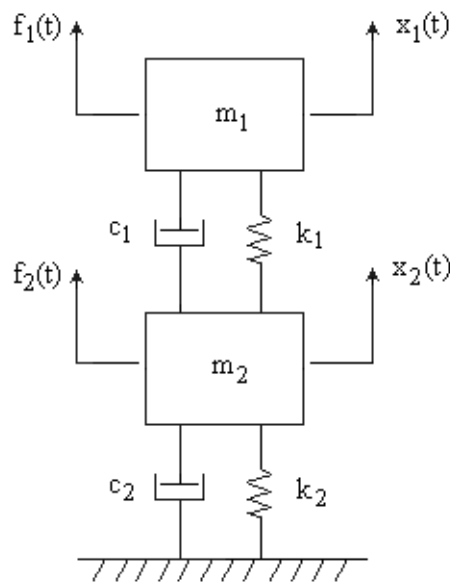
$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \quad (\text{deslocamento}), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix} \quad (\text{velocidade})$$

→ Resolução por **Análise Modal**: abordagem baseada em Álgebra Linear.

# ANÁLISE MODAL COM AMORTECIMENTO MODAL – ILUSTRAÇÃO

equações de movimento

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}$$



condições iniciais

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$$

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}P\mathbf{r}(t) = T\mathbf{r}(t)$$



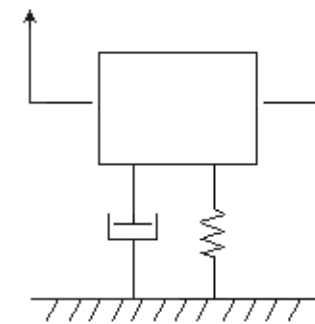
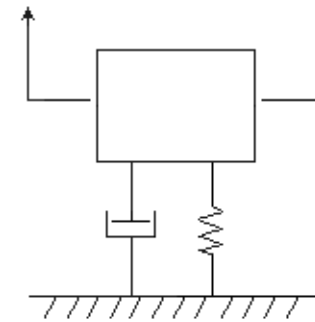
## ANÁLISE MODAL



$$\mathbf{r}(t) = T^{-1}\mathbf{x}(t) = P^{-1}L\mathbf{x}(t)$$

equações modais

$$\ddot{r}_i + 2\zeta_i\omega_{ni}\dot{r}_i + \omega_{ni}^2r_i = T_i^T\mathbf{f}$$



condições iniciais

$$\mathbf{r}(0) = T^{-1}\mathbf{x}(0) \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = T^{-1}\dot{\mathbf{x}}(0)$$

→ resposta de sistema com 2 gdl vem das respostas de 2 sistemas com 1 gdl.

## SISTEMA COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

– Seja um **sistema linear com múltiplos (m) graus de liberdade**, em que

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}} \quad (9.26) \quad \text{equações de movimento}$$

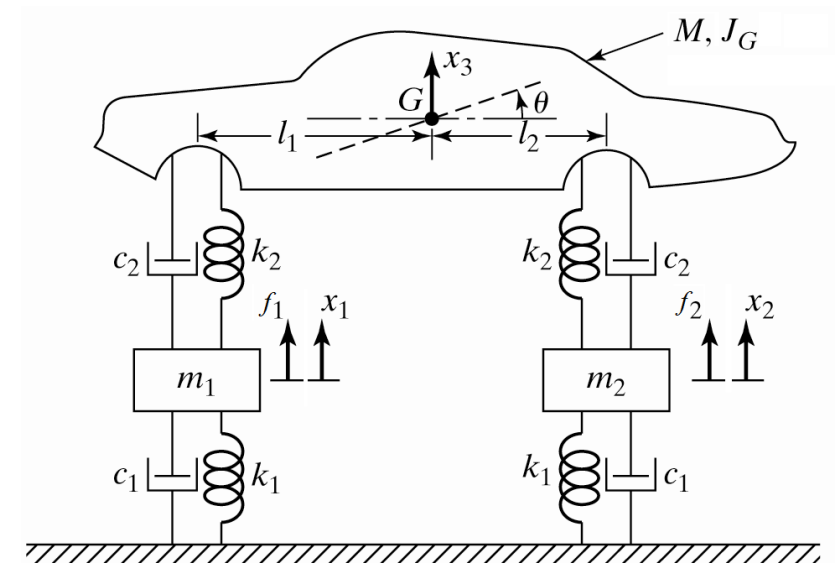
$$\boxed{\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0} \quad (9.27) \quad \text{condições iniciais}$$

→ as matrizes quadradas  $M$ ,  $C$  e  $K$  são de ordem  $m \times m$ ;

→ os vetores  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{f}$  são de ordem  $m \times 1$ ;

→ por análise modal (teórica), ...

... a resposta de um sistema com múltiplos gdl virá das respostas de múltiplos sistemas associados, cada qual com um gdl .



# ANÁLISE MODAL DE VIBRAÇÕES

<i>eqs. de movimento</i>	<i>operação</i>	<i>denominação</i>
$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}$ (9.26)		eqs. em coords. físicas
	$M = L^T L$ (9.28) $L$ : triangular superior e não singular	decomposição de Choleski (matrizes simétricas e positivas definidas)
	$\tilde{K} = (L^T)^{-1} K L^{-1}$ (9.32)	matriz de rigidez normalizada pela massa
	$\tilde{K}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ (9.36) $\lambda$ : $m$ autovalores reais; $\mathbf{v}$ : $m$ autovetores reais e ortogonais; $\mathbf{w}$ : $m$ autovetores normalizados	problema de autovalores simétrico, de ordem $m$ (autovetores ortogonais)



## ANÁLISE MODAL DE VIBRAÇÕES (cont.)

<i>eqs. de movimento</i>	<i>operação</i>	<i>denominação</i>
$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}$ (9.26)		
	$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}$	<b>matriz espectral</b> (autovalores)
	$P = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{w}_m]$ (9.38) $P$ : ortogonal $\rightarrow P^T = P^{-1}$ (9.40)	matriz de autovetores normalizados
	$\tilde{K}P = \Lambda P \rightarrow P^T \tilde{K}P = \Lambda$	diagonalização
	$T = L^{-1}P$ (9.51)	<b>matriz modal</b>
	$\mathbf{x}(t) = T\mathbf{r}(t) = L^{-1}P\mathbf{r}(t)$ (9.48) $\mathbf{x}(t)$ : coordenadas físicas; $\mathbf{r}(t)$ : <b>coordenadas modais</b>	transformação de coordenadas

## ANÁLISE MODAL DE VIBRAÇÕES (cont.)

<i>eqs. de movimento</i>	<i>operação</i>	<i>denominação</i>
$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}$		
	$\mathbf{x}(t) = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{r}(t)$ (9.48)	transformação de coordenadas
$M\mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{r}} + C\mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}\dot{\mathbf{r}} + K\mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{r} = \mathbf{f}$		
	$\mathbf{P}^T(\mathbf{L}^T)^{-1}$	pré-multiplicação
$\begin{aligned} &\mathbf{P}^T(\mathbf{L}^T)^{-1}M\mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{r}} + \\ &+ \mathbf{P}^T(\mathbf{L}^T)^{-1}C\mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}\dot{\mathbf{r}} \\ &+ \mathbf{P}^T(\mathbf{L}^T)^{-1}K\mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{r} \\ &= \mathbf{P}^T(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{f} \end{aligned}$		

## ANÁLISE MODAL DE VIBRAÇÕES (cont.)

<i>eqs. de movimento</i>	<i>operação</i>	<i>denominação</i>
$\mathbf{P}^T (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{M} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{r}} +$ $+ \mathbf{P}^T (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{r}}$ $+ \mathbf{P}^T (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{r}$ $= \mathbf{P}^T (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{f}$	$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}$ $\tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{L}^{-1}$ $\mathbf{P}^T (\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{P}^T (\mathbf{L}^{-1})^T$ $= [(\mathbf{L}^{-1}) \mathbf{P}]^T$ $= \mathbf{T}^T$	
$\mathbf{P}^T (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{r}} +$ $+ \mathbf{P}^T (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{r}}$ $+ \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} \mathbf{r}$ $= \mathbf{T}^T \mathbf{f}$		

## ANÁLISE MODAL DE VIBRAÇÕES (cont.)

<i>eqs. de movimento</i>	<i>operação</i>	<i>denominação</i>
$\begin{aligned} & \mathbf{P}^T (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{r}} + \\ & + \mathbf{P}^T (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{r}} \\ & + \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} \mathbf{r} \\ & = \mathbf{T}^T \mathbf{f} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{I} \\ & \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I} \\ & \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} = \Lambda \end{aligned}$	
$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{P}^T (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{r}} + \Lambda \mathbf{r} = \mathbf{T}^T \mathbf{f} \quad (9.53)$		
	$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (9.56)$	<b>amortecimento proporcional</b>
$\ddot{\mathbf{r}} + (\alpha \mathbf{I} + \beta \Lambda) \dot{\mathbf{r}} + \Lambda \mathbf{r} = \mathbf{T}^T \mathbf{f} \quad (9.58)$		eqs. em coords. modais (desacopladas)

## ANÁLISE MODAL DE VIBRAÇÕES (cont.)

eqs. de movimento	operação	denominação
$\ddot{\mathbf{r}} + (\alpha \mathbf{I} + \beta \Lambda) \dot{\mathbf{r}} + \Lambda \mathbf{r} = \mathbf{T}^T \mathbf{f} \quad (9.58)$		eqs. em coords. modais (desacopladas)
$\ddot{\mathbf{r}}_i + (\alpha + \beta \lambda_i) \dot{\mathbf{r}}_i + \lambda_i \mathbf{r}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{f} \quad (9.59)$ <p><math>i = 1, \dots, m</math> (<math>\mathbf{T}_i^T = i</math>-ésima linha de <math>\mathbf{T}^T</math>)</p>		$i$ -ésima equação (independente)
	$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \mathbf{r}(t) \quad (9.48)$ $\mathbf{r}(t) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(t) \quad (9.49)$	
	$\mathbf{r}(0) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(0)$ $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{x}}(0)$	condições iniciais em coords. modais
	$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \mathbf{r}(t) \quad (9.48)$	<b>solução em coords. físicas</b>

## ANÁLISE MODAL – VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS

– Caso C (amortecimento) e  $\mathbf{f}$  (força) sejam nulos, cada equação modal é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + \lambda_i \mathbf{r}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9.55)$$

– Assim sendo, cada resposta modal correspondente é

$$\mathbf{r}_i(t) = C_i \sin \left[ \left( \sqrt{\lambda_i} \right) t + \phi_i \right] \quad (9.47) \rightarrow C_i \text{ e } \phi_i \text{ obtidos via } \underline{\text{condições iniciais}}$$

– Já as vibrações livres, em coordenadas físicas, são obtidas de

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \mathbf{r}(t) \quad (9.48)$$

→  $\sqrt{\lambda_i} = \omega_{ni}$ : **frequências naturais** do sistema (autovalores  $\lambda_i = \omega_{ni}^2$ );

→ matriz  $\mathbf{T}$  (matriz modal): **modos de vibrar** do sistema (por coluna);

cada modo multiplica uma única coordenada  $r_i(t)$ .

## INTERPRETAÇÃO DE EQUAÇÕES MODAIS NÃO AMORTECIDAS

– As **equações modais não amortecidas**, sem **forças externas**, são dadas por

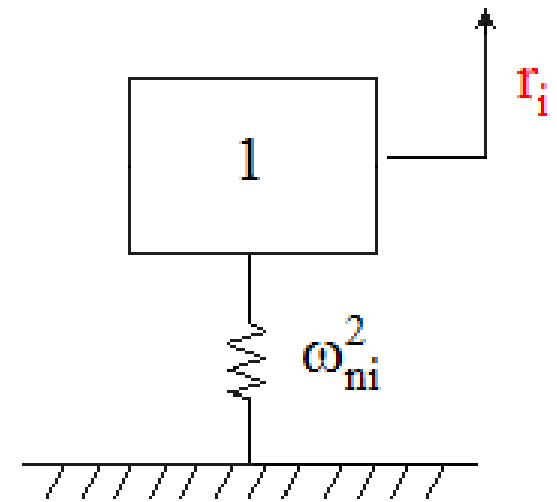
$$\ddot{\mathbf{r}}_i + \omega_{ni}^2 \mathbf{r}_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9.62)$$

onde  $\omega_{ni}^2 = \lambda_i$  .

– Cada uma dessas equações corresponde à equação de um sistema com 1 gdl em vibração livre, com

$$m_i = 1$$

$$k_i = \omega_{ni}^2$$



→ como se trata de vibração livre, o movimento decorrente está associado apenas às condições iniciais, ou seja, ao deslocamento e à velocidade iniciais.

## VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS VIA ANÁLISE MODAL

As **frequências naturais**, os **modos de vibrar** e as **vibrações livres** de um sistema linear não amortecido, com múltiplos graus de liberdade, podem ser obtidos pelo procedimento dito **ANÁLISE MODAL** como exposto abaixo.

Dadas as equações de movimento em forma matricial,  $M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , e as condições iniciais  $\mathbf{x}(0)$  e  $\dot{\mathbf{x}}(0)$ , são executados os seguintes passos:

1. Determinar  $L$ , tal que  $L^T L = M$ , e  $L^{-1}$ . Se  $M$  for diagonal, então  $L = \sqrt{M}$ .
2. Calcular a matriz  $\tilde{K}$  (matriz de rigidez normalizada pela massa), sendo  $\tilde{K} = (L^T)^{-1} K L^{-1}$ .
3. Solucionar o problema de autovalores  $\tilde{K}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i = \omega_{ni}^2 \mathbf{v}_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ , obtendo, daí, as **frequências naturais**.



## VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS VIA ANÁLISE MODAL (cont.)

4. Criar um conjunto de autovetores normalizados  $\mathbf{w}_i$ , via autovetores  $\mathbf{v}_i$ .

Formar, então, a matriz  $\mathbf{P} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_m]$ .

5. Calcular a matriz modal  $\mathbf{T} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}$ , que contém os **modos de vibrar**, e a sua inversa  $\mathbf{T}^{-1}$ .

6. Calcular a matriz espectral  $\Lambda = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P}$ , tal que  $\Lambda = \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{n2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{nm}^2 \end{bmatrix}$ .

7. Determinar as condições iniciais em coordenadas modais por

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0) \text{ e } \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(0), \text{ pois } \mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{r}(t).$$

## ANÁLISE MODAL DE VIBRAÇÕES NÃO AMORTECIDAS (cont.)

8. Solucionar as equações modais desacopladas  $\ddot{\mathbf{r}} + \Lambda \mathbf{r} = \mathbf{0}$ , com as condições iniciais acima.

9. Obter as **vibrações livres** (solução) em termos das variáveis originais, a partir de  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{r}(t)$ .

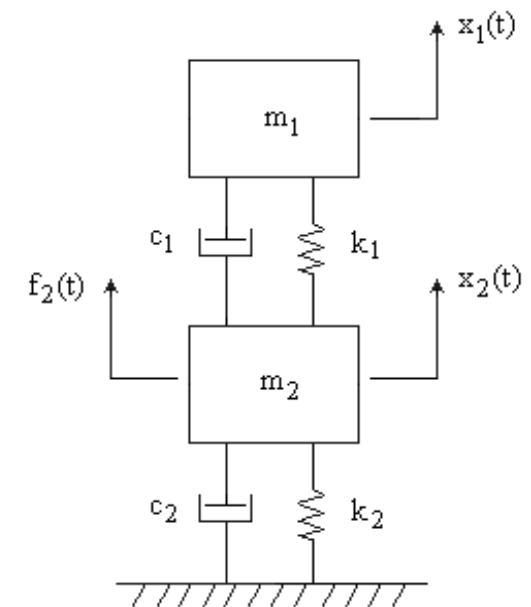
→ em coordenadas físicas, as vibrações livres não amortecidas do sistema são combinações lineares de m configurações físicas próprias e distintas, contidas nas colunas da matriz T e ditas **modos de vibrar**. Essas configurações oscilam em frequências próprias e distintas, ditas **frequências naturais**;

→ frequências naturais e modos de vibrar não dependem do amortecimento;

→ há tantas frequências naturais e modos de vibrar quanto graus de liberdade.

## EXEMPLO: SISTEMA DE SUSPENSÃO DE AUTOMÓVEL

**Exemplo 9.3** – Um automóvel e seu sistema de suspensão, ilustrados na figura (a), são descritos pelo modelo físico com 2 gdl da figura (b). Nesse modelo, têm-se que  $m_1 = 2000$  kg,  $m_2 = 50$  kg,  $k_1 = 10^3$  N/m e  $k_2 = 10^4$  N/m, onde  $m_1$  é a massa do automóvel,  $m_2$  é a massa das rodas,  $k_1$  é a rigidez da suspensão do automóvel e  $k_2$  é a rigidez dos pneus. Inicialmente, assume-se que  $c_1 = c_2 = 0$ .



*Automóvel: (a) Sistema de suspensão detalhado; (b) Modelo físico (fontes: [www.howstuffworks.com/car-suspension.htm](http://www.howstuffworks.com/car-suspension.htm); Inman, 2008).*

## EXEMPLO: SISTEMA DE SUSPENSÃO DE AUTOMÓVEL (cont.)

Determinar, via análise modal, as **frequências naturais** e os **modos de vibrar** do sistema, bem como as **vibrações** (deslocamentos) **livres não amortecidas** para:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} \text{ (m)}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Solução:** Pelo procedimento de análise modal, exposto anteriormente, tem-se que:

1. Como a matriz de massa  $M$  é diagonal, dada por

$$M = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix},$$

as matrizes  $L$  e  $L^{-1}$  são, respectivamente,

$$L = \sqrt{M} = \begin{bmatrix} 44,7214 & 0 \\ 0 & 7,0711 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0224 & 0 \\ 0 & 0,1414 \end{bmatrix}.$$

## EXEMPLO: SISTEMA DE SUSPENSÃO DE AUTOMÓVEL (cont.)

2. Já a matriz de rigidez normalizada pela massa  $\tilde{K}$  é tal que

$$\tilde{K} = (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5000 & -3,1623 \\ -3,1623 & 220,0000 \end{bmatrix}.$$

3. Assim, ao resolver o problema de autovalores via MATLAB, chega-se a

$$\omega_{n1}^2 = 0,4545 \quad \text{e} \quad \omega_{n2}^2 = 220,0455.$$

As **frequências naturais** são, portanto,  $\omega_{n1} = 0,674$  rad/s e  $\omega_{n2} = 14,8$  rad/s.

4. Na resolução do problema de autovalores acima, via MATLAB, os autovetores já saem normalizados, de modo que a matriz  $\mathbf{P}$  é, então, dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -0,9999 & -0,0144 \\ -0,0144 & 0,9999 \end{bmatrix}.$$

## EXEMPLO: SISTEMA DE SUSPENSÃO DE AUTOMÓVEL (cont.)

5. Então, a matriz modal  $T$ , com os **modos de vibrar**, e sua inversa  $T^{-1}$  são

$$T = L^{-1}P = \begin{bmatrix} -0,0224 & -0,0003 \\ -0,0020 & 0,1414 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T^{-1} = P^T L = \begin{bmatrix} -44,7167 & -0,1018 \\ -0,6441 & 7,0703 \end{bmatrix}.$$

6. Para a determinação das **vibrações livres não amortecidas**, em coordenadas físicas, tem-se como referência a matriz espectral  $\Lambda$ , que é dada por

$$\Lambda = P^T \tilde{K}P = \begin{bmatrix} 0,4545 & 0 \\ 0 & 220,0455 \end{bmatrix}.$$

7. Há ainda que se conhecer as condições iniciais em coordenadas modais, que são obtidas através de

$$\mathbf{r}(0) = T^{-1}\mathbf{x}(0) \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = T^{-1}\dot{\mathbf{x}}(0).$$

## EXEMPLO: SISTEMA DE SUSPENSÃO DE AUTOMÓVEL (cont.)

No presente caso, essas condições iniciais são

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -44,7167 & -0,1018 \\ -0,6441 & 7,0703 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0010 \\ 0,0707 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} -44,7167 & -0,1018 \\ -0,6441 & 7,0703 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. Com essas informações, pode-se montar e resolver as equações modais, a saber

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + \omega_{ni}^2 \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m .$$

Para o exemplo em questão, as equações modais são dadas por

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + 0,4545 \mathbf{r}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 + 220,0455 \mathbf{r}_2 = 0$$

a serem resolvidas com as condições iniciais calculadas acima.

## EXEMPLO: SISTEMA DE SUSPENSÃO DE AUTOMÓVEL (cont.)

A solução de cada uma das equações anteriores (vide capítulo 4) é da forma

$$r_i(t) = C_i \text{sen}(\omega_{ni} t + \phi_i),$$

onde  $C_i = \sqrt{[r_i(0)]^2 + \left[ \frac{\delta_i r_i(0) + \dot{r}_i(0)}{v_i} \right]^2} = |r_i(0)|$  e  $\phi_i = \pm \frac{\pi}{2}$ .

9. Resolvidas as equações modais (com suas respectivas condições iniciais), obtêm-se as vibrações do sistema por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \mathbf{r}(t).$$

Ou seja, as **vibrações livres** do sistema de interesse são

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0224 & -0,0003 \\ -0,0020 & 0,1414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix}.$$



## ANÁLISE MODAL – VIBRAÇÕES FORÇADAS AMORTECIDAS

- A **equação matricial de movimento** de um **sistema linear com múltiplos (m) graus de liberdade** e as **condições iniciais** associadas são

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (9.26) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (9.27)$$

- Por análise modal, assumindo, por conveniência, que

$$C = \alpha M + \beta K \quad (9.56) \quad (\text{amortecimento proporcional}),$$

obtem um conjunto de equações da forma

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + \left( \alpha + \beta \omega_{ni}^2 \right) \dot{\mathbf{r}}_i + \omega_{ni}^2 \mathbf{r}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{f} \quad (9.59) \quad i = 1, \dots, m \quad (\omega_{ni}^2 = \lambda_i)$$

- Resolvidas, uma a uma, as equações acima, a **resposta** do sistema **em coordenadas físicas**  $\mathbf{x}$  pode ser determinada **via coordenadas modais**  $\mathbf{r}$  por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{r}(t) \quad (9.48)$$

## ANÁLISE MODAL – VIBRAÇÕES FORÇADAS AMORTECIDAS (cont.)

– As equações em coordenadas modais, quais sejam,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + \left( \alpha + \beta \omega_{ni}^2 \right) \dot{\mathbf{r}}_i + \omega_{ni}^2 \mathbf{r}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{f} \quad (9.59) \quad i = 1, \dots, m$$

podem ser reescritas pela definição de **razão de amortecimento modal**  $\zeta_i$ , tal que

$$\boxed{\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_{ni}} + \frac{\beta\omega_{ni}}{2}} \quad (9.61) \quad \rightarrow \quad \left( \alpha + \beta\omega_{ni}^2 \right) = 2\zeta_i \omega_{ni} \quad (\text{amortecimento modal})$$

– Assim, as **equações modais amortecidas**, com **forças externas**, são

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}}_i + 2\zeta_i \omega_{ni} \dot{\mathbf{r}}_i + \omega_{ni}^2 \mathbf{r}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{f}} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9.62)$$

→ introdução direta de termos de dissipação de energia  $\underline{2\zeta_i \omega_{ni} \dot{\mathbf{r}}_i}$ , sendo as razões de amortecimento modal  $\underline{0 < \zeta_i \leq 1}$  atribuídas por experiência ou experimentos .

## INTERPRETAÇÃO DE EQUAÇÕES MODAIS AMORTECIDAS

– As **equações modais amortecidas**, com **forças externas**, são dadas por

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + 2\zeta_i \omega_{ni} \dot{\mathbf{r}}_i + \omega_{ni}^2 \mathbf{r}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{f} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9.62)$$

onde  $\mathbf{T}_i^T$  = i-ésima linha de  $\mathbf{T}^T$  (matriz modal transposta) .

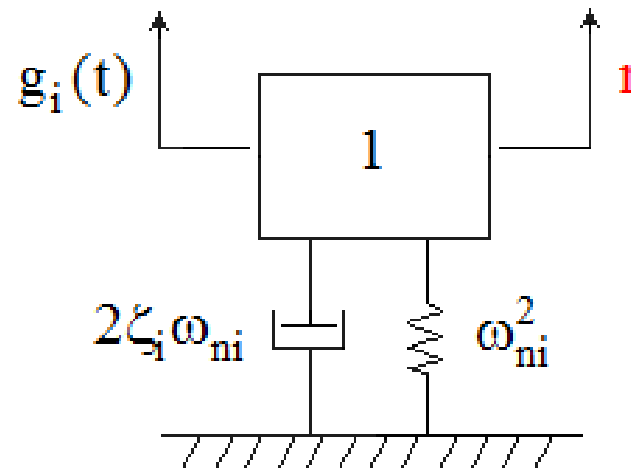
– Cada uma dessas equações corresponde à equação de um sistema de 1 gdl, com

$$m_i = 1$$

$$c_i = 2\zeta_i \omega_{ni}$$

$$k_i = \omega_{ni}^2$$

$$g_i(t) = \mathbf{T}_i^T \mathbf{f}$$

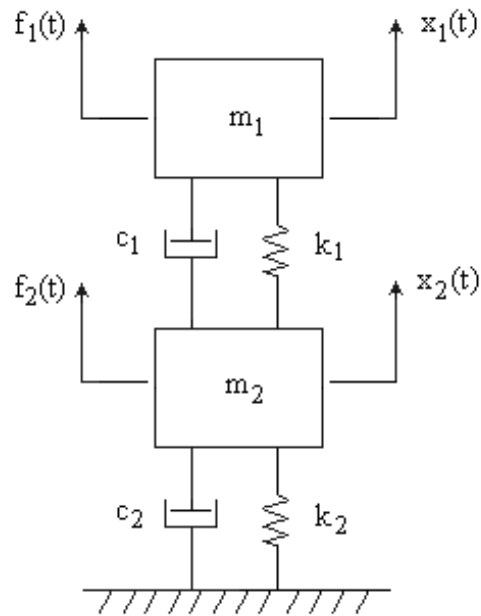


→ as forças externas aplicadas são combinadas por termos da matriz modal  $\mathbf{T}$ .

# ANÁLISE MODAL COM AMORTECIMENTO MODAL – ILUSTRAÇÃO

equações de movimento

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}$$



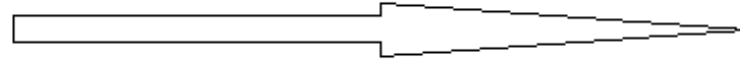
condições iniciais

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$$

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}P\mathbf{r}(t) = T\mathbf{r}(t)$$



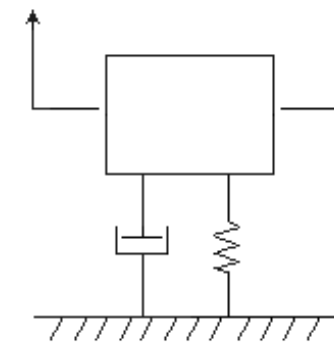
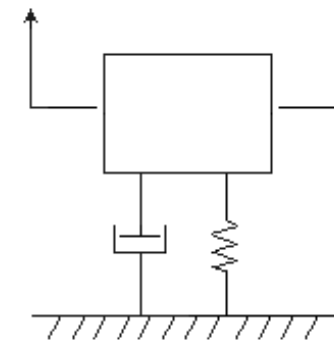
## ANÁLISE MODAL



$$\mathbf{r}(t) = T^{-1}\mathbf{x}(t) = P^{-1}L\mathbf{x}(t)$$

equações modais

$$\ddot{r}_i + 2\zeta_i\omega_{ni}\dot{r}_i + \omega_{ni}^2 r_i = T_i^T \mathbf{f}$$



condições iniciais

$$\mathbf{r}(0) = T^{-1}\mathbf{x}(0) \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = T^{-1}\dot{\mathbf{x}}(0)$$

## COMPORTAMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

– Pela transformada de Fourier, tem-se, em coordenadas físicas, que

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}} \quad (9.26) \quad \rightarrow \quad \boxed{M\bar{\mathbf{X}}_A + C\bar{\mathbf{X}}_V + K\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{F}}} \quad (9.63)$$

onde  $\bar{\mathbf{X}}_A$ ,  $\bar{\mathbf{X}}_V$ ,  $\bar{\mathbf{X}}$  e  $\bar{\mathbf{F}}$  são, respectivamente, os vetores **aceleração, velocidade, deslocamento e força**, todos no **domínio da frequência**.

– Face às propriedades da transformada de Fourier, decorre que

$$M(-\omega^2\bar{\mathbf{X}}) + C(i\omega\bar{\mathbf{X}}) + K\bar{\mathbf{X}} = (-\omega^2M + i\omega C + K)\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (9.64)$$

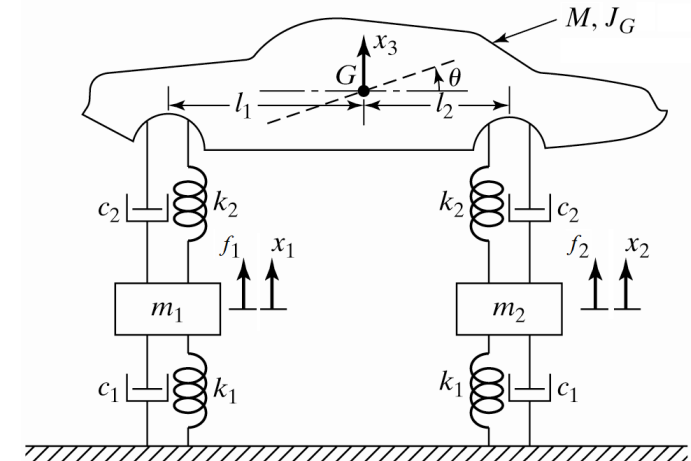
$$\therefore \boxed{\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{F}}} \quad (9.66) \quad \text{em que} \quad \boxed{\bar{\mathbf{H}} = (-\omega^2M + i\omega C + K)^{-1}} \quad (9.67)$$

→ vetor de deslocamentos  $\bar{\mathbf{X}}$  = matriz de receptâncias  $\bar{\mathbf{H}}$  x vetor de forças  $\bar{\mathbf{F}}$ .

## COMPORTAMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA (cont.)

– A relação  $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{F}}$ , expandida, com uma única força externa aplicada, é tal que

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_s \\ \vdots \\ \bar{X}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \cdots & \bar{H}_{1r} & \bar{H}_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bar{H}_{s1} & \cdots & \bar{H}_{sr} & \bar{H}_{sm} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bar{H}_{m1} & \cdots & \bar{H}_{mr} & \bar{H}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{F}_r \\ 0 \end{bmatrix}$$



– **Elemento** da matriz de receptâncias  $\bar{\mathbf{H}}$  na **s-ésima linha e r-ésima coluna**  $\bar{H}_{sr}$ :

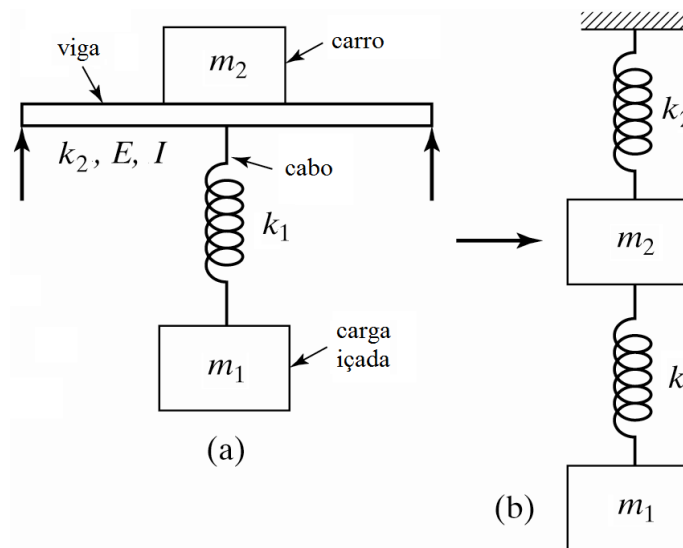
→ **relação** entre **deslocamento** (vibração) na **coordenada** (ponto) **s**,  $\bar{X}_s$ , e ...

... **força** (excitação) na **coordenada** (ponto) **r**,  $\bar{F}_r$ , com demais forças nulas.

→  $\bar{H}_{sr} = \bar{X}_s / \bar{F}_r$  é uma receptância (portanto, uma FRF!) específica do sistema.

## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA

Uma ponte rolante, ilustrada na figura (a), pode ser descrita pelo modelo com dois graus de liberdade da figura (b). Sabe-se que a viga tem vão de 40m, momento de inércia de área de  $0,02\text{m}^4$  e material com módulo de elasticidade longitudinal de  $2,06 \times 10^{11}\text{N/m}^2$ . Sabe-se ainda que a massa do carrinho é igual a 1000kg e a massa da carga içada igual a 5000kg, ao passo que a rigidez do cabo é  $3,0 \times 10^5\text{N/m}$ .



*Ponte rolante: (a) Representação esquemática; (b) Modelo físico (fonte: Rao, 2009).*

## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

Supõe-se, de forma complementar, que as razões de amortecimento modal sejam  $\zeta_1 = 0,02$  e  $\zeta_2 = 0,001$ . Determinar inicialmente, via análise modal, as **frequências naturais** e os **modos de vibrar** do sistema. Na sequência, obter as **vibrações** (deslocamentos) **amortecidas** nos seguintes casos:

$$\text{i) } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (m), } \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(vibração livre)}$$

$$\text{ii) } \mathbf{x}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \text{sen}(3t) \text{ (N)}; \quad \text{(excitação harmônica)}$$

$$\text{iii) } \mathbf{x}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \delta(t) \text{ (N)}; \quad \text{(excitação impulsiva)}$$

Por fim, representar graficamente as receptâncias do sistema.



## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

**Solução:** Face às informações prestadas, tem-se que

$$m_1 = 5000 \text{ kg} \quad , \quad m_2 = 1000 \text{ kg} \quad \text{e} \quad k_1 = 3 \times 10^5 \text{ N/m} .$$

Já a rigidez  $k_2$  é dada por

$$k_2 = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48.2,06 \times 10^{11}.0,02}{40^3} = 3,09 \times 10^6 \text{ N/m} .$$

A partir desses dados, pode-se montar as matrizes de massa e rigidez correspondentes ao modelo em questão, quais sejam

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

O amortecimento será modelado a partir das razões de amortecimento supostas.

## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

Pelo procedimento de análise modal, exposto anteriormente, decorre o seguinte:

1. Como a matriz de massa  $M$  é diagonal, dada por

$$M = \begin{bmatrix} 5000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix},$$

as matrizes  $L$  e  $L^{-1}$  são, respectivamente,

$$L = \sqrt{M} = \begin{bmatrix} 70,71 & 0 \\ 0 & 31,62 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0141 & 0 \\ 0 & 0,0316 \end{bmatrix}.$$

2. Já a matriz de rigidez normalizada pela massa  $\tilde{K}$  é tal que

$$\tilde{K} = (L^T)^{-1}KL^{-1} = L^{-1}KL^{-1} = \begin{bmatrix} 60 & -134,2 \\ -134,2 & 3390 \end{bmatrix}.$$

## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

3. Dessa forma, ao resolver o problema de autovalores via MATLAB, chega-se a

$$\omega_{n1}^2 = 54,60 \quad \text{e} \quad \omega_{n2}^2 = 3395.$$

As **frequências naturais** são, assim,  $\omega_{n1} = 7,389$  rad/s e  $\omega_{n2} = 58,27$  rad/s.

4. Na resolução do problema de autovalores acima, via MATLAB, os autovetores já saem normalizados, de forma que a matriz P é, então, dada por

$$P = \begin{bmatrix} -0,9992 & -0,0402 \\ -0,0402 & 0,9992 \end{bmatrix}.$$

5. Então, a matriz modal T, com os **modos de vibrar**, e sua inversa  $T^{-1}$  são

$$T = L^{-1}P = \begin{bmatrix} -0,0141 & -0,0006 \\ -0,0013 & 0,0316 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T^{-1} = P^T L = \begin{bmatrix} -70,65 & -1,271 \\ -2,842 & 31,60 \end{bmatrix}.$$

## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

6. Para a determinação das **vibrações amortecidas**, em coordenadas físicas, tem-se como referência a matriz espectral  $\Lambda$ , que é dada por

$$\Lambda = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 54,60 & 0 \\ 0 & 3395 \end{bmatrix}.$$

7. Há ainda que se conhecer as condições iniciais em coordenadas modais, que são obtidas através de

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(0) \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{x}}(0).$$

8. Reunidas todas essas informações, pode-se montar e resolver as equações modais, dadas por

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + 2\zeta_i \omega_{ni} \dot{\mathbf{r}}_i + \omega_{ni}^2 \mathbf{r}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{f} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

9. Após resolver, uma a uma, as equações modais acima, com as suas respectivas condições iniciais e excitações, obtêm-se as vibrações do sistema por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{r}(t).$$

Serão considerados a seguir, especificamente, os **casos propostos**.

**Caso I)** Nesse caso, tem-se um problema de **vibrações livres amortecidas**, em que as condições iniciais em coordenadas modais são

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -70,65 & -1,271 \\ -2,842 & 31,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} -70,65 & -1,271 \\ -2,842 & 31,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7065 \\ -0,0284 \end{bmatrix}.$$

## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

Já o vetor de forças modais é um vetor coluna  $\mathbf{0}$ , uma vez que

$$\mathbf{T}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0,0141 & -0,0013 \\ -0,0006 & 0,0316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim sendo, as equações modais são dadas por

$$\ddot{r}_1 + 2 \times 0,02 \times 7,389 \dot{r}_1 + 54,60 r_1 = \ddot{r}_1 + 0,2956 \dot{r}_1 + 54,60 r_1 = 0$$

$$\ddot{r}_2 + 2 \times 0,001 \times 58,27 \dot{r}_2 + 3395 r_2 = \ddot{r}_2 + 0,1165 \dot{r}_2 + 3395 r_2 = 0$$

**Caso II)** Esse é um problema de **vibrações forçadas amortecidas**, com **excitação harmônica**, em que o deslocamento inicial, em coordenadas modais, é

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -70,65 & -1,271 \\ -2,842 & 31,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

Já a velocidade inicial, também em coordenadas modais, é

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} -70,65 & -1,271 \\ -2,842 & 31,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ao passo que o vetor de forças modais harmônicas é dado por

$$\mathbf{T}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0,0141 & -0,0013 \\ -0,0006 & 0,0316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \text{sen}(3t) = \begin{bmatrix} -0,0127 \\ 0,3160 \end{bmatrix} \text{sen}(3t).$$

Nesse caso, as equações modais são tais que

$$\ddot{r}_1 + 0,2956\dot{r}_1 + 54,60r_1 = -0,0127\text{sen}(3t)$$

$$\ddot{r}_2 + 0,1165\dot{r}_2 + 3395r_2 = 0,3160\text{sen}(3t)$$

## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

**Caso III)** Esse também é um problema de **vibrações forçadas amortecidas**, só que com **excitação impulsiva**. As condições iniciais em coordenadas modais são, como no caso anterior, dadas por

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -70,65 & -1,271 \\ -2,842 & 31,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} -70,65 & -1,271 \\ -2,842 & 31,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Já o vetor de forças modais impulsivas é dado por

$$\mathbf{T}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0,0141 & -0,0013 \\ -0,0006 & 0,0316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \delta(t) = \begin{bmatrix} -0,0127 \\ 0,3160 \end{bmatrix} \delta(t).$$

Recorda-se que  $\delta(t)$  é a função delta de Dirac.



## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

As equações modais correspondentes são tais que

$$\ddot{r}_1 + 0,2956\dot{r}_1 + 54,60r_1 = -0,0127\delta(t)$$

$$\ddot{r}_2 + 0,1165\dot{r}_2 + 3395r_2 = 0,3160\delta(t)$$

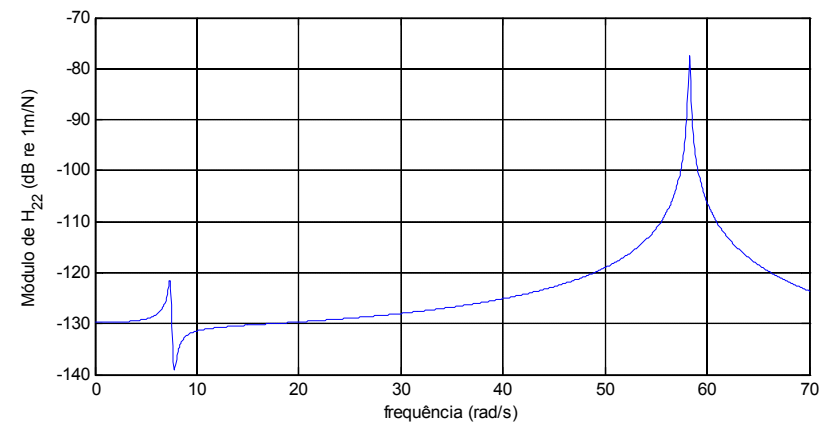
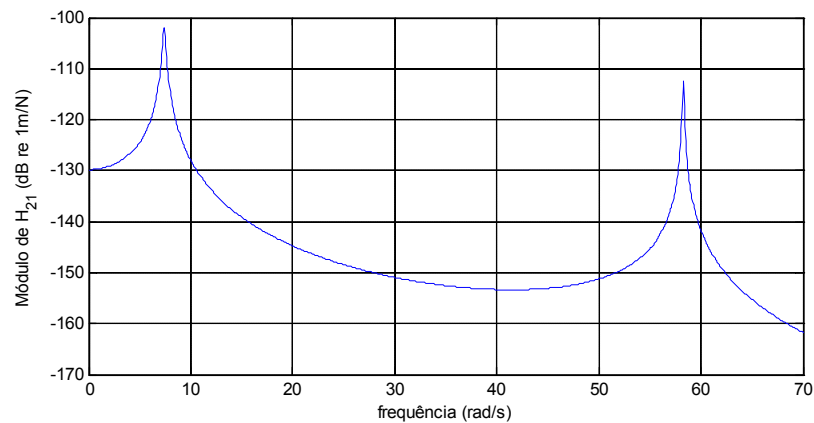
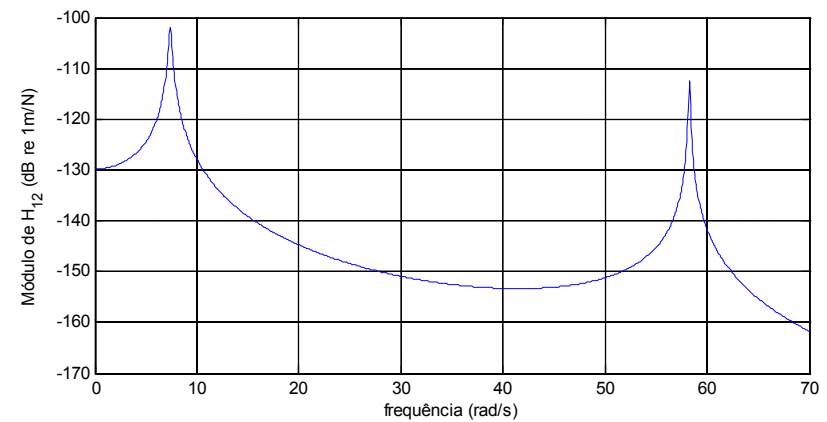
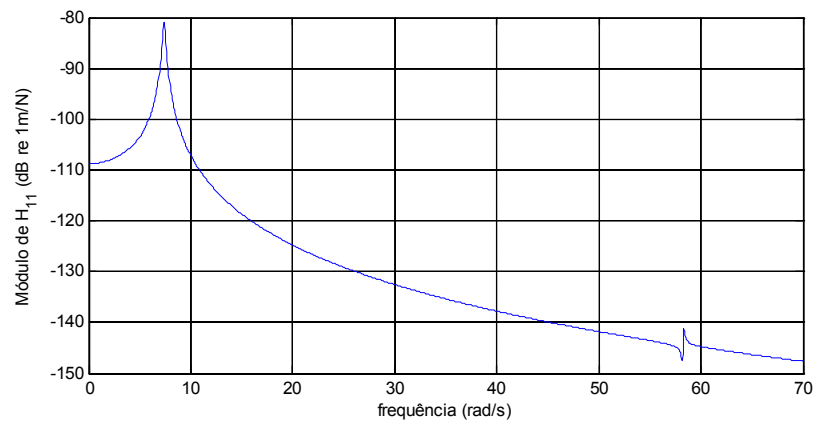
Como já exposto, após resolver, uma a uma, as equações modais correspondentes a cada um dos casos acima, com as suas respectivas condições iniciais e excitações, obtêm-se as vibrações do sistema, coordenadas físicas, por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{r}(t).$$

As vibrações determinadas pela abordagem anteriormente exposta podem ser visualizadas graficamente em MATLAB, como se verá de forma associada.

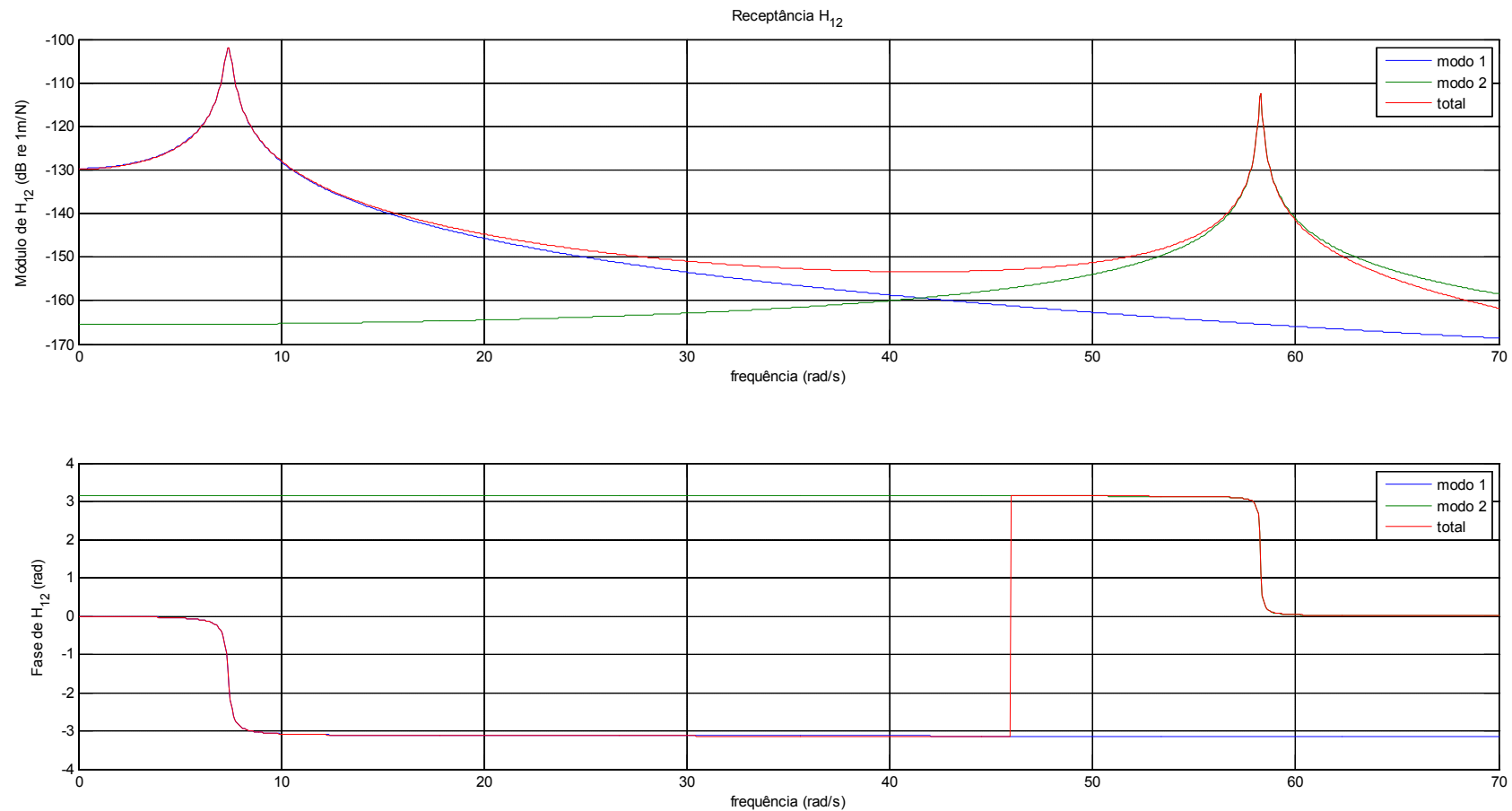
## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

Por fim, a partir das expressões para o **comportamento no domínio da frequência**, pode-se visualizar as receptâncias do sistema, como mostrado abaixo.



## EXEMPLO: PONTE ROLANTE COM CARGA (cont.)

Caso alguma receptância específica seja de interesse, ela também poderá ser representada graficamente, o que é feito abaixo para  $\bar{H}_{12}(\omega)$ .



## FUNÇÕES RESPOSTA EM FREQUÊNCIA E PARÂMETROS MODAIS

– Sabe-se que, no domínio da frequência,

vetor de **deslocamentos**  $\bar{X}$  = matriz de **receptâncias**  $\bar{H}$  x vetor de **forças**  $\bar{F}$ ,

de modo que

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_s \\ \vdots \\ \bar{X}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \cdots & \bar{H}_{1r} & \bar{H}_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bar{H}_{s1} & \cdots & \bar{H}_{sr} & \bar{H}_{sm} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bar{H}_{m1} & \cdots & \bar{H}_{mr} & \bar{H}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{F}_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

– A matriz de receptâncias  $\bar{H}$  é dada, a princípio, por

$$\bar{H} = \left( -\omega^2 M + i\omega C + K \right)^{-1}$$

## FUNÇÕES RESPOSTA EM FREQUÊNCIA E PARÂMETROS MODAIS (cont.)

– Em desenvolvimentos anteriores, de

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}; \quad \tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{L}^{-1}; \quad \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}; \quad \mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$

chegou-se a  $\lambda_j = \omega_{nj}^2$  (**frequências naturais**  $\omega_{nj}$ )

$\mathbf{T} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{P}$  (matriz modal com **modos de vibrar**  $\mathbf{u}_j$ , em colunas)

$(\alpha + \beta \omega_{nj}^2) = 2\zeta_j \omega_{nj}$  (**razões de amortecimento** modal  $\zeta_j$ )

– A partir desses desenvolvimentos, mostra-se que a **matriz de receptâncias**  $\bar{\mathbf{H}}$

$$\bar{\mathbf{H}} = \left( -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right)^{-1} \rightarrow \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{T} \cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{\left( \omega_{nj}^2 - \omega^2 \right) + i \left( 2\zeta_j \omega_{nj} \omega \right)} \right] \cdot \mathbf{T}^T \quad (9.78)$$

## FUNÇÕES RESPOSTA EM FREQUÊNCIA E PARÂMETROS MODAIS (cont.)

– A matriz de receptâncias acima, qual seja,

$$\bar{H} = T \cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{\left( \omega_{nj}^2 - \omega^2 \right) + i \left( 2\zeta_j \omega_{nj} \omega \right)} \right] \cdot T^T \quad (9.78)$$

corresponde a um somatório de m matrizes, de forma tal que

$$\bar{H} = \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T}{\left( \omega_{nj}^2 - \omega^2 \right) + i \left( 2\zeta_j \omega_{nj} \omega \right)} \right] \quad (9.79)$$

$\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T$ : produto externo do j-ésimo modo de vibrar (vetor) pelo seu transposto.

– Outras matrizes de FRFs também são de interesse, quais sejam,

**matriz de mobilidades:**  $\bar{H}_V = i\omega \bar{H}$  ;    **matriz de inertâncias:**  $\bar{H}_A = -\omega^2 \bar{H}$  .

## FUNÇÕES RESPOSTA EM FREQUÊNCIA E PARÂMETROS MODAIS (cont.)

– Do somatório anterior, mostra-se que a receptância  $\bar{H}_{sr}(\omega)$  é dada por

$$\bar{H}_{sr}(\omega) = \frac{\bar{X}_s(\omega)}{\bar{F}_r(\omega)} = \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{[\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T]_{sr}}{(\omega_{nj}^2 - \omega^2) + i(2\zeta_j \omega_{nj} \omega)} \right\} \quad (9.80)$$

– Cada termo do somatório na expressão de  $\bar{H}_{sr}(\omega)$  representa a contribuição específica de um certo modo de vibração do sistema para a relação entre a vibração  $\bar{X}_s(\omega)$  e a excitação  $\bar{F}_r(\omega)$ .

– Como  $[\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T]_{sr} = u_{sj} u_{rj} = (A_{sr})_j$  (**constante modal**), tem-se ainda que

$$\bar{H}_{sr}(\omega) = \left[ \sum_{j=1}^m \frac{(A_{sr})_j}{(\omega_{nj}^2 - \omega^2) + i(2\zeta_j \omega_{nj} \omega)} \right] \quad (9.90)$$

## ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

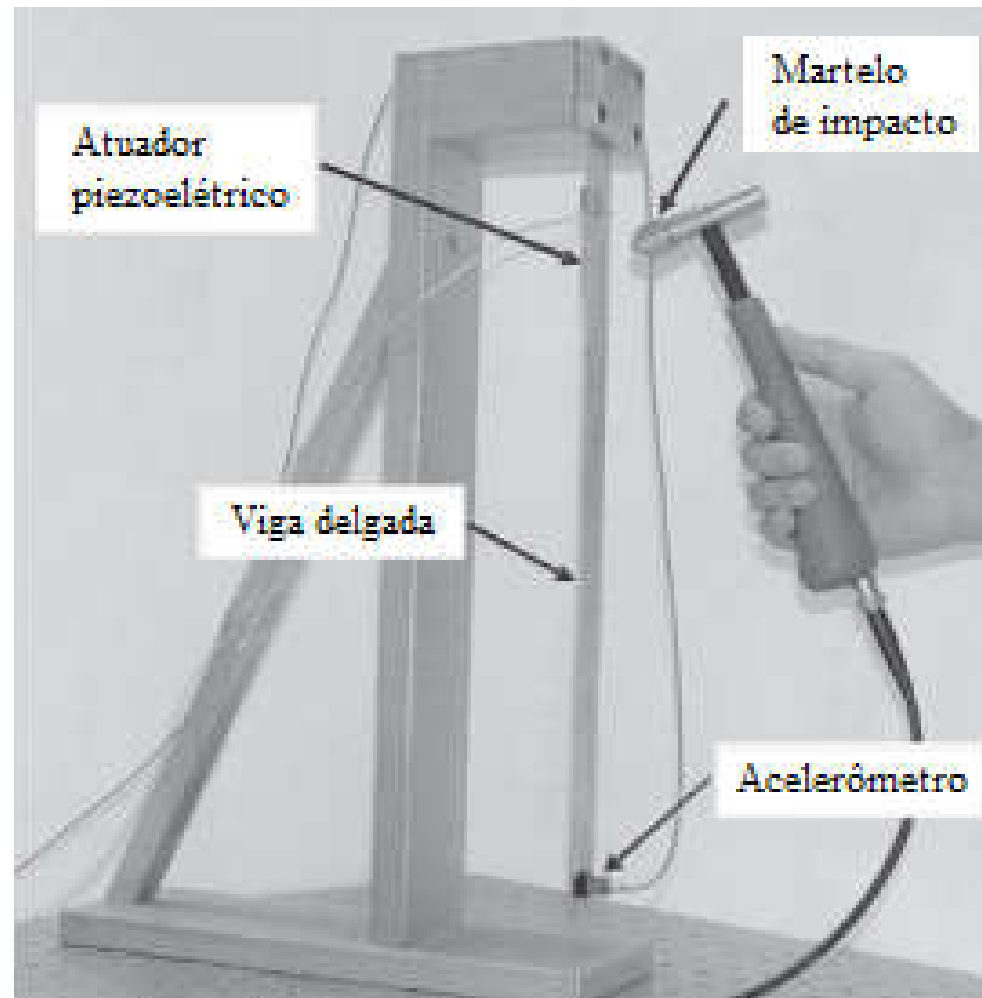
- Se os modos de vibrar de um sistema com múltiplos gdl estiverem associados a frequências naturais bem espaçadas, qualquer receptância, no entorno de uma frequência natural, será dominada por um único termo, qual seja, o termo correspondente àquela frequência natural. Ou seja,

$$\bar{H}_{sr}(\omega_{nj}) \approx \frac{[\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T]_{sr}}{(\omega_{nj}^2 - \omega_{nj}^2) + i(2\zeta_j \omega_{nj} \omega_{nj})} = \frac{u_{sj} u_{rj}}{i(2\zeta_j \omega_{nj}^2)}$$

- Assim, pode-se **estimar frequências naturais e razões de amortecimento**:
  - picos (máximos) do módulo da receptância: frequências naturais;
  - bandas de  $-3\text{dB}$  no entorno dos picos: razões de amortecimento.
- Pode-se também estimar **modos de vibrar** (como exposto adiante).



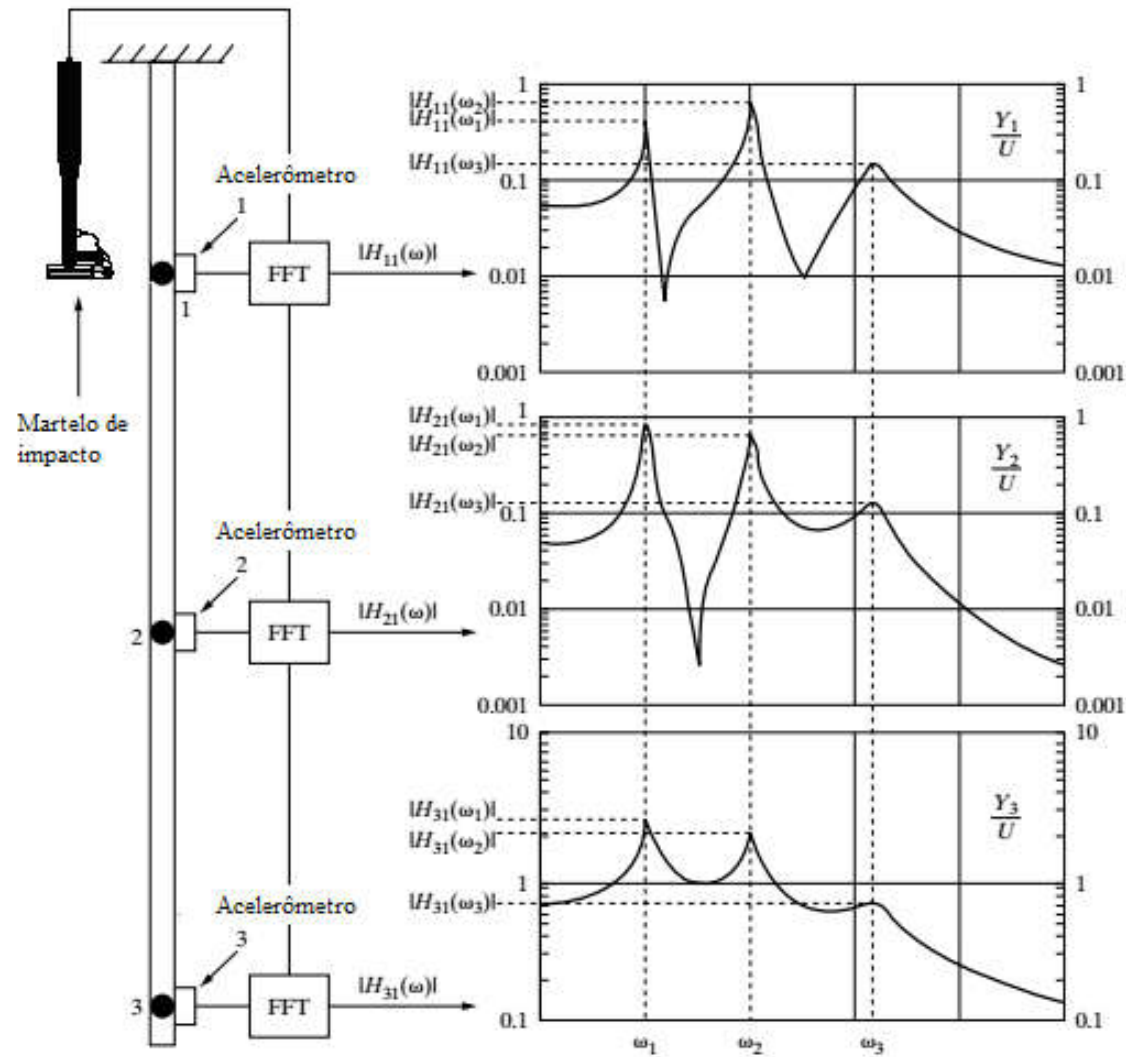
## EXEMPLO DE MONTAGEM EXPERIMENTAL



*Viga engastada-livre – Montagem com martelo e acelerômetro*

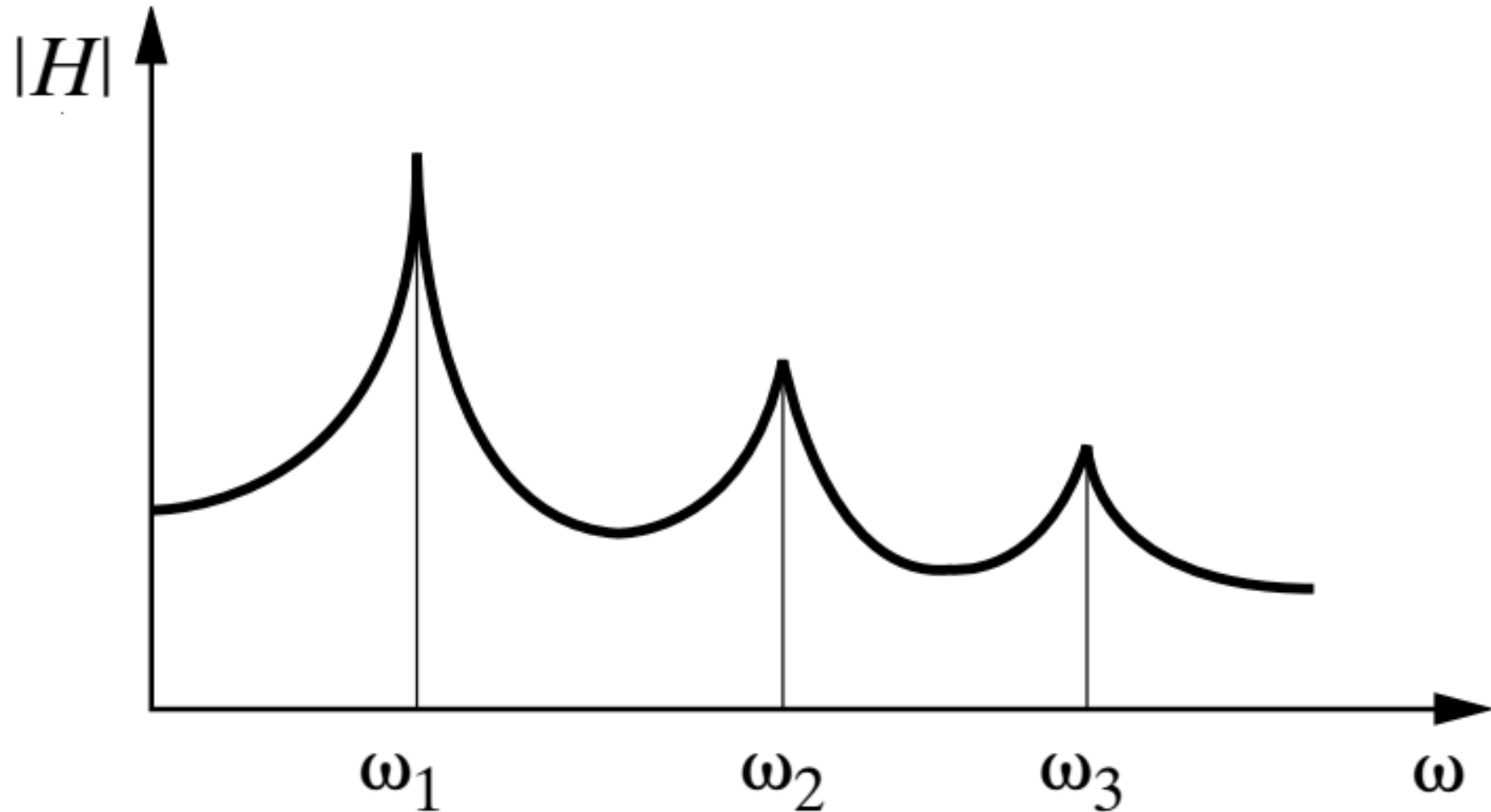
*(fonte: Shin & Hammond, 2008).*

# RESULTADOS EXPERIMENTAIS ILUSTRATIVOS



*Conjunto de receptâncias experimentais (fonte: Inman, 2008).*

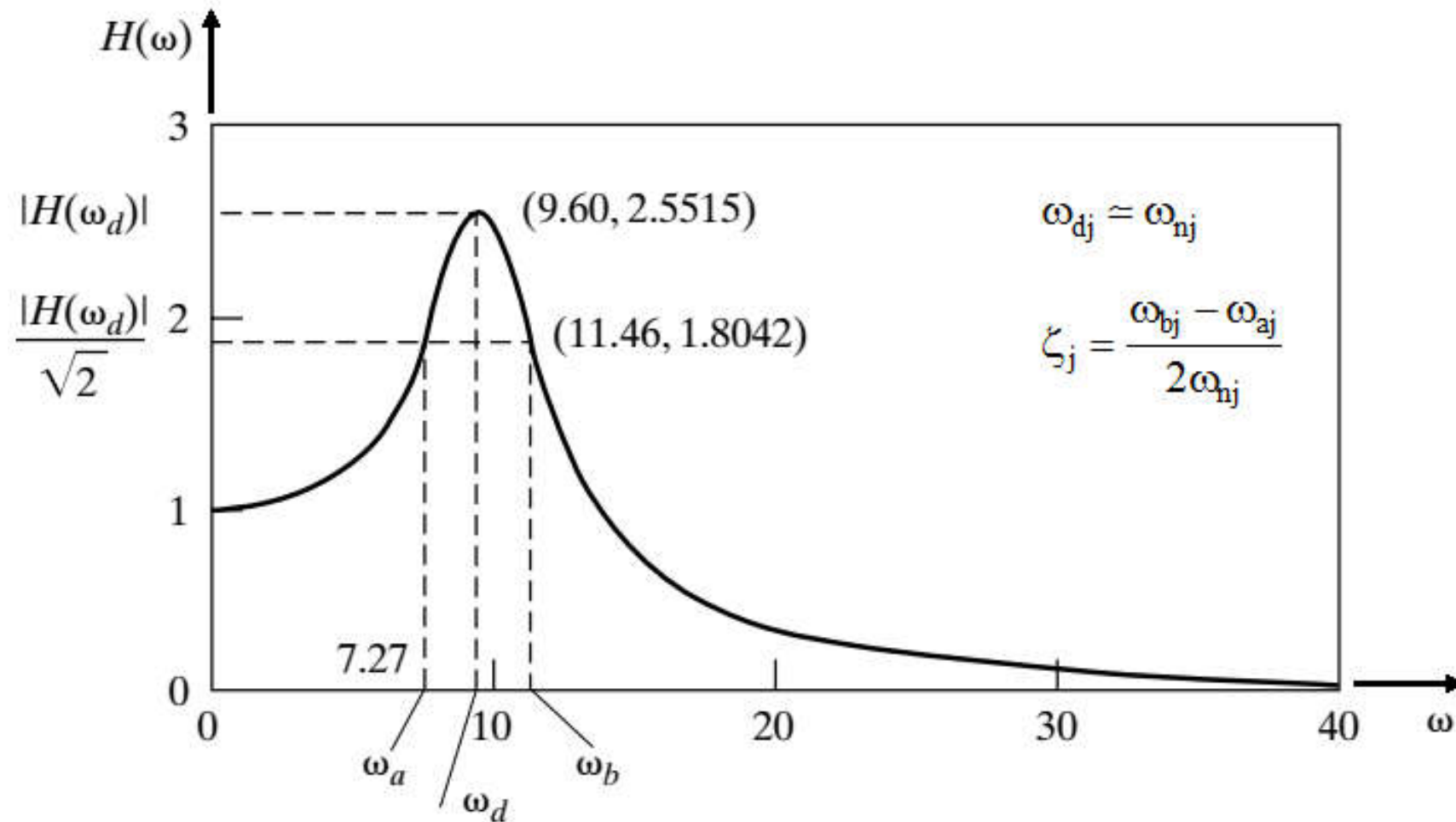
## ESTIMAÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS



*Função resposta em frequência – Receptância – Espectro de amplitude*

*(fonte: Inman, 2008).*

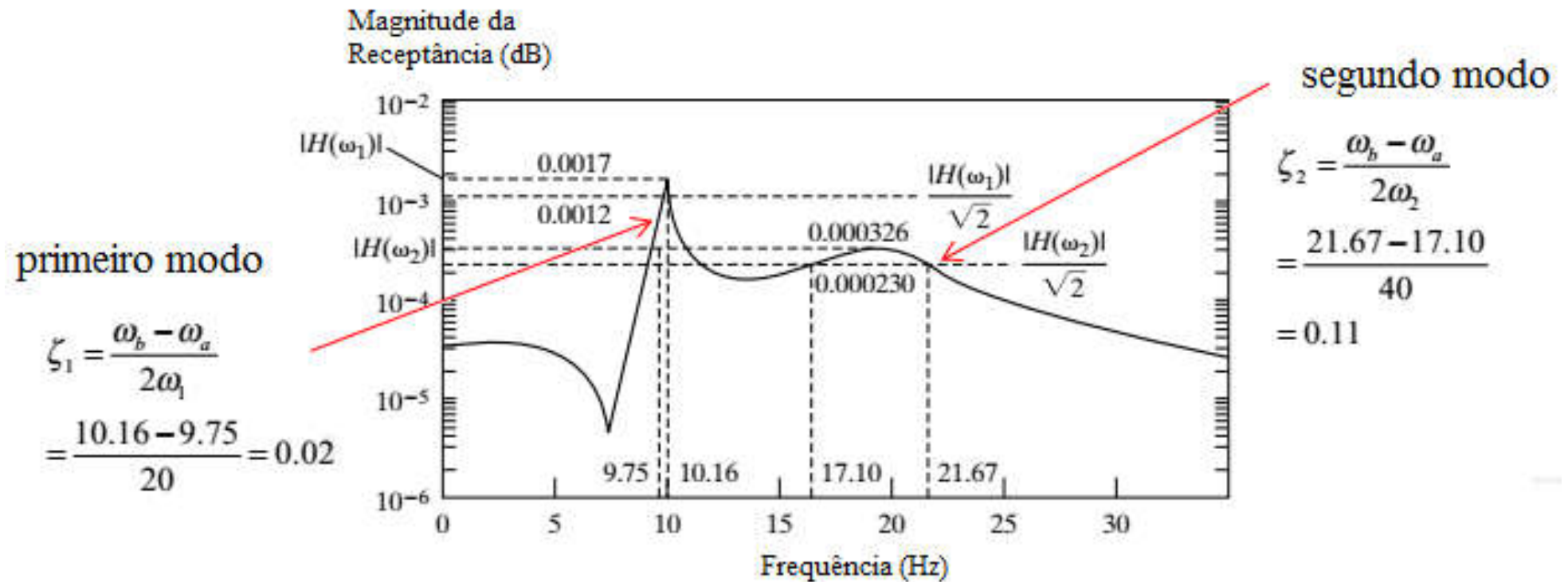
## ESTIMAÇÃO DE RAZÕES DE AMORTECIMENTO



*Receptância – Espectro de amplitude – Detalhamento em torno de um pico*

*(fonte: Inman, 2008).*

# ESTIMAÇÃO VIA FUNÇÕES RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (FRFs)



*Estimação de frequências naturais e razões de amortecimento*

*(fonte: Inman, 2008).*

## ESTIMAÇÃO DE MODOS DE VIBRAR

- Se, no entorno de uma frequência natural, a receptância pode ser aproximada por um único termo, que é o termo associada àquela frequência natural, tem-se

$$\bar{H}_{sr}(\omega_{nj}) \simeq \frac{u_{sj}u_{rj}}{i(2\zeta_j\omega_{nj}^2)} \quad \text{de modo que} \quad u_{sj}u_{rj} \simeq i(2\zeta_j\omega_{nj}^2) \cdot \bar{H}_{sr}(\omega_{nj}).$$

- Escrevendo a última expressão de termos de módulo e argumento, resulta que

$$\boxed{|u_{sj}u_{rj}| \simeq |\bar{H}_{sr}(\omega_{nj})| |2\zeta_j\omega_{nj}^2|}$$

e

$$\boxed{\arg[\bar{H}_{sr}(\omega_{nj})] = -\pi/2 \rightarrow u_{sj}u_{rj} (+)}$$

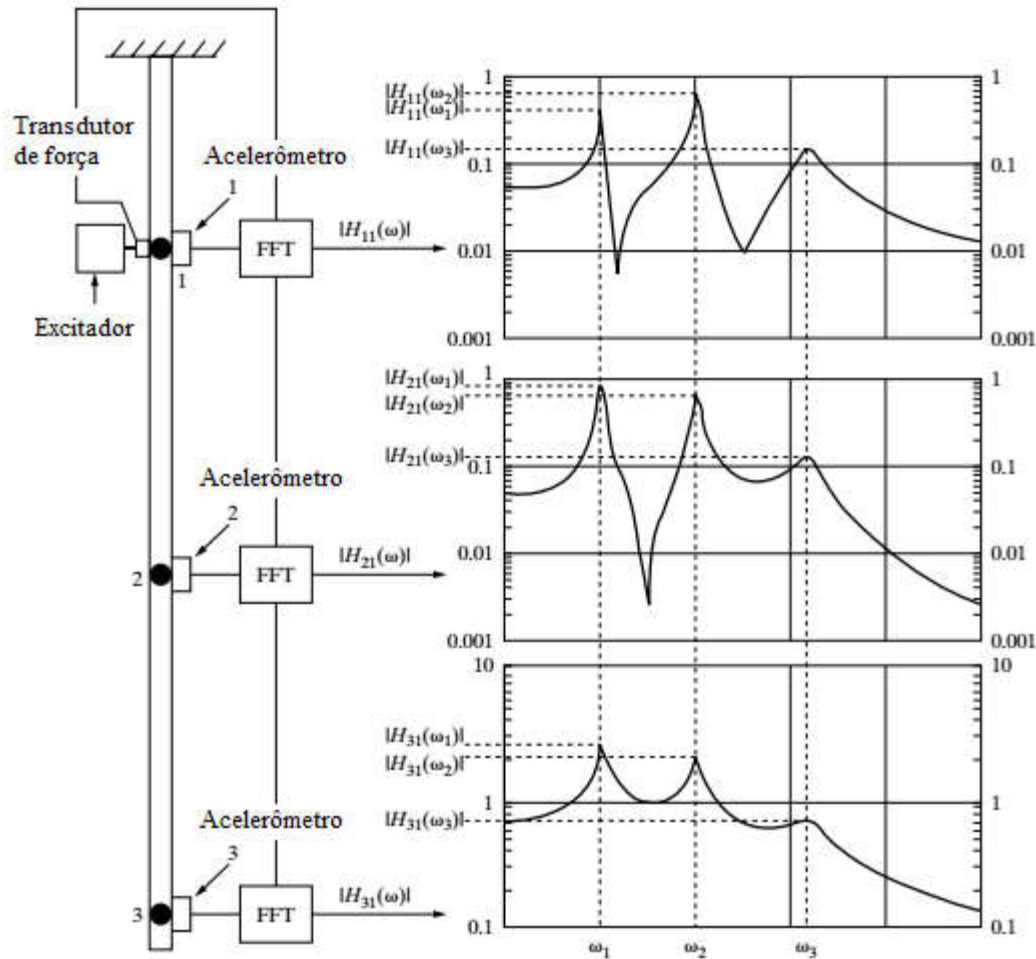
$$\boxed{\arg[\bar{H}_{sr}(\omega_{nj})] = \pi/2 \rightarrow u_{sj}u_{rj} (-)}$$

onde  $\bar{H}_{sr}(\omega_{nj})$  é a amplitude da receptância entre os pontos s e r, na frequência  $\omega_{nj}$ .

→ Com excitação num ponto r fixo e respostas nos pontos s: receptâncias  $\bar{H}_{sr}$ ;

→ Com receptâncias  $\bar{H}_{sr}$  e equações acima: **modos de vibrar** estimados.

# ESTIMAÇÃO DE MODOS DE VIBRAR (cont.)



Receptâncias (fonte: Inman, 2008).

$$|u_{1j}u_{1j}| \approx |\bar{H}_{11}(\omega_{nj})| |2\zeta_j \omega_{nj}^2|$$

$$\arg[\bar{H}_{11}(\omega_{nj})] (+)$$

$$|u_{2j}u_{1j}| \approx |\bar{H}_{21}(\omega_{nj})| |2\zeta_j \omega_{nj}^2|$$

$$\arg[\bar{H}_{21}(\omega_{nj})] ?$$

$$|u_{3j}u_{1j}| \approx |\bar{H}_{31}(\omega_{nj})| |2\zeta_j \omega_{nj}^2|$$

$$\arg[\bar{H}_{31}(\omega_{nj})] ?$$